DS4

Correction du Devoir Surveillé

Exercice 1 (HEC 2010 Voie E)

1. (a) X_1 suit la loi géométrique de paramètre p donc X_1 admet une espérance et une variance et on a :

$$\boxed{E(X_1) = \frac{1}{p} \ \text{ et } \ V(X_1) = \frac{q}{p^2}.}$$

On a $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$[X_1 \leq k] = \bigcup_{i=1}^{k} [X_1 = i] \quad \text{donc} \quad P([X_1 \leq k]) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} [X_1 = i]\right).$$

Or, les événements $([X_1 = i])_{i \in \{1,\dots,k\}}$ sont deux à deux incompatibles donc on obtient :

$$P([X_1 \leq k]) = \sum_{i=1}^{k} P([X_1 = i]) = \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1} = p\sum_{i=1}^{k}(1-p)^{i-1} = p\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} \boxed{= 1-(1-p)^k.}$$

(b) X_1 et X_2 admettent une espérance donc par linéarité, $X_1 + X_2$ admet une espérance et on a :

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \boxed{= \frac{2}{p}.}$$

X_1 et X_2 admettent une variance donc $X_1 + X_2$ admet une variance. Comme de plus, X_1 et X_2 sont indépendantes, on a :

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = \frac{q}{p^2} + \frac{q}{p^2} \boxed{= \frac{2q}{p^2}.}$$

2. (a) On a $Z(\Omega) = \{\min(i,j), (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2\} = \mathbb{N}^*$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $[Z > k] = [X_1 > k] \cap [X_2 > k]$ donc par indépendance de X_1 et X_2, on obtient :

$$\begin{aligned} P([Z > k]) &= P([X_1 > k] \cap [X_2 > k]) = P([X_1 > k]) \times P([X_2 > k]) \\ &= (1 - P([X_1 \leq k]))(1 - P([X_2 \leq k])) = (1 - (1 - (1-p)^k))^2 \qquad \text{d'après 1.(a)} \\ &= (1-p)^{2k}. \end{aligned}$$

Comme $[Z = k] = [Z > k-1] \setminus [Z > k]$, on obtient :

$$\begin{aligned} P([Z = k]) &= P([Z > k-1]) - P([Z > k-1] \cap [Z > k]) = P([Z > k-1]) - P([Z > k]) \\ &= (1-p)^{2(k-1)} - (1-p)^{2k} = (1-p)^{2(k-1)}(1 - (1-p)^2) = (q^2)^{k-1}(1-q^2). \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{Z \text{ suit la loi géométrique de paramètre } 1-q^2}$. Par suite, Z admet une espérance et une variance et on a :

$$\boxed{E(Z) = \frac{1}{1-q^2} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{q^2}{(1-q^2)^2}.}$$

(b) $Z + T$ est la somme de la plus grande et de la plus petite valeur prise parmi X_1 et X_2. On a donc clairement $\boxed{Z + T = X_1 + X_2}$. Ainsi, on a $T = X_1 + X_2 - Z$. Comme $X_1 + X_2$ et Z admettent une espérance, par linéarité T aussi et on a :

$$E(T) = E(X_1 + X_2) - E(Z) = \frac{2}{p} - \frac{1}{1-q^2} = \frac{2}{1-q} - \frac{1}{1-q^2} = \frac{2(1+q)-1}{1-q^2} \boxed{= \frac{1+2q}{1-q^2}.}$$

(c) $[Z=k]\cup[T=k]$ est réalisé si et seulement si k est la plus petite ou la plus grande des valeurs prises par X_1 et X_2 soit si et seulement si $X_1=k$ ou $X_2=k$. D'où l'égalité des deux évènements. Notons qu'on a de même $[Z=k]\cap[T=k]=[X_1=k]\cap[X_2=k]$.

On a $P([Z=k]\cup[T=k])=P([T=k])+P([Z=k])-P([T=k]\cap[Z=k])$, donc on obtient :

$$\begin{aligned}
P([T=k]) &= P([Z=k]\cup[T=k])-P([Z=k])+P([T=k]\cap[Z=k])\\
&= P([X_1=k]\cup[X_2=k])-P([Z=k])+P([X_1=k]\cap[X_2=k])\\
&= P([X_1=k])+P([X_2=k])-P([X_1=k]\cap[X_2=k])-P([Z=k])+P([X_1=k]\cap[X_2=k])\\
&\boxed{=2P([X_1=k])-P([Z=k])} \qquad \text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont la même loi.}
\end{aligned}$$

(d) On a $T=X_1+X_2-Z$. Or, X_1+X_2 et Z admettent une variance donc T admet une variance ou de manière équivalente un moment d'ordre 2.
Par la formule d'Huygens, on a $V(T)=E(T^2)-(E(T))^2$.

