DS4

Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (Edhec 2016)

1. (a) Calculons :

$$(f-\mathrm{Id})^2 + f\circ(2\mathrm{Id}-f) = f^2 - 2f + \mathrm{Id} + 2f - f^2 \boxed{= \mathrm{Id}}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{x = (f-\mathrm{Id})^2(x) + (f\circ(2\mathrm{Id}-f))(x).}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$f((f-\mathrm{Id})^2(x)) = \underbrace{f\circ(f-\mathrm{Id})^2}_{=0_{\mathscr{L}(E)}}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

par hypothèse. Donc $(f-\mathrm{Id})^2(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.

D'autre part :

$$(f\circ(2\mathrm{Id}-f))(x) = f((2\mathrm{Id}-f)(x)) \in \mathrm{Im}(f).$$

D'après la question précédente, il suit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x = \underbrace{(f-\mathrm{Id})^2(x)}_{\in \mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{(f\circ(2\mathrm{Id}-f))(x)}_{\in \mathrm{Im}(f)} \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f).$$

Donc $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Comme de plus $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$ par le théorème du rang, on peut conclure que :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).}$$

2. (a) Posons $P = ax + b \in \mathbb{R}[x]$. On substitue dans l'expression :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}(x-1)(x-4) + xP(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2-5x+4) + ax^2 + bx = 1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} + a = 0 & \text{terme en } x^2 \\ -\frac{5}{4} + b = 0 & \text{terme en } x \\ 1 = 1 & \text{terme constant} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{5}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi le polynôme P recherché existe bien et vaut $\boxed{P = \frac{5-x}{4}}$.

(b) On obtient que :

$$\frac{1}{4}(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id}) + f\circ P(f) = \mathrm{Id}.$$

Ainsi, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$:

$$v = \frac{1}{4}(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})(v) + f\circ P(f)(v)$$

Remarquons que :

- $f\circ P(f)(v) = f\left(P(f)(v)\right)$ appartient à $\mathrm{Im}(f)$;

- $f((f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})(v)) = \underbrace{f\circ(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})}_{=0_{\mathscr{L}(E)}}(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$, donc $\frac{1}{4}(f-\mathrm{Id})\circ(f-4\mathrm{Id})(v)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.

De même que précédemment, il suit donc que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Comme de plus $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$ par le théorème du rang, on conclut que :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).}$$

3. (a) P étant de degré p, il existe $a_0, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p.$$

Et par hypothèse, $0 = P(0) = a_0$ et $a_1 = P'(0) \neq 0$. D'où le résultat.

(b) Soit $y \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Puisque $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$. Et comme y appartient à $\mathrm{Ker}(f)$:

$$0_{\mathbb{R}^n} = f(y) = f^2(x)$$

Dès lors, pour tout $k \geq 2$, $f^k(x) = f^{k-2}(f^2(x)) = f^{k-2}(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Puisque P est annulateur par hypothèse :

$$a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_p f^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}.$$

On évalue en x :

$$a_1 f(x) + \underbrace{a_2 f^2(x) + \cdots + a_p f^p(x)}_{=0_{\mathbb{R}^n}} = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Et donc on a $a_1 y = 0_{\mathbb{R}^n}$. Puisqu'enfin $a_1 \neq 0$, on en déduit que $y = 0_{\mathbb{R}^n}$. On peut donc conclure que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \{0\}$. L'autre inclusion étant immédiate puisque $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel, on obtient finalement $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}}$.

Enfin, $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$ par le théorème du rang. On obtient donc :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).}$$

(c) Cette question généralise les deux précédentes car :

- Dans la question 1., le polynôme annulateur est $P = x(x-1)^2$.
- Dans la question 2., le polynôme annulateur est $P = x(x-1)(x-4)$.

Dans les deux cas, P satisfait $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. On est donc bien dans la situation de la question 3. En particulier, le résultat de la question 3. implique les résultats des questions 1. et 2.

Exercice 2 (ESCP 2001 Voie E)

1. Tout d'abord, il n'est pas possible de tirer la deuxième boule noire avant la première. Donc si $j \leq i$, on obtient $P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = 0$.

Supposons $1 \leq i < j \leq N$.

Première méthode.

