DS15

Devoir Surveillé type Maths 3 du 15/03/2024

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n \geq \sqrt{n}$. Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?
2. (a) Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{x} \leq \dfrac{1+x}{2}$.
   (b) En déduire que pour tout entier n, $u_n \leq n + \dfrac{u_0}{2^n}$, puis que la suite $\left(\dfrac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.
   (c) Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.
   (d) En remarquant que, pour tout entier n non nul, $1 \leq \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}}$, en déduire un équivalent de u_n en $+\infty$.
3. On pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$.
   (a) À l'aide d'un développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$, montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ que l'on précisera.
   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1})$.
   (c) Justifier alors qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier n, si $n \geq N_0$ alors $u_n \geq u_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.
   (d) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
4. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def suite(n)` qui calcule le terme d'indice n de la suite lorsque $u_0 = 1$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n, et $\mathscr{B} = (e_0, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. On considère l'application f qui à un polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe le polynôme :

$$f(P) = P''(x) - 4xP'(x).$$

1. **Étude de f.** Soit n un entier naturel fixé uniquement dans cette question.
   (a) Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (b) Calculer $f(e_0), f(e_1)$, puis $f(e_k)$ pour $k \in \{2, \ldots, n\}$.
   Établir alors que la matrice A_n de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[x]$ est triangulaire.
   (c) Prouver que f est diagonalisable et que chacun de ses espaces propres est dimension 1.

(d) Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
Établir que : $\lambda = -4\deg(P)$.
En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que

$$(\mathscr{E}_n) : \qquad f(H_n) = -4nH_n.$$

Rappel : *un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1.*

2. **Étude de la suite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$.**

(a) En dérivant la relation $(\mathscr{E}_n)$, démontrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad f(H_n') = -4(n-1)H_n'.$$

En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad H_n' = nH_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad H_n - XH_{n-1} + \frac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0.$$

(b) Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = x$?
Calculer alors H_2 et H_3.

(c) D'après ce qui précède, la suite $u_n = H_n(1)$ satisfait à la relation de récurrence :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \geq 2, \quad u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)u_{n-2}}{4}.$$

Écrire un programme `Python` calculant u_{2024}.

3. **Application aux points critiques d'une fonction à trois variables.**

On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x \neq y \text{ et } y \neq z \text{ et } z \neq x\right\}$$

ainsi que la fonction V définie sur U par :

$$\forall (x,y,z) \in U, \quad V(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|.$$

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in U$.

(a) Établir que (α,β,γ) est un point critique de V si, et seulement si, (α,β,γ) est solution du système

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} 2\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta) = 2\alpha - \beta - \gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta - \alpha - \gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma - \alpha - \beta \end{cases}.$$

(b) On introduit le polynôme $Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.
Montrer que (α,β,γ) est solution de $(\mathscr{S})$ si, et seulement si, $Q''(x) - 4xQ'(x)$ admet pour racines α, β, γ.

(c) Prouver que si (α,β,γ) est un point critique de V, alors

$$Q''(x) - 4xQ'(x) = -12Q(x)$$

puis que $Q = H_3$ (cf. question 2.(b)).
Donner alors les points critiques de V.

Problème.

L'objet du problème est la présentation d'une méthode probabiliste de calcul d'une intégrale (méthode de Monte-Carlo) et de deux façons de l'améliorer.

Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, g une fonction continue sur $[0,1]$ et on pose $J = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

L'espérance d'une variable aléatoire X sera notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$ (si elles existent).

On admet que, pour tout entier naturel non nul n, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires à densités, mutuellement indépendantes, alors des variables aléatoires de la forme $f_1(X_1),\ f_2(X_2), \ldots, f_n(X_n)$ où les f_i sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, distinctes ou non, sont également mutuellement indépendantes.

I. Méthode de Monte-Carlo

1. (a) Rappeler une densité de U.
   (b) Justifier que la variable aléatoire $g(U)$ admet une espérance égale à J.
2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U.

   On suppose $\sigma^2 = V\big(g(U)\big) \neq 0$ et on note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} g(U_i)$.

   (a) Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers J.
   (b) *Recherche d'un intervalle de confiance pour J.*
      i. Justifier que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
      ii. On donne $\Phi(1.96) = 0.975$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
      Déterminer un intervalle de confiance asymptotique pour J, au niveau de confiance 95%, faisant intervenir S_n.
3. *Application.*
   (a) À l'aide du changement de variable $t = \sin u$, montrer que $\int_0^1 4\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \pi$.
   (b) i. Écrire, en `Python` une fonction `G`, de paramètre `t`, qui pour une valeur t du paramètre renvoie la valeur $4\sqrt{1-t^2}$.
      ii. On rappelle qu'en `Python`, la fonction `rd.random()` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$.
      On suppose que `n` est un entier préalablement entré dans `Python`. En utilisant le résultat de la question 2.(a) et la fonction `G`, compléter le programme suivant, de manière à ce qu'il calcule une valeur approchée de π.

```
J = 0
for i in range(n):
    ....
print(J)
```

II. Réduction de la variance par variables antithétiques.

4. Reconnaître la loi de $1 - U$.

   On définit la variable aléatoire Y par $Y = \frac{1}{2}[g(U) + g(1-U)]$. Que vaut $E(Y)$?

5. On suppose g strictement croissante et on admet l'existence des espérances intervenant dans cette question.

   (a) Justifier que, pour tout $(u,w) \in [0,1]^2$,
   $$\big(g(u)-g(w)\big)\big(g(1-u)-g(1-w)\big) \leq 0.$$

   (b) Soit W une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, indépendante de U. Quel est le signe de $E[(g(U)-g(W))(g(1-U)-g(1-W))]$?
   En remarquant que $g(U)g(1-U)$ et $g(W)g(1-W)$ ont même espérance, en déduire que :
   $$E[g(U)g(1-U)] \leq \big(E[g(U)]\big)^2$$

   On admet que l'on obtiendrait le même résultat pour g strictement décroissante.

