

DS16

Devoir surveillé type Maths 1 du 15/03/2024

On rappelle que :

- pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(x-1)\ln t} e^{-t} dt$ est convergente ;
- la fonction Γ est définie sur \mathbb{R}_+^* , et associe à tout réel x strictement positif, le réel strictement positif $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$;
- pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Pour tout entier naturel k non nul, et pour toute fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* , k fois dérivable, on note $f^{(k)}$ la dérivée k -ième de la fonction f . Les dérivées première et seconde sont également notées f' et f'' .

Dans les parties II et III du problème, \exp désigne la fonction exponentielle. Les parties III et IV sont indépendantes.

Le problème a pour objet la mise en évidence de certaines propriétés de la fonction Γ .

1 Une expression de $\Gamma(x)$

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

- (a) Pour tout réel u tel que $0 \leq u < 1$, montrer que $\ln(1-u) \leq -u$. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0, n]$, l'inégalité : $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.
- (b) Étudier les variations de la fonction φ définie sur $[0, \sqrt{n}[$ qui, à tout réel t de $[0, \sqrt{n}[$ associe :

$$\varphi(t) = \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) - t - n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)$$

- (c) Établir, pour tout réel t de $[0, \sqrt{n}]$, l'inégalité :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

- (d) Justifier, pour tout réel t de $[0, n]$, les inégalités :

$$e^{-t} - \frac{t^2}{n} e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

En déduire que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

2. (a) Pour tout réel x strictement positif et pour tout entier naturel n non nul, montrer que les intégrales $\int_0^1 y^{x-1} dy$ et $\int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n dy$ sont convergentes.

On pose alors $B_0(x) = \int_0^1 y^{x-1} dy$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $B_n(x) = \int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n dy$.

- (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer, pour tout n de \mathbb{N}^* , l'égalité :

$$B_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

En déduire, pour tout n de \mathbb{N} , la formule :

$$B_n(x) = \frac{\Gamma(x) \times \Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}.$$

- (c) Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^x (n-1)!$.

- (d) Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $\lambda_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. Montrer que $\lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$.

2 Dérivabilité de la fonction Γ et conséquences

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, et pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} (\ln t)^k e^{-t} dt$ est absolument convergente. On note $g_k(x)$ la valeur de cette intégrale.

- (b) Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R}_+^* . Soit x_0 et x deux éléments distincts de $]a, b[$. Établir l'inégalité :

$$|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x - x_0)g_1(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{2} \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \left(\sup_{\alpha \in [a, b]} t^{\alpha-1} \right) e^{-t} dt.$$

- (c) Montrer l'inégalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \left(\max_{\alpha \in [a, b]} t^{\alpha-1} \right) e^{-t} dt \leq \int_0^1 (\ln t)^2 t^{a-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 t^{b-1} e^{-t} dt.$$

En déduire que la fonction Γ est dérivable en x_0 et que $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.

- (d) Établir que la fonction Γ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que $\Gamma' = g_1$.

On montrerait de même que la fonction Γ est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^ , et que $\Gamma'' = g_2$. Ce résultat est admis dans toute la suite du problème.*

4. Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $\gamma_n = -\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(a) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité suivante :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a $0 < \gamma_n \leq 1$.

(b) Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente. On note γ sa limite.

5. (a) Pour tout réel x strictement positif, et pour tout entier n strictement positif, montrer l'égalité :

$$\prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) \exp\left(-\frac{x}{k}\right) \right] = \exp(-x\gamma_n) \times \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{n^x n!}.$$

(b) On pose $v_n(x) = \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) \exp\left(-\frac{x}{k}\right) \right]$. Montrer que la suite $((v_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*})$ est convergente. On note $\ell(x)$ sa limite. Montrer la relation :

$$\ell(x) = \frac{\exp(-\gamma x)}{x\Gamma(x)}.$$

6. (a) Soit x un réel strictement positif fixé.

Montrer que la série de terme général $\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$, $n \geq 1$, est convergente.

(b) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité :

$$\ln(\ell(x)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right].$$

En déduire, pour tout réel x strictement positif, la relation :

$$\ln(\Gamma(x)) = -\gamma x - \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \right].$$

7. Soit ψ la dérivée de $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$, qui est donc définie sur \mathbb{R}_+^* .

Établir, pour tout réel x strictement positif l'égalité : $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x}$.

Déterminer un équivalent simple de $\psi(x)$ lorsque x tend vers 0^+ .

Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la formule :

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

8. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère la fonction U_n définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$U_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On désigne par $A(x)$ la somme de la série de terme général $U_n(x)$.

(a) Montrer que A est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* . En particulier, exprimer, pour tout réel x strictement positif, $A'(x)$ et $A''(x)$ en fonction de $\Gamma(x)$, $\Gamma'(x)$ et $\Gamma''(x)$.

- (b) Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1, la série de terme général $U_n^{(k)}(x)$ est absolument convergente.

Dans toute la suite du problème, **on admet** les deux résultats suivants : pour tout réel x strictement positif on a

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x) \quad \text{et} \quad A''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n''(x).$$

- (c) Calculer $\psi(1)$ en fonction de γ . En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln n - \psi(n))$.