Il y a $\binom{N}{2}$ manières de choisir les numéros des tirages donnant des boules noires. Tous les tirages étant équiprobables, et un seul d'entre eux réalisant l'évènement $[X_1 = i] \cap [X_2 = j]$ (le tirage pour lequel les boules noires sont sorties en i-ème et en j-ème position), on en déduit que :

$$P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \frac{1}{\binom{N}{2}} = \frac{2}{N(N-1)}.$$

Deuxième méthode.

Notons B_k (resp. N_k) l'évènement « obtenir une boule blanche (resp. noire) au k-ième tirage ».

On peut écrire $[X_1 = i] \cap [X_2 = j] = B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1} \cap N_i \cap B_{i+1} \cap \cdots \cap B_{j-1} \cap N_j$.

Par la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\begin{aligned} P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) \dots P_{B_1\cap\cdots\cap B_{i-1}}(N_i) \dots P_{B_1\cap\cdots\cap B_{j-1}}(N_j) \\ &= \frac{N-2}{N}\frac{N-3}{N-1}\frac{N-4}{N-2}\cdots\frac{N-i}{N-i+2}\frac{2}{N-i+1}\frac{N-i+1}{N-i}\cdots\frac{N-i-j+1}{N-i-j+2}\frac{1}{N-i-j+1} \\ &= \frac{2}{N(N-1)} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2, \quad P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq N, \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leq i < j \leq N. \end{cases}}$$

2. Notons tout d'abord que $\boxed{X_1(\Omega) = [\![1, N-1]\!] \text{ et que } X_2(\Omega) = [\![2, N]\!].}$

   On détermine les lois marginales. D'après la formule des probabilités totales appliquée au SCE $([X_2 = j])_j$, on a pour tout $1 \leq i \leq N-1$:

$$P(X_1 = i) = \sum_{j=2}^{N} P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \sum_{j=i+1}^{N} P([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$$

   les termes pour $j \leq i$ étant nuls. D'où :

$$P(X_1 = i) = \sum_{j=i+1}^{N} \frac{2}{N(N-1)} \boxed{= \frac{2(N-i)}{N(N-1)}.}$$

   De même, la formule des probabilités totales appliquée au SCE $([X_1 = i])_i$ donne, pour tout $2 \leq j \leq N$,

$$P(X_2 = j) = \sum_{j=1}^{N-1} P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{N(N-1)} \boxed{= \frac{2(j-1)}{N(N-1)}.}$$

   Les deux variables ne sont pas indépendantes car on a par exemple $P([X_1 = 3]) \neq 0$, $P([X_2 = 2]) \neq 0$, mais $P([X_1 = 3] \cap [X_2 = 2]) = 0$.

3. (a) Notons tout d'abord que $Y = N + 1 - X_2$ est à valeurs dans $[\![1, N-1]\!]$.

   Pour tout $j \in [\![1, N-1]\!]$:

$$P(Y = j) = P(X_2 = N + 1 - j) = \frac{2(N + 1 - j - 1)}{N(N-1)} = \frac{2(N-j)}{N(N-1)} = P(X_1 = j).$$

   Ainsi $\boxed{\text{les variables } Y = N + 1 - X_2 \text{ et } X_1 \text{ suivent bien les mêmes lois.}}$

   (b) $Z = X_2 - X_1$ est à valeurs dans $[\![1, N-1]\!]$ puisque $1 \leq X_1 < X_2 \leq N$.

   Pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, on obtient par la formule des probabilités totales appliquée au SCE $([X_1 = i])$:

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=1}^{N-1} P([X_2 - X_1 = k] \cap [X_1 = i]) = \sum_{i=1}^{N-1} P([X_1 = i] \cap [X_2 = k + i]) \\ &= \sum_{i=1}^{N-k} P([X_1 = i] \cap [X_2 = k + i]) \end{aligned}$$

En effet, si $i > N-k$, alors $k+i \geq N+1$ et $[X_2 = k+i]$ est impossible. Poursuivons :

$$P(Z=k) = \sum_{i=1}^{N-k} \frac{2}{N(N-1)} \boxed{= \frac{2(N-k)}{N(N-1)}.}$$

On retrouve la loi de X_1. $\boxed{Z = X_2 - X_1 \text{ et } X_1 \text{ suivent donc les mêmes lois.}}$