- On a $T(\Omega)=\{\max(i,j),(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2\}=\mathbb{N}^*$.
- Calculons $E(T^2)$. On sait que T^2 admet un moment d'ordre deux, donc la série $\sum_{k\geq 1} k^2P([T=k])$ converge (absolument) et on a :
$$E(T^2)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P([T=k]).$$
Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a $k^2P([T=k])=2k^2P([X_1=k])-k^2P([Z=k])$. Par le théorème du transfert, comme X_1 et Z admettent un moment d'ordre 2, les séries $\sum_{k\geq 1}k^2P([X_1=k])$ et $\sum_{k\geq 1}k^2P([Z=k])$ convergent et on a :
$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P([X_1=k])=E(X_1^2)=V(X_1)+(E(X_1))^2=\frac{q}{p^2}+\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{q+1}{p^2}=\frac{1+q}{(1-q)^2},$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P([Z=k])=E(Z^2)=V(Z)+(E(Z))^2=\frac{q^2}{(1-q^2)^2}+\left(\frac{1}{1-q^2}\right)^2=\frac{1+q^2}{(1-q^2)^2}.$$
Par linéarité de la somme des séries convergentes, on obtient alors :
$$\begin{aligned}
E(T^2)&=2\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P([X_1=k])-\sum_{k=1}^{+\infty}k^2P([Z=k])=2\frac{1+q}{(1-q)^2}-\frac{1+q^2}{(1-q^2)^2}\\
&=\frac{2(1+q)(1+q)^2}{(1-q^2)^2}-\frac{1+q^2}{(1-q^2)^2}=\frac{2(1+2q+q^2+q+2q^2+q^3)-1-q^2}{(1-q^2)^2}\\
&=\frac{2q^3+5q^2+6q+1}{(1-q^2)^2}.
\end{aligned}$$
- $E(T)^2=\left(\dfrac{1+2q}{1-q^2}\right)^2$ d'après la question 2.(b).

Par la formule de Huygens, on en déduit :
$$\begin{aligned}
V(T)=E(T^2)-(E(T))^2&=\frac{2q^3+5q^2+6q+1}{(1-q^2)^2}-\left(\frac{1+2q}{1-q^2}\right)^2\\
&=\frac{2q^3+5q^2+6q+1-(1+4q+4q^2)}{(1-q^2)^2}=\frac{2q^3+q^2+2q}{(1-q^2)^2}\boxed{=\frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}.}
\end{aligned}$$

3. (a) On a $Z+T=X_1+X_2$ donc $Z+T$ a une variance et $V(Z+T)=V(X_1+X_2)\boxed{=\dfrac{2q}{p^2}}$ d'après 1.(b). Par ailleurs, comme Z et T admettent une variance, on a
$$V(Z+T)=V(Z)+V(T)+2\mathrm{Cov}(Z,T)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z,T) &= \frac{1}{2}\left(V(Z+T)-V(Z)-V(T)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2q}{p^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2} - \frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2q(1+q)^2 - q^2 - q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2q^2}{(1-q^2)^2}\right) = \frac{q^2}{(1-q^2)^2}\boxed{= V(Z).}\end{aligned}$$

Les variables aléatoires $\boxed{Z \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendantes}}$ car $\mathrm{Cov}(Z,T) \neq 0$.

(b) On a :

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\mathrm{Cov}(Z,T)}{\sqrt{V(Z)}\sqrt{V(T)}} = \frac{V(Z)}{\sqrt{V(Z)}\sqrt{V(T)}} = \sqrt{\frac{V(Z)}{V(T)}}\\ &= \sqrt{\frac{q^2}{(1-q^2)^2} \times \frac{(1-q^2)^2}{q(2q^2+q+2)}}\ \boxed{= \sqrt{\frac{q}{2q^2+q+2}}.}\end{aligned}$$

Exercice 2 (Ecricome 2009)

1. (a) On reconnaît une intégrale usuelle : pour tout $a > 0$, l'intégrale généralisée $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$ et on a $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}.}$

(b) La fonction $t \mapsto e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}$ est continue sur $[0,+\infty[$ (on notera en effet que $1+x^2e^{2t} \geq 0$ pour tout $t \in [0,+\infty[$). Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t$ est donc généralisée en $+\infty$.

Si $x = 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t$ converge d'après 1.(a) utilisée avec $a = 2 > 0$.

On considère désormais $x \neq 0$. On a :

- $1 + x^2e^{2t} \underset{t\to+\infty}{\sim} x^2e^{2t}$, soit en prenant la racine $\sqrt{1+x^2e^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{x^2e^{2t}} = |x|e^t$, ce qui donne donc $e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-2t}|x|e^t = |x|e^{-t}$;
- $|x|e^{-t} \geq 0$ pour tout $t \geq 0$;
- $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge d'après 1.(a) utilisée avec $a = 1 > 0$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} |x|e^{-t}\,\mathrm{d}t$ aussi.

