DS2

Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (Edhec 2001)

1. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   - La fonction nulle $\varphi = 0_{\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est bien dans E car elle est de classe $\mathscr{C}^2$ et satisfait pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\varphi''(x) = 0 = (1+x^2)\varphi(x).$$
   - Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned}(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)''(x) &= \lambda_1\varphi_1''(x) + \lambda_2\varphi_2''(x) \text{ par linéarité de la dérivation}\\ &= \lambda_1(1+x^2)\varphi_1(x) + \lambda_2(1+x^2)\varphi_2(x) \text{ car } \varphi_1, \varphi_2 \in E\\ &= (1+x^2)(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)(x)\end{aligned}$$
   Donc $(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)$ appartient bien à E.

   E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et en particulier $\boxed{E \text{ est bien un espace vectoriel sur } \mathbb{R}.}$

2. Soient u et v deux éléments de E. La fonction $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto u'(x)v(x) - u(x)v'(x)$ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ comme produits et différence de fonctions qui le sont. De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= u''(x)v(x) + u'(x)v'(x) - u'(x)v'(x) - u(x)v''(x)\\ &\underbrace{=}_{u,v\in E} (1+x^2)u(x)v(x) - u(x)(1+x^2)v(x) = 0.\end{aligned}$$
   Donc $\boxed{\varphi \text{ est bien constante sur } \mathbb{R}.}$

3. (a) f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^2$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = x\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad f''(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) + x^2\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) = (1+x^2)f(x).$$
   Ainsi, $\boxed{f \text{ est bien un élément de } E.}$

   (b) Commençons par un rappel.

   > **Rappel. Théorème fondamental de l'analyse.**
   > Soit w une fonction continue sur un intervalle I, et soit $a \in I$. Alors l'application
   > $$W : x \in I \mapsto \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$$
   > est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et c'est l'unique primitive de w sur I s'annulant en a.

   La fonction $w : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{(f(t))^2}$ est continue (et même $\mathscr{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas. Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $W : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x w(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad W'(x) = w(x).$$
   Comme de plus w est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il en est de même de W'. Donc W est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $g : x \mapsto f(x) \times W(x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que :

$$g'(x) = f'(x)W(x) + f(x)W'(x) = f'(x)W(x) + f(x)w(x) = f'(x)W(x) + \frac{1}{f(x)}$$

et

$$\begin{aligned} g''(x) &= f''(x)W(x) + f'(x)W'(x) - \frac{f'(x)}{f(x)^2} \\ &= (1+x^2)f(x)W(x) + f'(x)w(x) - \frac{f'(x)}{f(x)^2} \text{ car } f \in E \\ &= (1+x^2)g(x) + \frac{f'(x)}{(f(x))^2} - \frac{f'(x)}{f(x)^2} = (1+x^2)g(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{g \text{ est bien un élément de } E.}$

4. (a) Soit h une solution de $(\star)$. Puisque $f \in E$, la fonction $\varphi = hf' - h'f$ est constante sur $\mathbb{R}$ d'après la question 2, et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, \lambda = h(x)f'(x) - h'(x)f(x) \underset{f(x)\neq 0}{\Rightarrow} \forall x \in \mathbb{R},\, \frac{\lambda}{(f(x))^2} = \frac{h(x)f'(x) - h'(x)f(x)}{f(x)^2}.$$

On intègre cette relation entre 0 et $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2} = \int_0^x \frac{h(t)f'(t) - h'(t)f(t)}{f(t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{h(t)}{f(t)}\right]_0^x = \frac{h(x)}{f(x)} - \frac{h(0)}{f(0)}.$$

En posant $\mu = \dfrac{h(0)}{f(0)}$, on en déduit donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda W(x) = \frac{h(x)}{f(x)} - \mu \quad \Rightarrow \quad \lambda \underbrace{f(x)W(x)}_{=g(x)} + \mu f(x) = h(x).$$

Ainsi $h = \lambda g + \mu f$, et $\boxed{h \text{ est bien combinaison linéaire de } f \text{ et } g.}$

(b) On a montré à la question précédente que si h est un élément de E, alors h est appartient à $\mathrm{Vect}(f, g)$, d'où l'inclusion

$$E \subset \mathrm{Vect}(f, g).$$

Et puisque f et g sont des éléments de l'espace vectoriel E, on a l'inclusion réciproque $\mathrm{Vect}(f, g) \subset E$, de sorte que :

$$\boxed{E = \mathrm{Vect}(f, g).}$$

La famille (f, g) est donc génératrice. Il reste à montrer qu'elle est libre. Soient pour cela $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda f + \mu g = 0_E \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\, \lambda f(x) + \mu g(x) = 0.$$