4. (a) Tout d'abord, notons que $E(X_1)$ et $E(X_2)$ existent bien car ce sont des variables aléatoires finies. Puisque $X_2 - X_1$ et X_1 ont même loi, et que $N+1-X_2$ et X_1 ont même loi :

$$\begin{cases} E(X_2 - X_1) = E(X_1) \\ E(N+1-X_2) = E(X_1) \end{cases}.$$

Par linéarité de l'espérance, il suit :

$$\begin{cases} E(X_2) - E(X_1) = E(X_1) \\ N+1-E(X_2) = E(X_1) \end{cases}$$

Résolvons ce système :

$$\begin{cases} E(X_2) - E(X_1) = E(X_1) \\ N+1-E(X_2) = E(X_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(X_2) = 2E(X_1) \\ N+1 = 3E(X_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(X_2) = 2\dfrac{N+1}{3} \\ E(X_1) = \dfrac{N+1}{3} \end{cases}$$

Autre méthode. Si on ne pensait pas à exploiter les résultats de la question 3. (même si l'énoncé le suggérait), on pouvait aussi faire un calcul direct (mais c'était plus long). Faisons le par exemple pour $E(X_1)$:

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \sum_{i=1}^{N-1} iP([X_1 = i]) = \sum_{i=1}^{N-1} i\frac{2(N-i)}{N(N-1)} = \frac{2}{N-1}\sum_{i=1}^{N-1} i - \frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N-1} i^2 \\ &= \frac{2}{N-1}\frac{N(N-1)}{2} - \frac{2}{N(N-1)}\frac{(N-1)N(2N-1)}{6} = N - \frac{2N-1}{3} \boxed{= \frac{N+1}{3}.} \end{aligned}$$

(b) De même $V(X_1)$ et $V(X_2)$ existent bien car les variables sont finies. Puisque $N+1-X_2$ et X_1 ont même loi :

$$V(X_1) = V(N+1-X_2) \overset{(*)}{=} (-1)^2 V(X_2) \boxed{= V(X_2).}$$

Rappel. Calcul de la variance.

Rappelons que si X est une variable aléatoire admettant une variance et si $a, b \in \mathbb{R}$, alors $aX+b$ admet une variance, et :

$$V(aX+b) = a^2V(X). \qquad (*)$$

(c) $X_2 - X_1$ ayant même loi que X_1, il suit que $V(X_2 - X_1) = V(X_1)$. De plus :

$$\begin{aligned} V(X_2 - X_1) &= \mathrm{Cov}(X_2 - X_1, X_2 - X_1) \\ &= \mathrm{Cov}(X_2, X_2 - X_1) - \mathrm{Cov}(X_1, X_2 - X_1) \quad \text{par lin. à gauche} \\ &= \mathrm{Cov}(X_2, X_2) - \mathrm{Cov}(X_2, X_1) - \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{Cov}(X_1, X_1) \quad \text{par lin. à droite} \\ &= V(X_2) - 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + V(X_1) \quad \text{par symétrie} \end{aligned}$$

Ainsi, $V(X_1) = V(X_1) - 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + V(X_1)$, ce qui donne $\boxed{V(X_1) = 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2).}$

(d) Par définition :

$$\rho_{X_1,X_2} = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(X_2)}} = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{V(X_1)} \boxed{= \frac{1}{2}.}$$

Puisque $\rho_{X_1,X_2} \neq 0$, on retrouve tout d'abord que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes. De plus, ρ_{X_1,X_2} étant strictement positif, on peut affirmer que $\boxed{\text{lorsque } X_1 \text{ augmente, } X_2 \text{ a tendance à augmenter.}}$ On pouvait s'y attendre, car plus X_1 est grand, plus X_2 l'est aussi puisque $X_2 > X_1$.

Problème (Ecricome 2012)

Partie I : Étude de deux endomorphismes

1. On vérifie les deux points suivants :

   - $\forall P \in \mathbb{R}_n[x]$, $g(P) \in \mathbb{R}_n[x]$: prenons pour cela P dans $\mathbb{R}_n[x]$. Alors :

     $$\deg((x-1)P') = 1 + \deg(P') \leq 1 + n - 1 = n \quad \text{et} \quad \deg(P) \leq n.$$

     Par somme, $g(P)$ est un polynôme de degré $\leq \max(\deg((x-1)P'), \deg(P)) \leq n$. Ainsi, g définit une application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$.

   - Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[x]$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

     $$\begin{aligned} g(\alpha P + \beta Q) &= (x-1)(\alpha P + \beta Q)' + (\alpha P + \beta Q) \\ &= (x-1)(\alpha P' + \beta Q') + \alpha P + \beta Q \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \alpha((x-1)P' + P) + \beta\left((x-1)Q' + Q\right) = \alpha g(P) + \beta g(Q). \end{aligned}$$

     Donc g est linéaire.