Par théorème de comparaison par équivalent, l'intégrale $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

2. (a) Soit $x \in]0,+\infty[$. Soit $t \in [0,+\infty[$. Comme tous les termes des inégalités proposées sont positifs, il est équivalent de montrer que (par croissance de la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2$) :

$$(xe^t)^2 \leq 1 + x^2e^{2t} \leq \left(xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}\right)^2.$$

Or $\left(xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}\right)^2 = x^2e^{2t} + \frac{e^{-2t}}{4x^2} + 2xe^t\frac{e^{-t}}{2x} = x^2e^{2t} + \frac{e^{-2t}}{4x^2} + 1$, et on a :

$$0 \leq (xe^t)^2 = x^2e^{2t} \leq 1 + x^2e^{2t} \leq 1 + x^2e^{2t} + \underbrace{\frac{e^{-2t}}{4x^2}}_{\geq 0} = \left(xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}\right)^2.$$

D'où l'inégalité voulue $\boxed{xe^t \leq \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}.}$

(b) Soit $x > 0$. D'après la question 2.(a), on a pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$xe^t \leq \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x} \underset{e^{-2t}\geq 0}{\Rightarrow} xe^{-t} \leq e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^{-t} + \frac{e^{-3t}}{2x}.$$

D'après 1.(a) utilisée avec $a = 1$ et $a = 3$, les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} e^{-3t}\,\mathrm{d}t$ convergent et valent respectivement 1 et $\frac{1}{3}$. Par linéarité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty}\left(xe^{-t} + \frac{e^{-3t}}{2x}\right)\mathrm{d}t$ converge et vaut $x \times 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{2x} = x + \frac{1}{6x}$.
D'après 1.(b), l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut par définition $f(x)$.
Par croissance de l'intégrale (toutes les intégrales en jeu convergent), on a :

$$\int_0^{+\infty} xe^{-t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty}\left(xe^{-t} + \frac{e^{-3t}}{2x}\right)\mathrm{d}t$$

soit encore :

$$\boxed{x \leq f(x) \leq x + \frac{1}{6x}.}$$

(c) On a pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) \geq x$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. Par théorème de la limite par comparaison, on obtient donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a en multipliant les inégalités obtenues en 2.(b) par $\frac{1}{x} > 0$:

$$1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \frac{1}{6x^2}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{6x^2}\right) = 1$, le théorème de gendarmes nous assure que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ existe et vaut 1, ce qui se réécrit $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x.}$

3. (a) Soit $x > 0$, et φ la fonction définie pour tout $t \in [0, +\infty[$ par $\varphi(t) = xe^t$.
   - La fonction φ est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a $\varphi'(t) = xe^t > 0$.
   - La fonction φ est **strictement croissante** sur $[0, +\infty[$.

   Ainsi, le changement de variable $u = xe^t$ est licite.

   On a $u = xe^t$ donc $\mathrm{d}u = xe^t\mathrm{d}t$. Lorsque $t = 0$ alors $u = xe^0 = x$ et lorsque $t \to +\infty$ alors $u \to +\infty$. Par le théorème du changement de variable, l'intégrale

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} x^2\left(\frac{1}{xe^t}\right)^3\sqrt{1+x^2e^{2t}}\,xe^t\mathrm{d}t$$

   est de même nature que $\int_x^{+\infty} x^2\left(\frac{1}{u}\right)^3\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$, c'est-à-dire convergente d'après la question 1.(b), et on a l'égalité :

$$\boxed{f(x) = \int_x^{+\infty} x^2\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u = x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.}$$

(b) Posons $g : u \in]0,+\infty[\mapsto \dfrac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}$. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a par relation de Chasles :

$$f(x) = x^2 \left(\int_1^{+\infty} g(u)\,\mathrm{d}u - \int_1^x g(u)\,\mathrm{d}u \right) = x^2 (C - G(x))$$

où $C = \displaystyle\int_1^{+\infty} g(u)\,\mathrm{d}u$ est une constante et $G(x) = \displaystyle\int_1^x g(u)\,\mathrm{d}u$. Puisque g est continue sur $]0,+\infty[$, la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^x g(u)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ par le théorème fondamental de l'analyse. Et c'est l'unique primitive de g sur cet intervalle qui s'annule en 1, de sorte que $G'(x) = g(x)$ pour tout $x > 0$.

Par produit avec $x \mapsto x^2$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$ et on a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = 2x(C - G(x)) + x^2(0 - G'(x)) = \frac{2x^2(C-G(x))}{x} - x^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} \boxed{= \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.}$$

(c) Soit $x \in]0,+\infty[$ et $y \in [x,+\infty[$, et considérons l'intégrale $\displaystyle\int_x^y \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u$. On va effectuer une intégration par parties sur **le segment** $[x,y]$.

$$\begin{array}{c|ccc} + & \sqrt{1+u^2} & & \dfrac{1}{u^3} = u^{-3} \\ & & \searrow & \\ - & \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}} & \overset{\int}{\leftarrow} & -\dfrac{1}{2u^2} \end{array}$$

Les fonctions $u \mapsto \sqrt{1+u^2}$ et $u \mapsto \dfrac{1}{2u^2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x,y]$. Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_x^y \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u &= \left[-\frac{\sqrt{1+u^2}}{2u^2} \right]_x^y + \int_x^y \frac{1}{2u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\sqrt{1+y^2}}{2y^2} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \int_x^y \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u. \qquad (*) \end{aligned}$$

Étudions la limite de $(*)$ lorsque $y \to +\infty$:

- On a $\dfrac{\sqrt{1+y^2}}{2y^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{y^2}}{2y^2} = \dfrac{1}{2y}$ et $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2y} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{\sqrt{1+y^2}}{2y^2} = 0$.
- On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u$ converge donc la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_x^y \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u$ admet une limite finie lorsque y tend vers $+\infty$.