En prenant $x = 0$ dans cette égalité, on obtient :

$$0 = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda.$$

Et en reprenant toujours la même égalité avec $x = 1$ cette fois, on obtient :

$$0 = \mu g(1) = \mu f(1) \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2} = \mu e^{1/2} \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est **continue** sur $[0, 1]$, **positive** et **non nulle**, on a $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t > 0$ par stricte positivité de l'intégrale. Ainsi, on a :

$$0 = \underbrace{\mu e^{1/2} \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}_{>0} \quad \Rightarrow \quad 0 = \mu.$$

La famille (f, g) est donc libre, $\boxed{\text{c'est bien une base de } E.}$

Pour aller plus loin.

Vous avez peut-être été tenté ici d'affirmer que f et g sont non colinéaires, et donc que la famille (f, g) est libre sans autre justification. Mais ce n'est pas si immédiat que cela : si f et g sont colinéaires, il existerait un scalaire λ tel que $f = \lambda g$ ou $g = \lambda f$.

Dans le premier cas, on aurait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 = \lambda \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2}$$

ce qui donnerait une contradiction en prenant $x = 0$.

Dans le second cas, on aurait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2}.$$

En prenant $x = 0$, on aurait alors $\lambda = 0$. Mais pour $x = 1$ maintenant, on aurait $0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2}$, ce qui contredirait dans ce cas la stricte positivité de cette intégrale (démontrée plus haut).

Exercice 2 (EML 2007)
Partie I : Étude de l'application f.

1. f est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont, et dont le dénominateur ne s'annule pas.

   De plus, on a :

   $$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1 = f(0).$$

   Donc f est également continue en 0. Ainsi $\boxed{f \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$

2. (a) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ en tant que composée et quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x > 0$, on a :

   $$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} \boxed{= \frac{A(x)}{x^2}.}$$

   (b) Au voisinage de 0, on a :

   $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \frac{x}{1+x} = x\left(1 - x + o(x)\right) = x - x^2 + o(x^2).$$

   D'où par soustraction :

   $$A(x) = \left(x - x^2\right) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

   On a donc :

   $$f'(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

   Ainsi, on a $\boxed{\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}.}$

(c) On sait déjà que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$. Étudions la dérivabilité de f en 0. On a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x} = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}.$$

On a au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x)-x = \left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-x = -\frac{x^2}{2}+o(x^2) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Ainsi, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

Ainsi f est dérivable en 0, et $\boxed{f'(0) = -\frac{1}{2}.}$ Comme on a vu de plus que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}$, on en déduit que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que f' est continue sur $[0,+\infty[$. En d'autres termes, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0;+\infty[.}$

Autre méthode : en utilisant le théorème de passage à la limite sur la dérivée. Commençons par rappeler ce résultat :

> **Rappel. Théorème de passage à la limite sur la dérivée.**
> Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction continue sur I et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I\setminus\{x_0\}$. On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ existe et est finie égale à $\ell \in \mathbb{R}$.
> Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et on a $f'(x_0) = \ell$.

Ici, f est continue sur $I = [0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$, et on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\frac{1}{2}$. Par le théorème de passage à la limite sur la dérivée, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[\text{ et } f'(0) = -\tfrac{1}{2}.}$

(d) Étudions les variations de A sur $[0,+\infty[$. A est de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle en tant que composée, sommes, quotient de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $x \geq 0$, on a :

$$A'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-(1+x)}{(1+x)^2} = -\frac{x}{(1+x)^2}.$$

On a $A'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. Donc A est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, et on a $A(x) < A(0) = 0$ pour tout $x > 0$.