   Par suite, $\boxed{g \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x]}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

   $$f(g(P))(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x g(P)(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}\int_1^x (t-1)P'(t) + P(t)\,\mathrm{d}t.$$

   On reconnait ici la dérivée d'un produit, d'où :

   $$f(g(P))(x) = \frac{1}{x-1}\left[(t-1)P(t)\right]_1^x = \frac{1}{x-1}((x-1)P(x) - 0) = P(x).$$

   D'autre part, $f(g(P))(1) = g(P)(1) = (1-1)P'(1) + P(1) = P(1)$.

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(g(P))(x) = P(x)$, soit encore $\boxed{f(g(P)) = P.}$

   Soit à présent P dans $\mathrm{Ker}(g)$. Alors $g(P) = 0_{\mathbb{R}_n[x]}$, et en composant par f : $f(g(P)) = f(0_{\mathbb{R}_n[x]})$.

   Calculons $f(0_{\mathbb{R}_n[x]})$: pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(0_{\mathbb{R}_n[x]})(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x 0\,\mathrm{d}t = 0$ et $f(0_{\mathbb{R}_n[x]})(1) = 0$.

   Par suite, $P = f(g(P)) = 0_{\mathbb{R}_n[x]}$, et donc $\boxed{\mathrm{Ker}(g) = \{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}}$.

3. Comme $\mathrm{Ker}(g) = \{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}$, l'application linéaire g est injective, et donc bijective puisque c'est un endomorphisme de l'espace $\mathbb{R}_n[x]$ qui est de **dimension finie**. Ainsi $\boxed{g \text{ est un isomorphisme}}$ (ou automorphisme) de $\mathbb{R}_n[x]$.

   Comme g est un automorphisme, elle admet une bijection réciproque g^{-1}, et pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$:
$$f(P) = f\left(g(g^{-1}(P))\right) = g^{-1}(P).$$
   Par suite, $\boxed{g^{-1} = f}$. Et comme g^{-1} est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ puisque c'est l'application réciproque de g linéaire, $\boxed{f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x]}$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculons pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:
$$f(e_k)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x t^k \mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}\left[\frac{1}{k+1}t^{k+1}\right]_1^x = \frac{1}{x-1}\frac{1}{k+1}(x^{k+1}-1).$$
   Afin de simplifier cette expression, rappelons une formule à connaitre.

   > **Rappel. Une formule à retenir.**
   > Pour tous a, b réels et $n \in \mathbb{N}$:
   > $$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right) = (a-b)\left(a^n b^0 + a^{n-1}b^1 + \cdots + a^1 b^n + a^0 b^n\right).$$

   On obtient ici grâce à cette formule :
$$f(e_k)(x) = \frac{1}{k+1}\frac{x^{k+1}-1}{x-1} = \frac{1}{k+1}(1 + x + x^2 + \cdots + x^k).$$
   De plus, $f(e_k)(1) = 1^k = 1 = \dfrac{1}{k+1}(1 + 1 + 1^2 + \cdots + 1^k)$. Ainsi,
$$f(e_k) = \frac{1}{k+1}(e_0 + e_1 + e_2 + \cdots + e_k).$$
   Écrivons la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$:
$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & 0 & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & (0) & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}}.$$
   Calculons $g(e_0) = e_0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g(e_k) = (x-1)kx^{k-1} + x^k = (k+1)x^k - kx^{k-1} = ke_{k-1}$. D'où la matrice B de g dans la base $\mathscr{B}$:
$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & (0) & \vdots \\ \vdots & 0 & 3 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & n & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}}.$$

5. La famille $(u_0, u_1, \dots, u_n)$ est libre en tant que famille de vecteurs de $\mathbb{R}_n[x]$ échelonnée en degré. Elle est de plus de cardinal $n+1$ égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$. $\boxed{\mathscr{C} \text{ est donc une base de } \mathbb{R}_n[x].}$

6. Soit $r \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculons :

   - si $x \neq 1$,

$$f(u_r)(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x (t-1)^r \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x-1}\left[\frac{(t-1)^{r+1}}{r+1}\right]_1^x = \frac{1}{x-1}\left[\frac{(x-1)^{r+1}}{r+1}\right] = \frac{u_r(x)}{r+1}$$