Par $(*)$, la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_x^y \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u$ admet donc également une limite finie lorsque y tend vers $+\infty$ ce qui signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u$ converge. Et on a par passage à la limite lorsque $y \to +\infty$ dans $(*)$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u$$

d'où en multipliant par $2x^2$:

$$\boxed{2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u.}$$

Montrons que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Par 3.(b) et 3.(c), on obtient que pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x^2 \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u}{x} = x\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

Et on a :

- $u \mapsto \dfrac{1}{u\sqrt{1+u^2}}$ est **continue** sur $[x,+\infty[$;
- pour tout $u \in [x,+\infty[$, $\dfrac{1}{u\sqrt{1+u^2}} \geq 0$ et $\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}} > 0$;
- L'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u$ converge.

Par stricte positivité de l'intégrale, on en déduit $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u > 0$. Comme de plus on a $x > 0$, on en déduit $f'(x) > 0$. Ainsi $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$

4. (a) Soit $x \in]0,+\infty[$ et $y \in [x,+\infty[$, et considérons cette fois l'intégrale $\displaystyle\int_x^{y} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u$. On effectue une intégration par parties sur le **segment** $[x,y]$.

$$\begin{array}{c|lcc} + & \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} = (1+u^2)^{-1/2} & & \dfrac{1}{u} \\ & & \searrow & \\ - & -\dfrac{1}{2}(2u)(1+u^2)^{-3/2} & \overset{\int}{\longleftarrow} & \ln(u) \end{array}$$

Les fonctions $u \mapsto \ln(u)$ et $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} = (1+u^2)^{-1/2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x,y]$. Par intégration par parties, on a alors :

$$\begin{aligned}\int_x^{y} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u &= \left[\frac{\ln u}{\sqrt{1+u^2}}\right]_x^y - \int_x^y \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\ln y}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int_x^y \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u. \qquad (**)\end{aligned}$$

Faisons tendre y vers $+\infty$ dans l'égalité $(**)$.

- On a $\dfrac{\ln y}{\sqrt{1+y^2}} \underset{y\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln y}{\sqrt{y^2}} = \dfrac{\ln y}{y}$ et $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$ par croissance comparées donc $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{\sqrt{1+y^2}} = 0.$;
- On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u$ converge donc la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_x^{y} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u$ admet une limite finie lorsque y tend vers $+\infty$.

Par $(**)$, la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_x^y \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ admet également une limite finie lorsque y tend vers $+\infty$, ce qui signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ converge. Et on a par passage à la limite lorsque $y \to +\infty$ dans $(**)$:

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u.}$$

Montrons enfin la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$. La fonction $u \mapsto \dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ étant continue sur $]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ est généralisée en 0 et en $+\infty$.

On vient de montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ converge. En particulier, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ converge.

En 0, on a $\displaystyle\lim_{u\to 0} u\ln u = 0$ par croissances comparées, d'où $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ est donc faussement généralisée en 0, et converge donc.

On peut donc conclure que l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u \text{ converge.}}$

(b) D'après les questions 3.(c) et 4.(a), on a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = x\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + x\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$$

et donc :

$$\frac{f'(x)}{-x\ln x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\ln x}\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u.$$

Or on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u}_{\text{constante}}$ puisque cette intégrale converge. D'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln x}\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u = 0.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{-x\ln x} = 1$, ce qui se réécrit $\boxed{f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln x.}$
D'après 3.(b), on a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$2f(x) = xf'(x) + \sqrt{1+x^2} \quad \text{donc} \quad f(x) - \frac{1}{2} = \frac{xf'(x)}{2} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{2}$$

d'où :

$$\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{-\frac{x^2\ln x}{2}} = \frac{f'(x)}{-x\ln x} + \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{-x^2\ln x}.$$

D'après ce qui précède, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{-x\ln x} = 1$. Calculons $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{-x^2\ln x}$. C'est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$, on va passer par des équivalents. On a $\sqrt{1+X}-1 \underset{X\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}X$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$, d'où :

$$\sqrt{1+x^2}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2.$$

Ainsi on a $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{-x^2\ln x} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{1}{2\ln x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2\ln x} = 0$. On obtient donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{-x^2\ln x} = 0$.