On a montré que f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, et on a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{A(x)}{x^2} < 0.$$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0;+\infty[.}$

(e) On a pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x} = \frac{\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}.$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$. Par somme, on a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$

3. (a) f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, on a pour tout $x>0$:

$$f'(x)=\frac{A(x)}{x^2},\quad f''(x)=\frac{x^2A'(x)-2xA(x)}{x^4}.$$

On a $A'(x)=-\frac{x}{(1+x)^2}$. D'où en substituant :

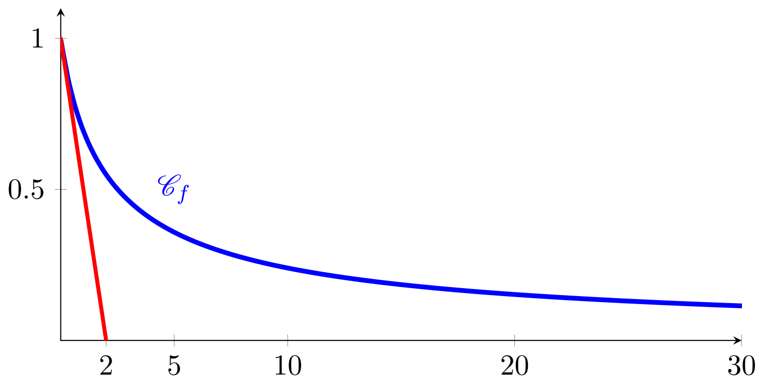
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^3}\left(-\frac{x}{(1+x)^2}\,x-2\left(\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\right)\right)=\frac{1}{x^3}\left(-\frac{x^2+2x(1+x)}{(1+x)^2}+2\ln(1+x)\right)\\ &=\frac{1}{x^3}\left(-\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2}+2\ln(1+x)\right)=\boxed{\frac{B(x)}{x^3}.}\end{aligned}$$

(b) B est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme somme, quotient, composée de fonctions qui le sont, et on a pour tout $x\geq 0$:

$$\begin{aligned} B'(x) &= -\frac{(6x+2)\,(1+x)^2-(3x^2+2x)\,2(1+x)}{(1+x)^4}+\frac{2}{(1+x)}\\ &=-\frac{2(3x+1)\,(1+x)-2(3x^2+2x)}{(1+x)^3}+\frac{2}{(1+x)}\\ &=2\,\frac{-(3x^2+4x+1)+(3x^2+2x)+(1+x)^2}{(1+x)^3}=\frac{2\,x^2}{(1+x)^3}.\end{aligned}$$

En particulier, on a $B'(x)\geq 0$ pour tout $x\geq 0$, et donc B est croissante sur $[0,+\infty[$. En particulier, on a $B(x)\geq B(0)=0$, et donc $f''(x)\geq 0$ pour tout $x>0$. Ainsi $\boxed{f \text{ est convexe sur }]0;+\infty[.}$

4. Le dessin doit faire apparaître les points mis en évidence dans les questions précédentes. En particulier, la fonction tracée doit bien être décroissante, convexe, valoir 1 en 0, tendre vers 0 en $+\infty$ et avoir une dérivée en 0 égale à $-\frac{1}{2}$ (ce qui donne la pente de la tangente en 0 et nous permet de la représenter).



Partie II : Un développement en série.

5. Pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[0;1]$, on a (somme des premiers termes d'une suite géométrique avec $-t\neq 1$) :

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k=\sum_{k=0}^{N}(-t)^k=\frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)}=\frac{1}{1+t}-\frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}.$$

D'où l'égalité :

$$\boxed{\frac{1}{1+t}=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k+\frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}.}$$

6. On intègre l'égalité précédente entre 0 et $x \in [0,1]$:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \int_0^x t^k \,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

par linéarité de l'intégrale (sur un segment). On obtient, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x)}$$

où $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

7. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. On a pour tout $t \in [0,x]$:

$$\left| \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \right| = \frac{t^{N+1}}{1+t} \leq t^{N+1}$$

car $1+t \geq 1$ sur $[0,x]$. D'où par inégalité triangulaire, et par croissance de l'intégrale :

$$|J_N(x)| \leq \int_0^x \left| \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \right| \mathrm{d}t \leq \int_0^x t^{N+1}\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{x^{N+2}}{N+2}}.$$

8. Soit $x \in [0,1]$. On a $|J_N(x)| \leq \dfrac{x^{N+2}}{N+2} \leq \dfrac{1}{N+2}$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+2} = 0$. Par théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} J_N(x)$ existe et vaut 0. À l'aide de l'égalité de la question 6., on en déduit que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}$ existe et vaut $\ln(1+x)$. Ce qui équivaut, après un glissement d'indice, au fait que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.}$$

Partie III : Égalité d'une intégrale et d'une somme de série.

9. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1]$. Reprenons l'égalité de la question 7. On a :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right| = |J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}.$$

En divisant cette égalité par $x \neq 0$, on obtient :

$$\boxed{\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.}$$

Et cette égalité est encore vraie pour $x = 0$, puisque $f(x) = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} = 1$.

10. Intégrons entre 0 et 1 l'inégalité précédente. On a par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{N+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{(N+2)^2}.$$

D'où par l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\right| = \left|\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{(k+1)}\right)\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 \left|f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1}\right|\mathrm{d}x \leq \frac{1}{(N+2)^2}$$

Puisque $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{(N+2)^2} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que la série $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{(-1)^k}{(k+1)^2}$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

Par glissement d'indice, on en déduit finalement que $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.}$$

11. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En séparant les termes pairs et impairs, on a :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} \boxed{= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}.}$$

Et de même :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^{2p+1-1}}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{(-1)^{2p-1}}{(2p)^2} \boxed{= \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}.}$$

12. Commençons par justifier la convergences des séries apparaissant dans les égalités précédentes :
   - les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{p\geq 1} \dfrac{1}{4p^2} = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{p\geq 1} \dfrac{1}{p^2}$ convergent en tant que sommes de Riemann, et leur somme vaut respectivement $\dfrac{\pi^2}{6}$ et $\dfrac{\pi^2}{24}$.
   - la série $\sum\limits_{p\geq 1} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$ converge car :

     - $\dfrac{1}{(2p+1)^2} \sim \dfrac{1}{4p^2}$;
     - $\dfrac{1}{p^2} \geq 0$ pour tout $p \geq 1$;
     - $\sum\limits_{p\geq 1} \dfrac{1}{p^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann d'exposant $2 > 1$.

     Par théorème de comparaison, la série $\sum\limits_{p\geq 1} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$ converge donc bien.

En passant à la limite quand $N \to +\infty$ dans la première égalité de la question précédente, on obtient (tout converge) :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{\pi^2}{24} \quad \Rightarrow \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{3\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

En passant cette fois à la limite dans la deuxième égalité, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Et donc, d'après le résultat de la question 10., on obtient : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}.}$

Exercice 3 (Ecricome 2014)
Partie I : Étude d'un cas particulier.

1. La liste des gagnants possibles pour chacun des trois premiers duels est :

$$\boxed{(A_0,A_0,A_0),(A_0,A_0,A_3),(A_0,A_2,A_2),(A_0,A_2,A_3),(A_1,A_1,A_1),(A_1,A_1,A_3),(A_1,A_2,A_2),(A_1,A_2,A_3).}$$

2. Il est évident qu'il ne peut y avoir de gagnant du tournoi à l'issue du premier duel ni à l'issue du second duel, car alors aucun joueur n'a gagné trois duels de suite. Donc on a $\boxed{P(E_1)=P(E_2)=1.}$

3. L'évènement $\overline{E_3}$ se réalise si et seulement si un gagnant a été désigné à l'issue du troisième duel. Or ceci est possible si et seulement si le gagnant du premier duel (A_1 ou A_2) a également remporté les deux suivants. Ainsi, on a :

$$\boxed{\overline{E_3}=(B_0^1\cap B_0^2\cap B_0^3)\cup(B_1^1\cap B_1^2\cap B_1^3).}$$

On en déduit, par incompatibilité des évènements $(B_0^1\cap B_0^2\cap B_0^3)$ et $(B_1^1\cap B_1^2\cap B_1^3)$:

$$P(\overline{E_3})=P(B_0^1\cap B_0^2\cap B_0^3)+P(B_1^1\cap B_1^2\cap B_1^3).$$

Les évènements B_i^j n'étant pas indépendants, on applique la formule des probabilités composées :

$$P(B_0^1\cap B_0^2\cap B_0^3)=P(B_0^1)P_{B_0^1}(B_0^2)P_{B_0^1\cap B_0^2}(B_0^3)=\frac{1}{2^3}.$$

De même, on a $P(B_1^1\cap B_1^2\cap B_1^3)=\frac{1}{8}$, et donc : $\boxed{P(\overline{E_3})=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}.}$ Et on vérifie que : $\boxed{P(E_3)=1-P(\overline{E_3})=\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}P(E_2)+\dfrac{1}{4}P(E_1).}$

4. (a) Les évènements $A_k^{(n)}$ pour $1\leq k\leq n$ forment un système complet d'évènements. Par la formule des probabilités totales, on a donc :

$$P(E_n)=P(E_n\cap A_1^{(n)})+P(E_n\cap A_2^{(n)})+P(E_n\cap A_3^{(n)})+\cdots+P(E_n\cap A_n^{(n)})$$