   - si $x = 1$,

$$f(u_r)(1) = u_r(1) = \begin{cases} 1 \text{ si } r = 0 \\ 0 \text{ si } r \neq 0 \end{cases} = \frac{u_r(1)}{r+1}.$$

   Ainsi $\boxed{f(u_r) = \frac{u_r}{r+1} \text{ pour tout } r \in \{0, 1, \dots, n\}}$, et la matrice A' de f dans la base $\mathscr{C}$ est :

$$\boxed{A' = M_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.}$$

   Puisque $g = f^{-1}$, il suit que :

$$\boxed{B' = (A')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n+1 \end{pmatrix}.}$$

7. Pour tout $s \in \{0, 1, \dots, n\}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$e_s(x) = x^s = ((x-1)+1)^s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} (x-1)^r 1^{s-r}$$

   en appliquant la formule du binôme de Newton. On obtient donc $\boxed{e_s = \sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r}$. De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$u_r(x) = (x-1)^n = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} x^j.$$

   D'où, pour tout $r \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\boxed{u_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j}$.

8. On peut compléter la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ à l'aide des calculs précédents :

$$\boxed{P = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \dots & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \dots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}}$$

De même, comme $e_s = \displaystyle\sum_{r=0}^{s} \binom{s}{r} u_r$ pour tout $s \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on obtient :

$$\boxed{Q = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}}$$

Notons en passant que $Q = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}^{-1} = P^{-1}$.

9. A' étant une matrice diagonale, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{(A')^k = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{1}\right)^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{1}{n+1}\right)^k \end{pmatrix}}.$$

Par formule de changement de bases :

$$A' = P^{-1}AP, \quad \text{d'où} \quad A = PA'P^{-1} = PA'Q.$$

D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = P(A')^k Q.$$

Calculons :

$$A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P(A')^k Q \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P(A')^k \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \frac{\binom{n}{0}}{1^k} \\ \frac{\binom{n}{1}}{2^k} \\ \vdots \\ \frac{\binom{n}{n}}{(n+1)^k} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{r}{0}\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\binom{r}{1}\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \\ \vdots \\ \frac{\binom{n}{n}\binom{n}{n}}{(n+1)^k} \end{pmatrix}}.$$

Et puisque $M_{\mathscr{B}}(f^k(e_n)) = A^k \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{r}{0}\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\binom{r}{1}\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \\ \vdots \\ \frac{\binom{n}{n}\binom{n}{n}}{(n+1)^k} \end{pmatrix}$, il suit :

$$f^k(e_n) = \left(\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{r}{0}\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \right) e_0 + \left(\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \frac{\binom{r}{1}\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \right) e_1 + \cdots + \left(\frac{\binom{n}{n}\binom{n}{n}}{(n+1)^k} \right) e_n$$

$$\boxed{= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{r}{j}\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \right) e_j}$$

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

10. Notons que $\boxed{Z_0(\Omega) = \{n\}}$ car Z_0 est une variable aléatoire constante. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{Z_k(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}}$ puisque :

    - $Z_k(\Omega) \subset \{0, 1, \ldots, n\}$ car les numéros tirés sont compris entre 0 et n,
    - toutes ces valeurs $j = 0, 1, \ldots, n$ peuvent bien être prises par Z_k, l'évènement $[Z_k = j]$ étant réalisé par exemple si on tire $n - 1$ fois la boule n (toujours dans l'urne U_n donc) et 1 fois la boule j (dans l'urne U_n encore)

    Z_1 correspond au numéro de la boule tirée lors du premier tirage. Or, ce tirage se fait de manière équiprobable dans l'urne U_n qui contient $n + 1$ boules numérotées de 0 à n. Ainsi $\boxed{Z_1 \text{ suit une loi } \mathscr{U}([\![0, n]\!])}$. En particulier :

$$\boxed{F_1 = \sum_{r=0}^{n} \frac{x^r}{n+1}.}$$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{0, \ldots, n\}$. On applique la formule des probabilités totales à l'évènement $[Z_{k+1} = r]$ avec pour système complet d'évènements $([Z_k = i])_{i=0,\ldots,n}$:

$$P([Z_{k+1} = r]) = \sum_{i=0}^{n} P([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = r]).$$

Soit $0 \leq i \leq n$, et supposons $P([Z_k = i]) \neq 0$. Par la formule des probabilités composées :

$$P([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = r]) = P([Z_k = i]) P_{[Z_k = i]}([Z_{k+1} = r]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < r, \\ \dfrac{P([Z_k = i])}{i+1} & \text{si } r \leq i \leq n. \end{cases}$$

Expliquons cette dernière égalité. Supposons $[Z_k = i]$ réalisé. Le tirage $k + 1$ s'effectue alors dans l'urne U_i.