On peut donc conclure que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\frac{1}{2}}{-\frac{x^2\ln x}{2}} = 1$, ce qui se réécrit $\boxed{f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln x}{2}.}$

Problème. (EM Lyon 2018)

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes

1. (a) Soient $P, Q \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha P + \beta Q) &= \frac{1}{n}x(1-x)(\alpha P + \beta Q)' + x(\alpha P + \beta Q) \\ &= \alpha\left(\frac{1}{n}x(1-x)P' + xP\right) + \beta\left(\frac{1}{n}x(1-x)Q' + xQ\right) \\ &= \alpha\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire.}}$

(b) On a : $\varphi(x^n) = \dfrac{1}{n}x(1-x)nx^{n-1} + x \cdot x^n \boxed{= x^n.}$

(c) Notons que si $\deg Q \leq n-1$ alors $\deg\left(\dfrac{1}{n}x(1-x)Q' + xQ\right) \leq \max\left(\dfrac{1}{n}x(1-x)Q', xQ\right) \leq n$.

Soit $P \in E$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $P = \alpha x^n + Q$. On a :

$$\varphi(P) = \alpha\varphi(x^n) + \varphi(Q) = \alpha x^n + \varphi(Q).$$

On a $\deg(\varphi(P)) \leq \max(\deg(\alpha x^n), \deg(\varphi(Q))) \leq n$. Ainsi $\varphi(P) \in E$, et ceci pour tout $P \in E$. Donc $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2. On a $\varphi(1) = x$, et pour $1 \leq k < n$:

$$\begin{aligned}\varphi\left(x^k\right) &= \frac{1}{n}x(1-x)kx^{k-1} + x \times x^k \\ &= \frac{k}{n}x^k + \frac{n-k}{n}x^{k+1}\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\boxed{A = M_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \frac{1}{n} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \frac{n-2}{n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} & \frac{n}{n} \end{pmatrix}}.$$

C'est une matrice échelonnée en lignes. Le rang est donc égal au nombre de pivots, soit $\boxed{\operatorname{rg}(A) = n}$ (la matrice A étant de taille $(n+1) \times (n+1)$).

3. Comme $\operatorname{rg}(A) = n < n+1$, on a par le théorème du rang que $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = (n+1) - n = 1$. En particulier, $\operatorname{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$, et $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective.}}$

4. (a) Pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, on a :

$$P_k' = kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\varphi(P_k) &= \frac{1}{n}x(1-x)\left[kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}\right] + xx^k(1-x)^{n-k} \\ &= x^k(1-x)^{n-k}\left[\frac{k}{n}(1-x) - \frac{n-k}{n}x + x\right] \\ &= \boxed{\frac{k}{n}P_k}\end{aligned}$$

Et pour $k = 0, n$, on a $\varphi(P_0) = \varphi((1-x)^n) = (-1)^n \varphi((x-1)^n)$ $\boxed{= 0}$ et $\varphi(P_n) = \varphi(x^n)$ $\boxed{= x^n}$.

(b) Montrons que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre. Soit pour cela $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ des scalaires tels que :

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = 0. \qquad (*)$$

Montrons que $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Pour cela, commençons par noter que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme P_k admet 0 pour racine de multiplicité exactement k (puisque X^k divise P_k, et X^{k+1} ne divise pas P_k). On a donc par caractérisations de la multiplicité d'une racine à l'aide des dérivées successives que :

$$P_k(0) = P_k'(0) = \dots = P^{(k-1)}(0) = 0 \text{ et } P^{(k)}(0) = 0.$$

Évaluons $(*)$ en $X = 0$:

$$\alpha_0 \underbrace{P_0(0)}_{\neq 0} + \underbrace{\alpha_1 P_1(0) + \dots + \alpha_n P_n(0)}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = 0.$$

Ainsi, l'égalité $(*)$ devient :

$$\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = 0.$$

Dérivons cette relation, **puis** évaluons là en $X = 0$. On obtient en utilisant que 0 est racine de multiplicité exactement k de P_k que :

$$\alpha_1 \underbrace{P_1'(0)}_{\neq 0} + \alpha_2 \underbrace{P_2'(0) \dots + \alpha_n P_n'(0)}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0.$$

En répétant cette opération, on obtient de même $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Ainsi, la famille $\mathscr{B}' = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre. Comme de plus elle est de cardinal $n + 1 = \dim E$, $\boxed{\mathscr{B}' \text{ est donc une base de } E.}$

> **Autre méthode ?**
> Pour montrer la liberté de la famille $\mathscr{B}'$, on pouvait aussi utiliser un résultat du chapitre 9 : les P_i sont des vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres distinctes. Ils forment donc une famille libre.