Or pour tout $3\leq k\leq n$, l'évènement $E_n\cap A_k^{(n)}$ est impossible : puisqu'il n'y a pas de vainqueur à l'issue du n-ème duel, celui qui a gagné ce duel ne peut en avoir déjà gagné plus de deux. Ainsi, on a :

$$\boxed{P(E_n)=P(E_n\cap A_1^{(n)})+P(E_n\cap A_2^{(n)})=P(A_1^{(n)})P_{A_1^{(n)}}(E_n)+P(A_2^{(n)})P_{A_2^{(n)}}(E_n).}$$

(b) On a $A_1^{(n)}=B_n^n$ et $A_2^{(n)}=B_{n-1}^{n-1}\cap B_{n-1}^n$, de sorte que :

$$P(A_1^{(n)})=P(B_n^n)=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad P(A_2^{(n)})=P(B_{n-1}^{n-1}\cap B_{n-1}^n)=P(B_{n-1}^{n-1})P_{B_{n-1}^{n-1}}(B_{n-1}^n)=\frac{1}{2^2}.$$

D'autre part, en sachant que A_n a gagné le n-ème duel, il n'y a pas de gagnant au bout de n duels si et seulement si il n'y en avait pas au bout de $n-1$. Et donc $P_{A_1^{(n)}}(E_n)=P_{A_1^{(n)}}(E_{n-1})$.

Mais E_{n-1} (qui ne dépend que des $n-1$ premiers duels) est indépendant de $A_1^{(n)}$ (qui dépend seulement du dernier), on a : $P_{A_1^{(n)}}(E_{n-1})=P(E_{n-1})$.

Par le même raisonnement, on a $P_{A_2^{(n)}}(E_n)=P(E_{n-2})$.

On obtient donc en substituant dans le résultat de la question précédente :

$$\boxed{P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).}$$

5. La relation précédemment obtenue montre que la suite $(P(E_n))_{n\geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

   Le discriminant de ce polynôme est $\frac{1}{4} + 1 > 0$, donc le polynôme caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. On en déduit l'existence de deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \geq 2, \qquad P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

   Comme $2 < \sqrt{5} < 3$, r_1 et r_2 sont tous deux dans $]-1,1[$, et donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0.}$

6. On a (propriété de la limite monotone) :

$$P\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=2}^{n} E_k\right).$$

   Or, on a $\bigcap\limits_{k=2}^{n} E_k = E_n$ (car $E_n \subset E_k$ pour tout $2 \leq k \leq n$), d'où :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} E_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0}$$

   par la question précédente. Or $\bigcap\limits_{k=2}^{+\infty} E_k$ est l'évènement « le tournoi ne désigne pas de vainqueur ».

   Et donc, par passage à l'événement contraire, $\boxed{\text{le tournoi désigne un vainqueur avec probabilité 1.}}$

Partie II : Étude du cas général.

7. L'évènement $A_k^{(n)}$ est réalisé si et seulement si le joueur A_{n-k+1} a gagné tous les duels $n-k+1$ à n inclus (ce qui fait $n-(n-k+1)+1 = k$ victoires). On a donc :

$$A_k^{(n)} = B_{n-k+1}^{n-k+1} \cap B_{n-k+1}^{n-k+2} \cap \cdots \cap B_{n-k+1}^{n}.$$

   Par la formule des probabilités composées, on a :

$$P(A_k^{(n)}) = P(B_{n-k+1}^{n-k+1}) P_{B_{n-k+1}^{n-k+1}}(B_{n-k+1}^{n-k+2}) \dots P_{B_{n-k+1}^{n-k+1} \cap \dots \cap B_{n-k+1}^{n-1}}(B_{n-k+1}^{n}).$$

   Et on a $P(B_{n-k+1}^{n-k+1}) = p$ car le joueur A_{n-k+1} est rentré en jeu lors du $(n-k+1)$-ème duel, et toutes les autres probabilités conditionnelles valent q. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{P(A_k^{(n)}) = pq^{k-1}.}$$

8. Soit $k \in \{1, \dots, N-1\}$ et $n \geq N$. Sachant que le joueur qui a remporté le n-ème duel a remporté les k derniers duels, avec $k < N$, il n'y a pu y avoir de gagnant du tournoi lors des duels $n-k+1, n-k+2, \dots, n$.

