

DS3

## Devoir Surveillé du 08/11/2022

Durée : 0h45

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.*

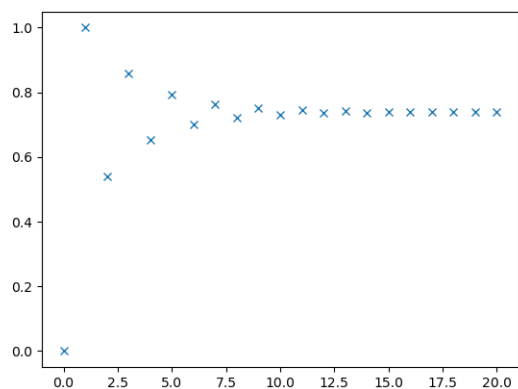
*La calculatrice n'est pas autorisée.*

### Exercice 1

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$ .

1. Rappeler la commande permettant d'importer la librairie `numpy`. On suppose dans la suite avoir importé les librairies `numpy` et `matplotlib.pyplot` à l'aide des préfixes `np` et `plt` respectivement.
2. Écrire une fonction d'en-tête `def suite(n)` qui prend comme paramètre d'entrée un entier  $n$  et calcule la valeur de  $u_n$  correspondante.
3. On souhaite étudier le comportement de la suite  $(u_n)$ , ou tout du moins de ces premiers termes. Écrire pour cela un programme qui trace un graphique sur lequel se trouvent les points  $(n, u_n)$  pour  $n \in \llbracket 0, 20 \rrbracket$ .

On obtient le graphe suivant :



Les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  semblent adjacentes, et converger vers une même limite  $\ell$ , de sorte que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

En particulier,  $\ell$  semble toujours appartenir à l'intervalle d'extrémités  $u_n$  et  $u_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\ell - u_n| \leq |u_{n+1} - u_n|.$$

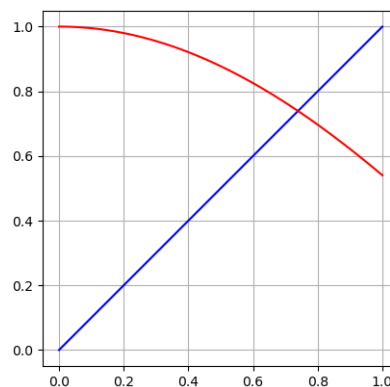
Nous admettrons tous ces résultats sans démonstration pour la suite.

4. Justifier que le réel  $\ell$  satisfait  $\ell = \cos(\ell)$ .

5. Proposer un programme permettant de tracer les courbes représentatives des fonctions  $f : x \mapsto \cos(x)$  et  $g : x \mapsto x$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

Après exécution, ce programme génère le graphe ci-contre.

Déterminer par lecture graphique une valeur approchée de  $\ell$ .



6. (a) Écrire une fonction d'en-tête `def premier_entier(p)` qui prend comme paramètre d'entrée un entier naturel  $p$  et renvoie le plus petit entier  $n$  tel que  $|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-p}$ .

- (b) En déduire une fonction d'en-tête `def approx(p)` qui prend comme paramètre d'entrée un entier naturel  $p$  et renvoie une valeur approchée de  $\ell$  à  $\pm 10^{-p}$  près.
7. On souhaite déterminer une valeur approchée de  $\ell$  par une autre méthode, en utilisant un algorithme de dichotomie. On considère pour cela la fonction  $h : x \in [0, 1] \mapsto x - \cos(x)$ .
- (a) Montrer que  $h$  est continue et strictement monotone sur l'intervalle  $[0, 1]$ , et qu'elle s'annule en un unique point  $\alpha$  de  $[0, 1]$ .  $\alpha = \ell$ .
- (b) On suppose avoir défini la fonction  $h : x \mapsto x - \cos(x)$  sur Python. Compléter la fonction suivante, qui prend comme paramètre d'entrée un réel  $\varepsilon > 0$ , et qui renvoie une valeur approchée de  $\ell$  à  $\varepsilon$  près à l'aide de la méthode de dichotomie.

```

1 | def dichotomie(eps):
2 |     a = 0
3 |     b = 1
4 |     while .....
5 |         m = (a+b)/2
6 |         if .....
7 |             b = m
8 |         else :
9 |             a = .....
10 |    return .....
```

## Exercice 2

Dans toutes les questions où cela est nécessaire, on suppose que l'on a importé les bibliothèques `numpy` et `matplotlib.pyplot` dont les commandes seront introduites par les préfixes `np` et `plt` respectivement.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en prenant soin de justifier chacune des réponses.

- (1) Les commandes `v=np.linspace(-3,17,5)` et `v=np.arange(-3,18,5)` donnent la même réponse.
- (2) L'instruction `u=np.arange(10,2,-1)` n'a pas d'équivalent en utilisant la commande `np.linspace`.
- (3) On déclare les deux matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . L'instruction `A*J` renvoie la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ .
- (4) On déclare les mêmes matrices  $A$  et  $J$ . L'instruction `A**J` renvoie la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .
- (5) On déclare les mêmes matrices  $A$  et  $J$ . L'instruction `A==J` renvoie `False`.
- (6) Si `u=np.arange(4)`, la commande `u[4]` renvoie : 3.
- (7) La séquence

```

1 | x=2
2 | while x<5:
3 |     print(x)
```

affiche les valeurs 2, 3 et 4.

- (8) La séquence

```
1 | x=2
2 | for k in range(2):
3 |     x=x*x
```

affecte à  $x$  la valeur 16.

(9) La séquence

```
1 | x=np.arange(1,11)
2 | y=np.ones((1,10))
3 | print(np.dot(x,np.transpose(y)))
```

renvoie la valeur 55.

(10) Les commandes :

```
x=np.arange(0,5); plt.plot(x,x*np.exp(-x))
```

permettent de tracer la courbe représentant la fonction  $f : x \mapsto xe^{-x}$  sur le segment  $[0, 5]$ .

---