- Si $i < r$: l'évènement $[Z_{k+1} = r]$ ne peut se réaliser car il n'y a pas de boule r dans l'urne U_i. Donc $P_{[Z_k = i]}([Z_{k+1} = r]) = 0$ dans ce cas.
- Si $i \geq r$: dans ce cas il y a bien une boule numérotée r dans l'urne U_i, et la probabilité de l'obtenir est $\dfrac{1}{i+1}$ (cas équiprobable). Ainsi $P_{[Z_k = i]}([Z_{k+1} = r]) = \dfrac{1}{i+1}$.

Notons que cette formule est encore valable si $P([Z_k = i]) = 0$, puisque dans ce cas $P([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = r]) = 0$ (car $0 \leq P([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = r]) \leq P([Z_k = i]) = 0$). Ainsi,

$$P([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = r]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < r, \\ \dfrac{P([Z_k = i])}{i+1} & \text{si } r \leq i \leq n. \end{cases}$$

On obtient finalement que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$\boxed{P([Z_{k+1} = r]) = \sum_{i=0}^{n} P([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = r]) = \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}.}$$

Notons que cette formule est encore valable lorsque $k = 0$ puisque :

$$P(Z_1 = r) = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_0 = i)}{i+1} = \frac{P(Z_0 = n)}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

12. Pour établir ($\mathscr{R}_1$), on prend $r = n$ dans l'égalité précédente :

$$P([Z_{k+1} = n]) = \sum_{i=n}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1} = \frac{P(Z_k = n)}{n+1}.$$

D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{(\mathscr{R}_1) : \quad (n+1)P([Z_{k+1} = n]) = P([Z_k = n]).}$$

Prouvons maintenant la deuxième relation. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Alors :

$$\begin{aligned}(r+1)P(Z_{k+1} = r) - (r+1)P(Z_{k+1} = r+1) &= (r+1)\left(\sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1} - \sum_{i=r+1}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}\right) \\ &\boxed{= (r+1)\frac{P(Z_k = r)}{r+1} = P(Z_r = r)}\end{aligned}$$

D'où la relation ($\mathscr{R}_2$).

13. On somme la relation ($\mathscr{R}_1$) pour tous les entiers $k \in \mathbb{N}$. On obtient (tout converge par hypothèse) :

$$(n+1)\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = n) = S_n.$$

Ainsi :

$$S_n = (n+1)\sum_{j=1}^{+\infty} P(Z_j = n) = (n+1)(S_n - P(Z_0 = n)) = (n+1)(S_n - 1).$$

On en tire $\boxed{S_n = \dfrac{n+1}{n}.}$

On suppose $n \geq 2$ dans la suite (pour pouvoir considérer S_{n-1}). On somme à présent les relations ($\mathscr{R}_2$) pour tous les entiers $k \in \mathbb{N}$ (tout converge par hypothèse) :

$$(r+1)\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = r) - (r+1)\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_{k+1} = r+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r).$$

On obtient :

$$(r+1)\left[S_r - (P(Z_0 = r)\right] - (r+1)\left[S_{r+1} - P(Z_0 = r+1)\right] = S_r. \tag{$*$}$$

Cette relation étant valable pour tout $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on obtient pour $r = n-1$:

$$n\left[S_{n-1} - P(Z_0 = n-1)\right] - n\left[S_n - P(Z_0 = n)\right] = S_{n-1}$$

Et puisque $P(Z_0 = n-1) = 0$ et $P(Z_0 = n) = 1$ (car $Z_0 = n$), on obtient :

$$nS_{n-1} - n(S_n - 1) = S_{n-1} \quad \Rightarrow \quad S_{n-1} = \frac{n}{n-1}(S_n - 1).$$

Puisque $S_n = \dfrac{n+1}{n}$, on en déduit $\boxed{S_{n-1} = \dfrac{n}{n-1}\left(\dfrac{n+1}{n} - 1\right) = \dfrac{1}{n-1}.}$