Par les calculs effectués à la question précédente, la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}'$ est donc diagonale, égale à :

$$\boxed{M_{\mathscr{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0/n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n/n \end{pmatrix}}$$

(c) On a vu que $\mathrm{rg}(A) = n$, d'où par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n + 1 - \mathrm{rg}(A) = 1$. De plus on a vu que $\varphi(P_0) = 0$, de sorte que $P_0 \in \mathrm{Ker}(A)$. Comme $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel, on a donc $\mathrm{Vect}(P_0) \subset \mathrm{Ker}(A)$. Comme ces sous-espaces vectoriels sont de même dimension ($P_0 \neq 0_{\mathbb{R}_n[x]}$), on a donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(P_0).}$$

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

5. (a) On a $Z_2(\Omega) = \{0, 1\}$, donc Z_2 suit une loi de Bernoulli. Notons B_i la variable aléatoire prenant pour valeur le numéro de la boule tirée au i-ème tirage. Les B_i suivent une loi $\mathscr{U}(\llbracket 1, n\rrbracket)$ et sont indépendantes (car les tirages se font avec remise). De plus on a :

$$[Z_2 = 0] = \bigcup_{k=1}^{n} [B_1 = k] \cap [B_2 = k]$$

puisque l'évènement $[Z_2 = 0]$ signifie que les deux premiers tirages ont donné les mêmes numéros. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
P(Z_2 = 0) &= \sum_{k=1}^{n} P([B_1 = k] \cap [B_2 = k]) \quad \text{par incompatibilité des évènements} \\
&= \sum_{k=1}^{n} P([B_1 = k])P([B_2 = k]) \quad \text{par indépendance des évènements} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

et donc $P(Z_2 = 1) = 1 - P(Z_2 = 0) = 1 - \dfrac{1}{n}$. Ainsi $\boxed{Z_2 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } 1 - \frac{1}{n}.}$

(b) On a plusieurs cas à traiter :

- Si $j = n$, alors tous les numéros ont déjà été obtenus lors des k premiers tirages. Dans ce cas, le $(k+1)$-ème tirage ne peut pas amener un nouveau numéro, ce qui implique que :
$$P_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1]) = 0.$$
- Si $j > n$, alors l'évènement $[Y_k = j]$ est impossible (car $Y_k(\Omega) \subset \llbracket 1, n\rrbracket$ puisqu'il n'y que n boules distinctes dans l'urne). Dans ce cas, le calcul de $P_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1])$ n'a pas de sens (on ne peut conditionner par un évènement de probabilité nulle).
- Supposons à présent $j \in \llbracket 1, k\rrbracket$ et $j < n$. Si $[Y_k = j]$ est réalisé, on a obtenu j boules distinctes lors des k premiers tirages. Pour que le $(k+1)$-ème tirage donne une nouvelle boule distincte des précédentes, celle-ci doit être tirée parmi les $n - j$ boules qui ne sont pas encore apparues. Comme le tirage est uniforme, on obtient donc :
$$\boxed{P_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1]) = \frac{n-j}{n} = 1 - \frac{j}{n}}$$
Notons que cette formule est encore valable pour $j = n$. Nous l'utiliserons donc pour tout $j \in Y_k(\Omega)$.

Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements $\{[Y_k = j],\ j \in Y_k(\Omega)\}$, il vient :

$$\begin{aligned}
P(Z_{k+1} = 1) &= \sum_{j \in Y_k(\Omega)} P(Y_k = j) P_{[Y_k=j]}(Z_{k+1} = 1) \\
&= \sum_{j \in Y_k(\Omega)}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right) P(Y_k = j) \\
&= \sum_{j \in Y_k(\Omega)}^{n} P(Y_k = j) - \frac{1}{n} \sum_{j \in Y_k(\Omega)} jP(Y_k = j) \\
&\boxed{= 1 - \frac{1}{n} E(Y_k)}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Remarque. Il n'était pas demandé de calculer $Y_k(\Omega)$, et on pouvait faire sans. Déterminons son support malgré tout. Notons tout d'abord que $Y_k \leq k$ car on ne peut pas obtenir plus de k boules distinctes en k tirages, et $Y_k \leq n$ car il y a n boules distinctes dans l'urne. On a donc $1 \leq Y_k \leq \min(k,n)$. Et pour tout $j \in [\![1, \min(k,n)]\!]$, l'évènement $[Y_k = j]$ est de probabilité non nulle puisque par exemple $[B_1 = 1] \cap [B_2 = 2] \cap \cdots \cap [B_j = j] \cap [B_{j+1} = j] \cap \ldots [B_k = j] \subset [Y_k = j]$ et est de probabilité non nulle (égale à $\frac{1}{n^k}$). Donc on a $Y(\Omega) = [\![1, \min(k,n)]\!]$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Z_k compte le nombre de numéro rajouté lors du n-ème tirage (0 ou 1). Donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} Z_j$ est le nombre total de numéros distincts obtenus lors des k premiers tirages, c'est-à-dire précisément Y_k. D'où l'égalité $\boxed{Y_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} Z_j}$.

Par linéarité de l'espérance, on obtient donc :

$$P(Z_{k+1} = 1) \quad = \quad 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} E(Z_j)$$

Or Z_j suit une loi de Bernoulli, donc on a $E(Z_j) = 0P(Z_j = 0) + 1P(Z_j = 1) = P(Z_j = 1)$. En substituant dans l'égalité précédente, il suit que :

$$\boxed{P([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} P([Z_j = 1]).}$$

(d) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathscr{P}(k)$: $P([Z_k = 1]) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.

