

Devoir Surveillé du 13/01/2023

La question 7 et la partie IV ne sont abordables que par les cubes.

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Sous réserve d'existence, on note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle X quelconque. Pour toute variable aléatoire réelle X admettant une densité sur \mathbb{R} , notée f_X , on note \mathcal{D}_X l'ensemble des réels s pour lesquels la variable aléatoire e^{sX} admet une espérance, et on note Φ_X la fonction définie sur \mathcal{D}_X par : $\Phi_X(s) = E(e^{sX})$.

On **admet** les résultats suivants :

- si deux variables aléatoires X et Y sont telles que Φ_X et Φ_Y coïncident sur un intervalle ouvert non vide, alors X et Y ont même loi ;
- si n est un entier naturel non nul, et X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires réelles quelconques, mutuellement indépendantes, alors, pour tout entier p de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et pour toutes fonctions réelles continues φ_1 et φ_2 , les variables aléatoires $\varphi_1(X_1, \dots, X_p)$ et $\varphi_2(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes ;
- si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors XY admet une espérance, et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

La fonction exponentielle est également notée \exp . On rappelle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}$.

Dans tout le problème, U désigne une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Préliminaires

On rappelle que, pour tout s de \mathcal{D}_X , on a : $\Phi_X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(sx) f_X(x) dx$.

1. Soit a un réel non nul et b un réel quelconque.

(a) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2) dx$ est convergente si et seulement si $a > 0$, et vaut alors $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

(b) En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx$ est convergente si et seulement si $a > 0$, puis montrer que dans ces conditions, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ax^2 + bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$.

2. (a) Déterminer \mathcal{D}_U ; pour tout s de \mathcal{D}_U , calculer $\Phi_U(s)$.

(b) On pose : $Z = U^2$. Établir que : $\mathcal{D}_Z = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[$. Montrer, à l'aide du théorème de transfert, que pour tout réels de \mathcal{D}_Z , on a : $\Phi_Z(s) = (1 - 2s)^{-1/2}$.

3. Soit X une variable aléatoire réelle à densité, et soit μ et β deux réels quelconques.

(a) Montrer qu'un réel s appartient à $\mathcal{D}_{\mu X + \beta}$ si et seulement si μs appartient à \mathcal{D}_X , et que dans ce cas, on a : $\Phi_{\mu X + \beta}(s) = \exp(\beta s) \Phi_X(\mu s)$.

- (b) On suppose que X suit une loi γ de paramètre ν , où ν est un réel strictement positif.
 Montrer que : $\mathcal{D}_X =]-\infty, 1[$. Pour tout s de \mathcal{D}_X , établir la formule : $\Phi_X(s) = (1 - s)^{-\nu}$.
 De même, déterminer \mathcal{D}_{2X} , puis, pour tout s de \mathcal{D}_{2X} , calculer $\Phi_{2X}(s)$.

Partie I. Loi du χ^2 centré

Soit r un entier supérieur ou égal à 1. On considère une variable aléatoire X_r possédant une densité f_{X_r} donnée par

$$f_{X_r}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \times \Gamma(\frac{r}{2})} \times x^{\frac{r}{2}-1} \times \exp(-\frac{x}{2}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On dit que X_r suit une loi du χ^2 (« chi deux ») centré à r degrés de liberté, et on note : $X_r \hookrightarrow \chi^2(r)$.

4. Étudier les variations de f_{X_4} et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
5. (a) Montrer que la variable aléatoire $\frac{X_r}{2}$ suit une loi γ de paramètre $\frac{r}{2}$. En déduire $E(X_r)$ et $V(X_r)$.
 (b) Déterminer \mathcal{D}_{X_r} . Pour tout s de \mathcal{D}_{X_r} , calculer $\Phi_{X_r}(s)$.
6. Soit n un entier de \mathbb{N}^* . On considère n variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, \dots, U_n de même loi que U . Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $Z_i = U_i^2$.
 (a) Vérifier que X_1 et U^2 sont de même loi.
 (b) On pose $W_n = \sum_{i=1}^n Z_i$. En utilisant le résultat de la question 5.a, déterminer la loi de W_n .
 (c) Déterminer \mathcal{D}_{W_n} , et pour tout s de \mathcal{D}_{W_n} , exprimer $\Phi_{W_n}(s)$ en fonction des et de n . Établir une relation entre $\Phi_{W_n}(s)$ et $\Phi_{Z_1}(s), \Phi_{Z_2}(s), \dots, \Phi_{Z_n}(s)$.
7. Soit T une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée de variance σ^2 inconnue, σ étant un réel strictement positif. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on dispose d'un n -échantillon indépendant, identiquement distribué (i.i.d.), T_1, T_2, \dots, T_n de la loi de T .

On considère la variable aléatoire S_n définie par : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^2$.

- (a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais et convergent du paramètre σ^2 .
- (b) Soit α un réel vérifiant : $0 < \alpha < 1$, et soit k_α le réel strictement positif tel que : $P([W_n > k_\alpha]) = 1 - \alpha$. Montrer que l'intervalle $\left] 0, \frac{nS_n}{k_\alpha} \right]$ est un intervalle de confiance de σ^2 au niveau de risque α .

Partie II. Loi du χ^2 décentré

On considère une suite $(M_j)_{j \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , mutuellement indépendantes, telles que pour tout j de \mathbb{N}^* , M_j suive la loi normale d'espérance m_j ($m_j \in \mathbb{R}$) et de variance égale à 1.

Pour n entier de \mathbb{N}^* , on pose : $Y_n = \sum_{j=1}^n M_j^2$ et $\lambda_n = \sum_{j=1}^n m_j^2$.