Montrons enfin que la suite $(rS_r)_{1 \leq r \leq n-1}$ est constante. On reprend la relation ($*$) valable pour tout $r \in \{0, \ldots, n-1\}$. Pour $1 \leq r \leq n-2$, cette relation devient (puisqu'alors $P(Z_0 = r) = P(Z_0 = r+1) = 0$ car $Z_0 = n$) :

$$(r+1)S_r - (r+1)S_{r+1} = S_r, \quad \text{soit encore} \quad rS_r = (r+1)S_{r+1}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (rS_r)_{1\leq r\leq n-1} \text{ est constante.}}$

Remarque. Ce n'était pas demandé, mais on obtient pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$:

$$rS_r = (n-1)S_{n-1} = 1, \quad \text{soit} \quad S_r = \frac{1}{r}.$$

14. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) &= (x-1)\sum_{r=1}^{n} rP(Z_{k+1}=r)x^{r-1} + \sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1}=r)x^r \\
&= \sum_{r=1}^{n} rP(Z_{k+1}=r)x^{r} - \sum_{r=1}^{n} rP(Z_{k+1}=r)x^{r-1} + \sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1}=r)x^r \\
&= \sum_{r=0}^{n} rP(Z_{k+1}=r)x^{r} - \sum_{r=0}^{n-1} (r+1)P(Z_{k+1}=r+1)x^{r} + \sum_{r=0}^{n} P(Z_{k+1}=r)x^r \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \left[rP(Z_{k+1}=r)x^{r} - (r+1)P(Z_{k+1}=r+1)x^{r} + P(Z_{k+1}=r)x^r\right] \\
&\quad + nP(Z_{k+1}=n)x^n + P(Z_{k+1}=n)x^n \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \left[(r+1)P(Z_{k+1}=r)x^{r} - (r+1)P(Z_{k+1}=r+1)\right]x^r \\
&\quad + (n+1)P(Z_{k+1}=n)x^n \\
&\underbrace{=}_{(\mathscr{R}_1) \text{ et } (\mathscr{R}_2)} \sum_{r=0}^{n-1} P(Z_k=r)x^r + P(Z_k=n)x^n = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k=r)x^r = F_k(x)
\end{aligned}$$

On obtient bien la relation suivante, valable pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{(\mathcal{S}) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).}$$

15. (a) Notons tout d'abord que les variables aléatoires Z_k et $Z_k(Z_k-1)$ sont finies, donc elles possèdent bien une espérance.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction F_k est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en tant que polynôme. On peut donc la dériver deux fois. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'_k(x) = \sum_{r=1}^{n} rP(Z_k=r)x^{r-1}, \quad F''_k(x) = \sum_{r=2}^{n} r(r-1)P(Z_k=r)x^{r-2}.$$

Prenons $x=1$ dans ces deux expressions :

$$F'_k(1) = \sum_{r=1}^{n} rP(Z_k=r) = \sum_{r=0}^{n} rP(Z_k=r), \quad F''_k(x) = \sum_{r=2}^{n} r(r-1)P(Z_k=r) = \sum_{r=0}^{n} r(r-1)P(Z_k=r).$$

On obtient par le théorème de transfert :

$$\boxed{E(Z_k) = F'_k(1)} \text{ et } \boxed{E(Z_k(Z_k-1)) = F''_k(1)}.$$

(b) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dispose des relations suivantes :

$$(\mathscr{S}) \quad (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x),$$

$$(\mathscr{S}') \quad (x-1)F''_{k+1}(x) + 2F'_{k+1}(x) = F'_k(x),$$

$$(\mathscr{S}'') \quad (x-1)F'''_{k+1}(x) + 3F''_{k+1}(x) = F''_k(x),$$

où les relations $(\mathscr{S}')$ et $(\mathscr{S}'')$ sont obtenues en dérivant $(\mathscr{S})$. Prenons alors $x = 1$ dans ces relations :

$$\begin{aligned}(\mathscr{S}') &\quad\Rightarrow\quad 2F'_{k+1}(1) = F'_k(1),\\ (\mathscr{S}'') &\quad\Rightarrow\quad 3F''_{k+1}(1) = F''_k(1).\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{F'_{k+1}(1) = \frac{1}{2}F'_k(1)}$ et $\boxed{F''_{k+1}(1) = \frac{1}{3}F''_k(1)}$.