Init. Pour $k = 1$, on a $P(Z_1 = 1) = 1$ car $Z_1 = 1$, et :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} = 1.$$

D'où la propriété au rang $k = 1$.

Hér. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété $\mathscr{P}(j)$ vraie[1] pour tout $1 \leq j \leq k$.

On a :

$$P([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} P([Z_j = 1]) \overset{HR}{=} 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}$$

$$\underset{1-\frac{1}{n}\neq 1}{=} 1 - \frac{1}{n}\,\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k}}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k}$$

D'où la propriété au rang $k + 1$.

On conclut par principe de récurrence que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z_k = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}.}$$

[1] Pour démontrer la propriété au rang $k + 1$, il faut utiliser les propriétés aux rang $1, 2, \ldots, k$. On les suppose donc toutes vraies. On dit ici qu'on fait une récurrence forte, à distinguer d'une récurrence faible (la plus courante) où l'on ne suppose la propriété qu'au rang k pour passer au rang $k + 1$.

(e) Comme $P(Z_{k+1}=1)=1-\frac{1}{n}E(Y_k)$ on a donc :

$$E\left(Y_k\right)=n\left[1-P(Z_{k+1}=1)\right]\boxed{=n\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right].}$$

6. (a) On a $Y_0=0$ et $Y_1=1$, de sorte que :

$$G_0=P\left(Y_0=0\right)X^0\boxed{=1}\quad\text{et}\quad G_1=P\left(Y_1=0\right)X^0+P\left(Y_1=1\right)X\boxed{=X.}$$

D'autre part, on a $Y_2(\Omega)=\{1,2\}$ (car on peut obtenir 1 ou 2 boules distinctes lors des deux premiers tirages) et $[Y_2=2]=[Z_2=1]$ car ces deux évènements correspondent à obtenir au deuxième tirage une boule distincte du premier. Ainsi on a :

$$P(Y_2=2)=P(Z_2=1)=1-\frac{1}{n}\quad\text{et}\quad P(Y_2=1)=1-P(Y_2=2)=\frac{1}{n}.$$

Ainsi on a :

$$G_2=P\left(Y_2=0\right)x^0+P\left(Y_2=1\right)x+P\left(Y_2=2\right)x^2\boxed{=\frac{1}{n}x+\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2.}$$

(b) Soit $k\geq 1$ et $i\in[\![1,n]\!]$. On applique la formule des probabilités totales avec $\{[Y_k=j],\ j\in Y_k(\Omega)\}$ pour SCE. On obtient :

$$P(Y_{k+1}=i)=\sum_{j\in Y_k(\Omega)}P(Y_k=j)P_{[Y_k=j]}(Y_{k+1}=i).$$

Dans cette somme, on a :

- $P_{[Y_k=j]}(Y_{k+1}=i)=0$ si $j\neq i-1,i$, puisqu'en un tirage (le $(k+1)$-ème), on ne peut obtenir qu'au plus une boule distincte de toutes les précédentes.
- Si $i\in Y_k(\Omega)$, on a $P_{[Y_k=i]}(Y_{k+1}=i)=P_{[Y_k=i]}(Z_{k+1}=0)=\frac{i}{n}$ puisqu'au $k+1$-ème tirage, on a obtenu une des i boules déjà tirées.
- Pour $2\leq i\leq n$ tel que $(i-1)\in Y_k(\Omega)$, $P_{[Y_k=i-1]}(Y_{k+1}=i)=P_{[Y_k=i-1]}(Z_{k+1}=1)=\frac{n-(i-1)}{n}=1-\frac{i-1}{n}$ puisqu'au $(k+1)$-ème tirage, on a obtenu l'une des $n-(i-1)$ boules qui n'ont pas encore été tirées.

On obtient en substituant dan la formule des probabilités totales :

$$P(Y_{k+1}=i)=\frac{i}{n}P(Y_k=i)+\left(1-\frac{i-1}{n}\right)P(Y_k=i-1).$$

On vérifie que cette formule est encore valable pour $i=0,1$, et pour $k=0$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
G_{k+1} &= \sum_{i=0}^{n} P(Y_{k+1}=i)x^i = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}P(Y_k=i) + \left(1-\frac{i-1}{n}\right)P(Y_k=i-1)\right)x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} P(Y_{k+1}=i)x^i = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}P(Y_k=i) + \left(1-\frac{i-1}{n}\right)P(Y_k=i-1)\right)x^i \\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}P(Y_k=i)x^i + \sum_{i=0}^{n}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)P(Y_k=i-1)x^i \\
&= x\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}P(Y_k=i)x^{i-1} + \sum_{i=1}^{n+1}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)P(Y_k=i-1)x^i \\
&= \frac{x}{n}G_k' + \sum_{i=0}^{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)P(Y_k=i)x^{i+1} \\
&= \frac{x}{n}G_k' + \sum_{i=0}^{n}P(Y_k=i)x^{i+1} - \sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}P(Y_k=i)x^{i+1} \\
&= \frac{x}{n}G_k' + xG_k - \frac{x^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}P(Y_k=i)x^{i-1} \\
&= \frac{x}{n}G_k' + xG_k - \frac{x^2}{n}G_k' \boxed{= \frac{1}{n}x(1-x)G_k' + xG_k}
\end{aligned}$$

D'où l'égalité voulue.