   (c) Montrer alors que, lorsque g est strictement monotone, $V(Y) \leq \dfrac{1}{2}V\big(g(U)\big)$.

6. Donner un nouvel intervalle de confiance pour J au niveau de confiance 95%, basé sur cette méthode.

   On note ℓ_n la longueur de l'intervalle de confiance obtenu dans la partie I pour une valeur fixée de n.

   Avec cette nouvelle méthode, combien de tirages N de la variable aléatoire uniforme suffit-il de faire pour obtenir la même longueur ℓ_n d'intervalle de confiance ?

III. Réduction de la variance par stratification.

7. **Étude d'une fonction de plusieurs variables.**

   On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[^3$ par $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{4x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{9x_3}$.

   (a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

   (b) On note $\nabla^2(f)(A) = \left[\partial^2_{i,j}(f)(A)\right]_{1\leq i,j\leq 3}$ la matrice hessienne de f en $A=(a_1,a_2,a_3)$.
   Justifier que, pour tout $A \in\,]0,+\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a :
   $${}^tH\nabla^2(f)(A)H > 0.$$

   (c) f admet-elle des extrema sur $]0,+\infty[^3$?

   (d) On cherche désormais les extrema de f sous la contrainte $\mathscr{C}$: $x_1+x_2+x_3 = 110$.

      i. Montrer que f admet un unique point critique a sous cette contrainte, que l'on déterminera.

      ii. On souhaite montrer que f admet est un extremum global a sous la contrainte $\mathscr{C}$. Pour cela on considère $x \in \mathscr{C}$ et on note alors $h = x-a$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = f(a+th)$.
      En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction g, montrer que $f(x) \geq f(a)$. Conclure.

8. **Méthode de stratification.**

   Soit a et b deux réels tels que $0<a<b<1$. On définit les trois intervalles I_1, I_2 et I_3 par
   $$I_1 = [0,a[, \quad I_2 = [a,b[, \quad I_3 = [b,1],$$
   et on considère quatre variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, U_3 et T, de lois uniformes respectivement sur I_1, I_2, I_3 et $[0,1]$.

On définit la variable aléatoire $\tilde{U}$ par $\tilde{U} = U_1 \mathbb{1}_{[T\in I_1]} + U_2 \mathbb{1}_{[T\in I_2]} + U_3 \mathbb{1}_{[T\in I_3]}$ où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice d'un événement A. $\tilde{U}$ est donc la variable aléatoire définie, pour tout élément ω de l'univers Ω par :

$$\tilde{U}(\omega) = \begin{cases} U_1(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_1 \\ U_2(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_2 \\ U_3(\omega) & \text{si } T(\omega) \in I_3 \end{cases}$$

(a) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout réel x,

$$P\big(g(\tilde{U}) \leq x\big) = aP\big(g(U_1) \leq x\big) + (b-a)P\big(g(U_2) \leq x\big) + (1-b)P\big(g(U_3) \leq x\big).$$

En admettant que $g(U_2)$, $g(U_2)$, $g(U_3)$ sont des variables aléatoires à densité, montrer que $g(\tilde{U})$ est elle-même une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité $f_{g(\tilde{U})}$ en fonction de densités de $g(U_1),\ g(U_2),\ g(U_3)$, que l'on pourra noter $f_{g(U_1)},\ f_{g(U_2)},\ f_{g(U_3)}$.

Vérifier, en prenant la fonction identité pour g, que $\tilde{U}$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

(b) Déduire de ce qui précède que :

$$E\big(g(\tilde{U})\big) = aE\big(g(U_1)\big) + (b-a)E\big(g(U_2)\big) + (1-b)E\big(g(U_3)\big).$$

(c) On tire de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles, n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3. On considère donc la famille de variables aléatoires indépendantes $(U_{1,1},\dots,U_{1,n_1},U_{2,1},\dots,U_{2,n_2},U_{3,1},\dots,U_{3,n_3})$ telles que :

- $U_{1,1},\dots,U_{1,n_1}$ ont même loi que U_1,
- $U_{2,1},\dots,U_{2,n_2}$ ont même loi que U_2,
- $U_{3,1},\dots,U_{3,n_3}$ ont même loi que U_3,

et on note Z la variable aléatoire définie par :

$$Z = a\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} g(U_{1,i}) + (b-a)\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} g(U_{2,j}) + (1-b)\frac{1}{n_3}\sum_{k=1}^{n_3} g(U_{3,k})$$

Montrer que :

$$V(Z) = a^2\frac{1}{n_1}V\big(g(U_1)\big) + (b-a)^2\frac{1}{n_2}V\big(g(U_2)\big) + (1-b)^2\frac{1}{n_3}V\big(g(U_3)\big)$$

(d) *Application numérique.*

On suppose que, pour un certain choix de la fonction g et des réels a et b, on a :

$$a^2V\big(g(U_1)\big) = \frac{1}{4}, \quad (b-a)^2V\big(g(U_2)\big) = 1, \quad (1-b)^2V\big(g(U_3)\big) = \frac{1}{9}.$$

On suppose que l'on tire 110 points, de façon indépendante, uniforme sur chacun des intervalles (n_1 points dans I_1, n_2 points dans I_2, n_3 points dans I_3). Quelles valeurs faut-il donner à n_1, n_2, n_3 pour qu'une valeur prise par Z fournisse une estimation de J avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode ?