DS2

# Devoir Surveillé du 07/10/2022

Durée : 4h

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.*
*La calculatrice n'est pas autorisée.*

## Exercice 1

On rappelle que l'ensemble $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, muni des lois habituelles, possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On note $E$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui vérifient la relation $(\star)$ suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi''(x) = (1+x^2)\varphi(x).$$

1. Montrer que $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si $u$ et $v$ sont deux éléments de $E$, alors $u'v - uv'$ est une fonction constante.
3. Soit $f$ la fonction définie, pour tout réel $x$, par : $\quad f(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$.
   (a) Vérifier que $f$ est un élément de $E$.
   (b) Soit $g$ la fonction définie par : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) \times \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2}$.
   Montrer que $g$ est un élément de $E$.
4. (a) Soit $h$ une solution de $(\star)$. Montrer, en utilisant le résultat de la deuxième question appliqué aux fonctions $h$ et $f$, que $h$ est combinaison linéaire de $f$ et $g$.
   (b) Montrer finalement que $(f,g)$ est une base de $E$.

---

## Exercice 2

On considère l'application

$$f \ :\ [0;+\infty[ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

## Partie I : Étude de l'application $f$.

1. Montrer que $f$ est continue sur $[0,+\infty[$.
2. On considère l'application

$$A \ :\ [0;+\infty[ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

   (a) Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout $x \in ]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{A(x)}{x^2}$ .
   (b) Montrer que $f'$ admet $-\dfrac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.
   (c) Démontrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ et préciser $f'(0)$.
   (d) Dresser le tableau de variation de $A$.
   En déduire que $f$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
   (e) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
3. On considère l'application

$$B \ :\ [0;+\infty[ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x).$$

(a) Montrer que $f$ est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$, et que, pour tout $x \in ]0;+\infty[$,

$$f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}.$$

(b) Dresser le tableau de variation de $B$.
En déduire que $f$ est convexe sur $]0;+\infty[$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$.

## Partie II : Un développement en série.

5. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0;1]$ :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

6. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$ :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x) \ ,$$

où on a noté $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} \mathrm{d}t$.

7. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$ : $\quad |J_N(x)| \leq \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.

8. En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

## Partie III : Égalité d'une intégrale et d'une somme de série.

9. Montrer, en utilisant le résultat de la question 7., pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$ :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}$$

10. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\quad \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ .

11. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \end{cases}$$

12. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Montrer : $\quad \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$ .

---

**Exercice 3**

Soient $p$ un réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$ et $N$ un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.

On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $A_0$, $A_1$, $A_2, \dots, A_n, \dots$ qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

- $A_0$ et $A_1$ s'affrontent durant le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu ;
- Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur $A_2$. Ce duel se déroule de manière analogue et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant $A_2$. Le perdant est éliminé du tournoi, et la gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur $A_3$ et ainsi de suite ;
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur $A_k$ participe au duel numéro $k$, qu'il peut remporter avec une probabilité $p$, son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$.
- Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne $N$ jeux successifs lors du tournoi.

Pour tout entier naturel $n$ et pour tout $0 \leq k \leq n$, on considère les évenements :

- $E_n$ : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro $n$ » ;
- $B_k^n$ : « le joueur $A_k$ a remporté le duel numéro $n$ ».

## Partie I : Étude d'un cas particulier.

On suppose dans cette partie que $N = 3$ et $p = q = \dfrac{1}{2}$.

1. Donner la liste des gagnants possibles pour chacun des trois premiers duels.
2. Déterminer les probabilités $P(E_1)$ et $P(E_2)$.
3. Exprimer l'évènement $\overline{E_3}$ à l'aide des évènements $B_k^n$. En déduire que $P(\overline{E_3}) = \dfrac{1}{4}$.

   Vérifier alors que :
   $$P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1).$$
4. Soit $n \geq 3$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, notons $A_k^{(n)}$ l'évènement « le vainqueur du $n$-ième duel a gagné $k$ duels à l'issue du $n$-ième duel ».
   (a) Montrer que :
   $$P(E_n) = P(A_1^{(n)})P_{A_1^{(n)}}(E_n) + P(A_2^{(n)})P_{A_2^{(n)}}(E_n).$$
   (b) En déduire :
   $$(\mathcal{R}_1) \ : \ P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).$$
5. Justifier l'existence de quatre réels $\lambda$, $\mu$, $r_1$, $r_2$ tels que :
   $$\forall n \geq 2, \qquad P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
   *Le calcul explicite de $\lambda$ et $\mu$ n'est pas demandé.*

   Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(E_n)$.
6. Que vaut la probabilité $P\left(\displaystyle\bigcap_{k=2}^{+\infty} E_k\right)$ ? Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

## Partie II : Étude du cas général.

On revient au cas général : $p$ désigne un réel quelconque de $]0;1[$ et $N$ est un entier supérieur ou égal à 3. On considère le polynôme $Q$ défini par :

$$Q(X) = \left( \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} X^k \right) - 1.$$

7. Pour tout $1 \leq k \leq n$, on note toujours $A_k^{(n)}$ l'événement : « à l'issue du $n$-ième duel, le vainqueur du $n$-ième duel a obtenu exactement $k$ victoires ».

   Montrer que : $\quad P(A_k^{(n)}) = pq^{k-1}$.

8. Pour tout $k \in \{1, \ldots, N-1\}$, justifier l'égalité :

$$\forall n \geq N, \qquad P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k}).$$

9. Établir que pour tout $n \geq N$, on a :

$$(\mathcal{R}_2) \ : \ P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}).$$

10. Calculer $P(E_1)$, ... , $P(E_{N-1})$. En déduire que :

$$P(E_N) = 1 - q^{N-1}.$$

11. Soit $n \geq N$. À l'aide de $(\mathcal{R}_2)$, démontrer la relation :

$$(\mathcal{R}_3) \ : \ P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1} P(E_{n-N+1}).$$

12. Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
    On note désormais $r_N$ cette solution. Justifier que :

$$r_N > 1 \quad \text{et} \quad Q'(r_N) > 0.$$

13. À l'aide de la relation $(\mathcal{R}_2)$, établir que :

$$\forall n \geq 1, \qquad P(E_n) \leq \left( \frac{1}{r_N} \right)^{n-N}.$$

14. Établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} P(E_n)$ puis, en sommant la relation $(\mathcal{R}_3)$ sur tous les entiers $n \geq N$, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$.

15. On définit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de duels qui ont eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur du tournoi. On conviendra que $X = 0$ si le tournoi n'a pas de vainqueur.

    (a) Soit $n \geq 2$. Justifier que les événements $(E_{n-1} \cap \overline{E_n})$ et $[X = n]$ sont égaux, puis que :

$$P(X = n) = P(E_{n-1}) - P(E_n).$$

    (b) Démontrer que $X$ admet une espérance et exprimer $E(X)$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$. En déduire la valeur de $E(X)$.