9. On veut établir dans cette question que pour tout réel y strictement positif, on a $\psi'(y) > \frac{1}{y}$.

Soit x un réel strictement positif fixé. On considère la fonction G définie sur \mathbb{R}_+^* qui, à tout réel t strictement positif, associe $G(t) = \frac{1}{(t+x)^2}$.

- (a) Montrer que sur \mathbb{R}_+^* , G est positive, strictement décroissante, et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} G(t) dt$ est convergente.

- (b) En déduire la double inégalité : $0 < \int_1^{+\infty} G(t) dt < \sum_{k=1}^{\infty} G(k)$.

- (c) Établir l'inégalité : $\psi'(x) > \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2}$. Conclure.

3 Estimation des paramètres d'une loi $\Gamma(\theta, r)$

Soit $(\theta, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, et soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)\theta^r} \times x^{r-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

10. Montrer que f est une densité de probabilité.

Si X est une variable aléatoire de densité f , on dit que X suit la loi Γ de paramètres θ et r , et on note $X \hookrightarrow \Gamma(\theta, r)$.

On considère une variable aléatoire X , qui suit une loi $\Gamma(\theta, r)$, les deux paramètres inconnus θ et r étant des réels strictement positifs.

Soit p un entier supérieur ou égal à 2. On considère un p -échantillon i.i.d. (X_1, X_2, \dots, X_p) de la loi de X : les variables aléatoires X_1, \dots, X_p sont mutuellement indépendantes et de même loi que X .

On désigne par x_1, \dots, x_p , un p -échantillon de réalisations des variables aléatoires X_1, \dots, X_p , respectivement ; les réels x_1, \dots, x_p sont fixés, strictement positifs et non tous égaux.

Soit L la fonction (appelée fonction de vraisemblance) définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans \mathbb{R}_+^* qui, à tout couple (θ, r) de réels strictement positifs, associe :

$$L(\theta, r) = \prod_{i=1}^p f(x_i).$$

On pose $F(\theta, r) = \ln(L(\theta, r))$.

11. Montrer que la recherche du maximum de L sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est équivalente à la recherche du maximum de F sur ce même ensemble.
12. (a) Montrer que la fonction F est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
- (b) Montrer que les éventuels points critiques (θ^*, r^*) vérifient le système (S) d'équations suivant

$$(S) \quad \begin{cases} \theta^* r^* = \bar{x} & (1) \\ \ln r^* - \frac{\Gamma'(r^*)}{\Gamma(r^*)} = \ln \bar{x} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln x_i & (2) \end{cases}$$

dans lequel $\bar{x} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i$.

13. On pose $K_p = \ln \bar{x} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln x_i$.
 - (a) Justifier, pour tout réel $x > 0$ et différent de 1, l'inégalité : $\ln x < x - 1$. En déduire que $K_p > 0$.
 - (b) Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$h(y) = \ln y - \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - K_p$$

Étudier les variations de h et dresser son tableau de variations.

- (c) Montrer que l'équation (2) admet sur \mathbb{R}_+^* une unique solution r^* . En déduire que le système d'équations (S) admet une unique solution (θ^*, r^*) .
14. Écrire la hessienne $\nabla^2 F$ de F au point (θ^*, r^*) .

En déduire qu'au point (θ^*, r^*) , la fonction L admet un maximum local.

On peut démontrer qu'en ce point, on obtient en fait un maximum global de L . On dit que le couple (θ^, r^*) est une estimation du couple inconnu (θ, r) obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance.*

4 Estimateur sans biais de l'écart-type σ d'une loi normale centrée

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée et d'écart-type σ ; le paramètre réel inconnu σ , est strictement positif.

15. Montrer que la variable aléatoire $T = \frac{X^2}{2\sigma^2}$ suit une loi γ de paramètre $1/2$. En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$.

16. Pour n entier naturel non nul, on considère un n -échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) i.i.d. (indépendant, identiquement distribué) de la loi de X .

(a) On désigne par S_n la variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{2\sigma^2}$. Quelle est la loi de probabilité de S_n ?

(b) En déduire que la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ est un estimateur sans biais de σ^2 .

(c) Montrer que l'espérance de $\sqrt{Y_n}$, notée $E(\sqrt{Y_n})$, vérifie : $E(\sqrt{Y_n}) < \sigma$.

(d) Donner l'expression de $E(\sqrt{Y_n})$ en fonction de n et σ .

(e) Montrer que la variable aléatoire $\widehat{\sigma}_n$ définie par

$$\widehat{\sigma}_n = \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{1/2}$$

où λ_n a été défini dans la question 2.(d), est un estimateur sans biais du paramètre σ .

17. (a) Calculer la variance $V(\widehat{\sigma}_n)$ de l'estimateur $\widehat{\sigma}_n$ en fonction de n et σ .

(b) La suite $(\widehat{\sigma}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'estimateurs de σ converge-t-elle en probabilité vers σ ?