DS4

Devoir Surveillé du 18/11/2022

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, et $\mathrm{Cov}(X, Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y.

Soit p un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p.

On pose : $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

1. (a) Rappeler la valeur de $E(X_1)$ et $V(X_1)$ et déterminer $P([X_1 \leq k])$ pour tout k de $X_1(\Omega)$.
   (b) Calculer $E(X_1 + X_2)$ et $V(X_1 + X_2)$.
2. (a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
   (b) Justifier que $Z + T = X_1 + X_2$ et en déduire $E(T)$.
   (c) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$. En déduire la relation suivante : $P([T = k]) = 2P([X_1 = k]) - P([Z = k])$.
   (d) Établir la formule : $V(T) = \dfrac{q(2q^2 + q + 2)}{(1 - q^2)^2}$.
3. (a) Déterminer $V(Z + T)$ puis $\mathrm{Cov}(Z, T)$.
   Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?
   (b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

Exercice 2

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t} \sqrt{1 + x^2 e^{2t}}\, \mathrm{d}t.$$

1. *Domaine de définition de f.*
   (a) Justifier que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} \mathrm{d}t$ est convergente et donner sa valeur.
   (b) Soit x un réel fixé. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t} \sqrt{1 + x^2 e^{2t}}\, \mathrm{d}t$.

   Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement paire. On va donc l'étudier sur $[0, +\infty[$.

2. *Étude de f au voisinage de $+\infty$.*

   (a) Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :
$$xe^t \leq \sqrt{1+x^2e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}.$$

   (b) Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\quad x \leq f(x) \leq x + \dfrac{1}{6x}$.

   (c) Déterminer alors la limite de f en $+\infty$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

3. *Dérivabilité et monotonie de f.*

   (a) À l'aide du changement de variable $u = xe^t$ que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :
$$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3} \mathrm{d}u.$$

   (b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif, par :
$$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

   (c) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :
$$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$
   En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

4. *Étude locale de f et f' en 0.*

   (a) Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :
$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u$$
   et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u$ est convergente.

   (b) À l'aide des questions précédentes, montrer alors que l'on a :
$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln x \quad \text{et} \quad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln x}{2}.$$

Problème.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1, x, \ldots, x^n)$ la base canonique de E.

On note, pour tout polynôme P de E :
$$\varphi(P) = \frac{1}{n} x(1-x)P' + xP.$$

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes.

1. (a) Montrer que φ est une application linéaire.
   (b) Calculer $\varphi(x^n)$.
   (c) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

2. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathscr{B}$. Préciser le rang de cette matrice.

3. L'endomorphisme φ est-il injectif ? Justifier votre réponse.

4. On pose, pour tout k de $[\![0,n]\!]$: $P_k = x^k(1-x)^{n-k}$.

   (a) Pour tout k de $[\![0,n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.
   (b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.
   (c) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires.

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On note alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.

Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

5. On note, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k-ième tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon.

   On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.

   (a) Déterminer la loi de Z_2.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout j de $[\![1,k]\!]$, la valeur de $P_{[Y_k=j]}([Z_{k+1}=1])$.
   En déduire : $P([Z_{k+1}=1]) = 1 - \frac{1}{n}E(Y_k)$.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j$, montrer :

   $$P([Z_{k+1}=1]) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} P([Z_j=1]).$$

   (d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $P([Z_k=1]) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}$.
   (e) Déterminer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.

6. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^{n} P([Y_k=i])x^i.$$

(a) Déterminer les polynômes G_0, G_1 et G_2.

(b) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $[\![0,n]\!]$:

$$P([Y_{k+1}=i]) = \frac{i}{n}P([Y_k=i]) + \left(1-\frac{i-1}{n}\right)P([Y_k=i-1]).$$

(c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_{k+1} = \frac{1}{n}x(1-x)G_k' + xG_k.$$

(d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_k = \varphi^k(G_0).$$

7. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $G_k(1)$ et $G_k'(1)$.

(b) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$E(Y_{k+1}) = \left(1-\frac{1}{n}\right)E(Y_k)+1.$$

(c) Retrouver alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de $E(Y_k)$ obtenue en question 5.(e).

8. On rappelle que les polynômes $P_0,\dots,P_n$ sont définis à la question 4 par :

$$\text{pour tout } j \text{ de } [\![0,n]\!], \quad P_j = x^j(1-x)^{n-j}.$$

(a) Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j$.

(b) Montrer, pour tout j de $[\![0,n]\!]$:

$$P_j = \sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}x^i.$$

(c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k(-1)^{i-j}\right)x^i.$$

(d) Montrer finalement, pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[\![0,n]\!]$:

$$P([Y_k=i]) = \binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(-1)^{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k.$$