(c) Ce sont des suites géométriques de raison $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ respectivement. D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$F'_k(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^k F'_0(1) \text{ et } F''_k(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^k F''_0(1).$$

Or $F_0(x) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_0 = r)x^r = P(Z_0 = n)x^n = x^n$, donc $F'_0(1) = n$ et $F''_0(n) = n(n-1)$. On obtient finalement :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad F'_k(1) = \frac{n}{2^k} \quad \text{et} \quad F''_k(1) = \frac{n(n-1)}{3^k}.}$$

La variance $V(Z_k)$ de Z_k existe bien car Z_k est une variable aléatoire finie. En utilisant les calculs précédents, il suit que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}V(Z_k) &= E(Z_k^2) - E(Z_k)^2 = E(Z_k(Z_k-1)) + E(Z_k) - E(Z_k)^2\\ &= F''_k(1) + F'_k(1) - F'_k(1)^2 = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \left(\frac{n}{2^k}\right)^2\\ &= \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(Z_k) = \frac{n}{2^k} \quad \text{et} \quad \boxed{V(Z_k) = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k}.}$$

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires

16. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{F_k = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)x^r = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)e_r.}$$

D'autre part, $f(F_k) = F_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par une récurrence immédiate, on montre que :

$$F_k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}(F_0) = f^k(F_0).$$

Et puisque $F_0(x) = x^n$ (car Z_0 est constante égale à n) :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \; F_k = f^k(e_n).}$$

17. D'après la question précédente et la question 9. :

$$f^k(e_n) = \sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)e_r \quad \text{et} \quad f^k(e_n) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{r=j}^{n}\left((-1)^{r-j}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}\right)e_j.$$

En identifiant chacun des coefficients de ces deux expressions (l'écriture dans la base $(e_0, \ldots, e_n)$ étant unique) :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \; \forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n}(-1)^{r-j}\frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.}$$

18. (a) Pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|P(Z_k = j)| &= \left| \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \right| \\
&\leq \sum_{r=j}^{n} \left| (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \right| \qquad \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{r=j}^{n} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k} \\
&\leq \sum_{r=j}^{n} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(j+1)^k} \qquad \text{car} \quad \frac{1}{r+1} \leq \frac{1}{j+1} \\
&\leq \frac{\displaystyle\sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(j+1)^k}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{|P(Z_k = j)| \leq \frac{M_{j,n}}{(j+1)^k}}$$

avec $M_{j,n} = \displaystyle\sum_{r=j}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{j}$.

Soit $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. La série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{M_{j,n}}{(j+1)^k}$ est (à une constante $M_{j,n}$ près) une série géométrique de raison $0 < \dfrac{1}{j+1} < 1$. Elle converge donc. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} |P(Z_k = j)|$ converge.

Comme pour tout $k \geq 0$, $P(Z_k = j) \geq 0$, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{k \geq 0} P(Z_k = j) \text{ converge lorsque } j \in \{1, 2, \dots, n\}.}$$

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(Z_k = 0) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{0}}{(r+1)^k} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} = 1 + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
|P(Z_k = 0) - 1| &= \left| \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \right| \\
&\leq \sum_{r=1}^{n} \left| (-1)^r \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \right| \qquad \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{r=1}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \\
&\leq \sum_{r=1}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{2^k} \qquad \text{car } \frac{1}{r+1} \leq \frac{1}{2} \\
&\leq \frac{\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}}{2^k}
\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}1^r 1^{n-r} = 2^n$, on obtient finalement, en notant $C_n = 2^n$:

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad |P(Z_k = 0) - 1| \leq \frac{C_n}{2^k}}$$

Par théorème des gendarmes, la limite $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} P(Z_k = 0)$ existe et vaut 1.

$\boxed{\text{La série } \displaystyle\sum_{k\geq 0} P(Z_k = 0) \text{ est donc grossièrement divergente}}$ puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Remarque. On a donc montré que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} P(Z_k = 0) = 1$, ce qui signifie que la suite de variables aléatoires (Z_k) converge dans un certain sens à définir (convergence en loi, voir **Chapitre 17 - Convergence de variables aléatoires.**) vers la variable aléatoire constante égale à 0. Ceci ne devrait pas vous surprendre, car Z_k représente le numéro de la boule piochée au k-ème tirage. Étant donné le protocole et la composition des urnes, on a $Z_{k+1} \leq Z_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, si on tombe dans l'urne U_0 (c'est-à-dire s'il existe $r \geq 0$ tel que $[Z_r = 0]$ est réalisé), alors on ne peut plus en sortir (et donc $[Z_s = 0]$ est réalisé pour tout $s \geq r$).