(d) On a montré que $G_{k+1} = \varphi\left(G_k\right)$ pour tout entier k à la question précédente.

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $G_k = \varphi^k(G_0)$.

Init. On a bien $\varphi^0(G_0) = \mathrm{Id}(G_0) = G_0$ d'où la propriété au rang $k=0$.

Hér. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie[2] au rang k. On a :

$$G_{k+1} = \varphi(G_k) \overset{HR}{=} \varphi\left(\varphi^k(G_0)\right) = \varphi^{k+1}(G_0).$$

D'où la propriété au rang $k+1$.

Par principe de récurrence, on a donc $\boxed{G_k = \varphi^k(G_0) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.}$

7. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$G_k\left(1\right) = \sum_{j=0}^{n} P\left(Y_k=j\right) \boxed{=1.}$$

D'autre part, on a $G_k'(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} jP\left(Y_k=j\right)x^{j-1}$ donc :

$$G_k'\left(1\right) = \sum_{j=1}^{n} iP\left(Y_k=j\right) \boxed{=E\left(Y_k\right).}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. En dérivant la relation $G_{k+1} = \dfrac{1}{n}x(1-x)G_k' + xG_k$, on obtient :

$$G_{k+1}' \quad = \quad \frac{1}{n}(1-x)G_k' - \frac{1}{n}xG_k' + \frac{1}{n}x(1-x)G_k'' + G_k + xG_k'$$

Et donc :

$$G_{k+1}'\left(1\right) = -\frac{1}{n}G_k'\left(1\right) + G_k\left(1\right) + G_k'\left(1\right)$$

ce qui s'écrit encore (avec la question précédente) :

$$\boxed{\mathrm{E}\left(Y_{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\mathrm{E}\left(Y_k\right) + 1.}$$

[2] On fait ici une récurrence faible.

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $u_k = \mathrm{E}(Y_k)$. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) u_k + 1 \tag{1}$$

avec $u_0 = E(Y_0) = E(0) = 1$. (u_k) est une suite arithmético-géométrique. Pour l'étude d'une telle suite, on commence par chercher le point fixe λ :

$$\lambda = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \lambda + 1 \tag{2}$$

En résolvant (2), on obtient $\lambda = n$. En faisant (1) – (2), on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (u_{k+1} - \lambda) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(u_k - \lambda).$$

La suite $(u_k - \lambda)$ est donc géométrique de raison $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k - \lambda = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k (u_0 - \lambda)$$

d'où

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k (0 - n) + n = n\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right].}$$

8. (a) On a par la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} = (x + 1 - x)^n \boxed{= 1.}$$

(b) Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on a toujours par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} x^i &= \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k x^{k+j} = x^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-x)^k 1^{n-j-k} \\ &= x^j (1-x)^{n-j} \boxed{= P_j.} \end{aligned}$$

(c) D'après la question 9.(a), on a $G_0 = 1 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j$. Par linéarité de φ^k, on obtient :

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varphi^k(P_j)$$

Or, P_j est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\frac{j}{n}$, donc $\varphi^k(P_j) = \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j$. On obtient donc :

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j = \sum_{j=0}^{n} \left[\binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} x^i\right]$$

On a une somme double sur un triangle avec $0 \leq j \leq n$ et $j \leq i \leq n$. En permutant, on somme sur $0 \leq i \leq n$ (qui est bien l'intervalle d'entiers parcouru par i), et à i fixé, on somme sur $0 \leq j \leq i$. On obtient donc :

$$\boxed{\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j}\right] x^i}$$

(d) Pour tout k de $\mathbb{N}$, on a donc :

$$G_k = \varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j}$$

et par définition :

$$G_k = \sum_{i=0}^{n} P\left(Y_k = i\right) x^i$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$P\left(Y_k = i\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j}$$

Comme enfin, on a :

$$\begin{aligned} \binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} &= \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(i-j)!\,(n-i)!} = \frac{n!}{j!}\frac{1}{(i-j)!\,(n-i)!} \\ &= \frac{i!}{j!\,(i-j)!}\frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \binom{n}{i}\binom{i}{j} \end{aligned}$$

avec $\binom{n}{i}$ constant par rapport à j, on obtient donc :

$$\boxed{P([Y_k = i]) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.}$$

Remarque. Notons que de manière surprenante et contre-intuitive, cette somme est nulle lorsque $i > k$ puisque $P([Y_k = i]) = 0$ dans ce cas (car $Y_k \leq k$).