   Et donc E_n est réalisé si et seulement si il n'y avait pas non plus de gagnant du tournoi lors des $n-k$ premiers duels. Ainsi, on a : $P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P_{A_k^{(n)}}(E_{n-k})$.

   Or, les événements $A_k^{(n)}$ et E_{n-k} sont indépendants car E_{n-k} ne dépend que des résultats des $(n-k)$ premiers duels, alors que $A_k^{(n)}$ ne dépend que des résultats des duels $n-k+1, \dots, n$. Ainsi, on a :

$$\boxed{P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P_{A_k^{(n)}}(E_{n-k}) = P(E_{n-k}).}$$

9. Soit $n \geq N$. Par la formule des probabilités totales appliquée avec le SCE $(A_k^{(n)})_{1 \leq k \leq n}$, on a :

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k^{(n)}) P_{A_k^{(n)}}(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} P(A_k^{(n)}) P_{A_k^{(n)}}(E_n)$$

car $P_{A_k^{(n)}}(E_n)$ pour tout $k \geq N$ (si un joueur a gagné $k \geq N$ duels, le tournoi a désigné un vainqueur). À l'aide des résultats obtenus aux deux questions précédentes, on en déduit que :

$$\boxed{P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}).}$$

10. Il ne peut y avoir de vainqueur du tournoi en strictement moins de N duels, donc :

$$\boxed{P(E_1) = P(E_2) = \cdots = P(E_{N-1}) = 1.}$$

À l'aide de la relation $(\mathcal{R}_2)$ avec $n = N$, on a $(q \neq 1)$:

$$P(E_N) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{N-k}) = p \sum_{k=1}^{N-1} q^{k-1} = p \times \underbrace{1}_{\text{premier terme}} \times \frac{1 - q^{N-1}}{1 - q} \boxed{= 1 - q^{N-1}.}$$

11. Soit $n \geq N$. On a avec la relation $(\mathcal{R}_2)$:

$$\begin{aligned}
P(E_n) - P(E_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}) - \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n+1-k}) \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}) - \sum_{i=0}^{N-2} pq^{i} P(E_{n-i}) \\
&= \sum_{k=1}^{N-2} pq^{k-1} P(E_{n-k}) + pq^{N-2} P(E_{n-N+1}) - \sum_{i=1}^{N-2} pq^{i} P(E_{n-i}) - pP(E_n) \\
&= \sum_{k=1}^{N-2} pq^{k-1}(1-q) P(E_{n-k}) + pq^{N-2} P(E_{n-N+1}) - pP(E_n) \\
&= p \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}) - p^2 q^{N-2} P(E_{n-N+1}) + pq^{N-2} P(E_{n-N+1}) - pP(E_n) \\
&= pP(E_n) + pq^{N-2}(1-p) P(E_{n-N+1}) - pP(E_n) \boxed{= pq^{N-1} P(E_{n-N+1})}
\end{aligned}$$

12. Le polynôme Q est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, et donc en particulier dérivable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$Q'(x) = \sum_{k=1}^{N-1} kpq^{k-1} x^{k-1} = p + \sum_{k=2}^{N-1} kpq^{k-1} x^{k-1} > 0.$$

Le polynôme Q est donc continu et strictement croissant sur $[0, +\infty$. De plus, on a $Q(0) = -1$ et $\lim_{x \to +\infty} Q(x) = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection, $\boxed{\text{l'équation } Q(x) = 0 \text{ possède une unique solution sur } [0, +\infty[}$, qu'on note r_N.

On a déjà montré que $\boxed{Q'(r_N) > 0}$. De plus, on a :

$$Q(1) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} - 1 = p \sum_{k'=0}^{N-2} q^{k'} - 1 = p \frac{1 - q^{N-1}}{1 - q} - 1 = -q^{N-1}.$$

Donc on a $Q(1) < 0 = Q(r_N)$. Le polynôme Q étant strictement croissant sur $[0, +\infty[$, on a $\boxed{r_N > 1}$.

13. Montrons par une récurrence forte[1] que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$ » est vraie pour tout $n \geq 1$.

Init. Pour tout $1 \leq n \leq N-1$, on a $P(E_n) = 1$. De plus, on a $n - N < 0$ donc $\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} = (r_N)^{N-n} \geq 1$ On a donc bien $P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$, de sorte que $\mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(N-1)$ sont vraies.

Hér. Soit $n \geq N$. On suppose $\mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n-1)$ vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. D'après la relation $(\mathcal{R}_2)$, on a :

$$P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k})$$

Or par hypothèse de récurrence, pour tout $1 \leq k \leq N-1$, $P(E_{n-k}) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-k-N}$, d'où :

$$P(E_n) \leq \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-k-N} \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N} \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} r_N^k$$

Or, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} r_n^k = Q(r_N) + 1 = 1$ car r_N est racine de Q. Ainsi, on a $P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$ et la propriété est vraie au rang n.

Par principe de récurrence (forte), on a donc que : $\boxed{\forall n \geq 1, \quad P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.}$

14. On procède par théorème de comparaison.

- Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq P(E_N) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$.
- La série $\sum \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$ converge (série géométrique de raison $\frac{1}{r_N} \in]-1, 1[$).

Par théorème de comparaison, $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} P(E_n) \text{ converge.}}$

Soit $N' > N$. En sommant la relation $(\mathcal{R}_3)$ pour $N \leq n \leq N'$, on obtient :

$$\sum_{n=N}^{N'} P(E_n) - P(E_{n+1}) = \sum_{n=N}^{N'} pq^{N-1} P(E_{n-N+1}).$$

D'où, comme la somme de gauche est une somme téléscopique :

$$P(E_N) - P(E_{N'+1}) = pq^{N-1} \sum_{k=1}^{N'-N+1} P(E_k)$$

en faisant le changement d'indice $k = n - N + 1$ dans la somme de droite. On fait tendre N' vers $+\infty$ dans cette relation où toutes les expressions convergent :

$$P(E_N) = pq^{N-1} \sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k).$$

Comme $P(E_N) = 1 - q^{N-1}$, on en déduit que : $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(E_k) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{q^{N-1}} - 1\right).}$

[1]Cela signifie qu'à l'hérédité, on ne suppose pas seulement l'hypothèse vérifiée au rang $n-1$ pour prouver qu'elle l'est au rang n, mais on suppose plutôt qu'elle est vérifiée à tous les rangs $0, 1, \ldots, n-1$ pour prouver qu'elle est vraie au rang n.

15. (a) Soit $n \geq 2$. L'événement $E_{n-1} \cap \overline{E_n}$ est réalisé si le gagnant n'est pas désigné à l'issue du $(n-1)$-ième duel mais l'est à l'issue du n-ième. Cela correspond donc à ce qu'exactement n duels ont eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur du tournoi. Ainsi, on a bien $\boxed{[X = n] = E_{n-1} \cap \overline{E_n}}$.

D'autre part, on a par la formule des probabilités totales :

$$P(E_{n-1}) = P(E_{n-1} \cap E_n) + P(E_{n-1} \cap \overline{E_n}) = P(E_n) + P(X = n)$$

car $E_n \subset E_{n-1}$. D'où le résultat voulu :

$$\boxed{P(X = n) = P(E_{n-1}) - P(E_n).}$$

(b) X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geq 0} \underbrace{nP(X = n)}_{\geq 0}$ converge (absolument).

On effectue un théorème de comparaison :

- Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$0 \leq nP(X = n) = nP(E_{n-1} \cap \overline{E_n}) \subset nP(E_{n-1}) \leq n \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1-N}$$

par la question 13.

- La série de terme général $n\left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-1-N}$ converge (série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{r_N} \in]-1, 1[$).

Par théorème de comparaison, la série $\sum\limits_{n \geq 0} nP(X = n)$ converge, et $\boxed{X \text{ admet une espérance.}}$

Calculons $E(X)$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \underbrace{P(X = 1)}_{=0 \text{ car } N \geq 3} + \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(P(E_{n-1}) - P(E_n)\right) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(E_{n-1}) - \sum_{n=2}^{+\infty} nP(E_n) \underbrace{=}_{\text{Tout converge}} \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)P(E_n) - \sum_{n=2}^{+\infty} nP(E_n) \\
&\underbrace{=}_{\text{Tout converge}} \sum_{n=1}^{+\infty} nP(E_n) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) - \sum_{n=2}^{+\infty} nP(E_n) = P(E_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)
\end{aligned}$$

Or $P(E_1) = 1$ (question 10), et on avait obtenu la valeur de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$ à la question 14. D'où en substituant :

$$\boxed{E(X) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = 1 + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{q^{N-1}} - 1\right).}$$