On dit que Y_n suit une loi du χ^2 décentré à n degrés de liberté, de paramètre de décentrage λ_n , et on note : $Y_n \hookrightarrow \chi^2(n, \lambda_n)$.

8. Dans cette question **uniquement**, on suppose que l'entier n est égal à 1.

- (a) Montrer les deux égalités suivantes : $E(U^3) = 0$ et $E(U^4) = 3$.
- (b) En déduire, en fonction de λ_1 , les valeurs respectives de $E(Y_1)$ et de $V(Y_1)$.
- (c) Montrer que : $\mathcal{D}_{Y_1} = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[$ et établir, pour tout réels de \mathcal{D}_{Y_1} , la formule suivante :

$$\Phi_{Y_1}(s) = (1 - 2s)^{-1/2} \times \exp\left(\frac{s\lambda_1}{1 - 2s}\right).$$

9. Soit n un entier de \mathbb{N}^* .

- (a) Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$ en fonction de n et de λ_n .
- (b) On admet que l'on a $\mathcal{D}_{Y_n} = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[$. Pour tout s de \mathcal{D}_{Y_n} , exprimer $\Phi_{Y_n}(s)$ en fonction de s , n et λ_n .

Partie III. Nombre aléatoire de degrés de liberté

Sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , on considère une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R} admettant une espérance $E(X)$, et une variable aléatoire K à valeurs dans \mathbb{N} .

On note N_K l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $P(K = k) > 0$, et on suppose que pour tout entier k de N_K , la variable aléatoire X admet une espérance pour la probabilité conditionnelle $P_{[K=k]}$, notée $E(X|K = k)$.

On admet alors l'égalité suivante : (*) $E(X) = \sum_{k \in N_K} E(X|K = k)P(K = k)$.

Soit g l'application définie sur \mathbb{N} par : $g(k) = \begin{cases} E(X|K = k) & \text{si } k \in N_K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

10. Vérification de la formule (*) sur un exemple.

Soit $(J_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout k de \mathbb{N}^* , on pose : $X_k = \max_{1 \leq i \leq k} (J_i)$. Autrement dit, pour tout ω de Ω , $X_k(\omega) = \max_{1 \leq i \leq k} (J_i(\omega))$.

Soit K une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) qui suit la loi uniforme discrète sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que K est indépendante des variables aléatoires de la suite $(J_i)_{i \geq 1}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $X(\omega) = \max_{1 \leq i \leq K(\omega)} (J_i(\omega))$, et on admet que X est une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

- (a) Établir, pour tout entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout réel x , la relation :

$$P_{[K=k]}(X \leq x) = P(X_k \leq x).$$

- (b) Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X .
- (c) En déduire que X est une variable aléatoire à densité, qui admet une espérance $E(X)$ que l'on exprimera en fonction de $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1}$.
- (d) Vérifier l'égalité (*) : $E(X) = E(g(K))$.

11. Soit $(U_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi normale centrée réduite. Soit K une variable aléatoire indépendante des variables aléatoires de la suite $(U_i)_{i \geq 1}$, qui suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{2}$ strictement positif.

Pour n entier de \mathbb{N}^* , on pose $H_n = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_{n+2K}^2$. On admet que H_n est une variable aléatoire à densité à valeurs positifs, et que $\mathcal{D}_{H_n} = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[$.

Soit s un réel de $]-\infty, \frac{1}{2}[$.

- (a) Montrer que pour tout k de \mathbb{N} , la loi conditionnelle de H_n sachant $[K = k]$ est la loi de la variable aléatoire W_{n+2k} définie dans la question 6.b.
- (b) En posant : $X = e^{sH_n}$, déterminer, pour tout entier k de \mathbb{N} , l'expression de $g(k)$ en fonction de k .
- (c) Établir la formule suivante :

$$E(g(K)) = (1 - 2s)^{-n/2} \exp\left(\frac{\lambda s}{1 - 2s}\right).$$

- (d) En utilisant l'égalité (*) avec $X = e^{sH_n}$, déterminer la loi de H_n .
- (e) À l'aide de la question 11.a, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$$E\left(\frac{1}{H_n}\right) = E\left(\frac{1}{n - 2 + 2K}\right).$$

Partie IV. Estimateur de James-Stein

Soit p un entier supérieur ou égal à 3. On suppose qu'un modèle aléatoire défini sur (Ω, \mathcal{A}, P) comporte p paramètres réels inconnus $\theta_1, \dots, \theta_p$ non tous nuls. Un échantillon d'observations statistiques permet d'exhiber des estimateurs $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p$ sans biais des paramètres $\theta_1, \dots, \theta_p$ respectivement. On suppose que les variables aléatoires $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p$ sont indépendantes, et suivent une loi normale de variance égale à 1.

On pose : $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$, $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)$, $B_p = \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_j^2$ et $b_p = \sum_{j=1}^p \theta_j^2$.

On dit que le *vecteur aléatoire* $\hat{\theta}$ est un *estimateur sans biais* du paramètre vectoriel θ , et $E(\hat{\theta})$ est alors le vecteur θ .

On définit le *risque quadratique scalaire* d'un estimateur θ^* de θ , noté $R(\theta^*, \theta)$, par :

$$R(\theta^*, \theta) = E\left(\sum_{j=1}^p (\theta_j^* - \theta_j)^2\right).$$

Dans cette partie, on cherche un estimateur θ^* de θ , représenté par un vecteur aléatoire $(\theta_1^*, \dots, \theta_n^*)$, dont le risque quadratique $R(\theta^*, \theta)$ est strictement inférieur à $R(\hat{\theta}, \theta)$.

- 12. Justifier que la variable aléatoire B_p suit la loi $\chi^2(p, b_p)$, et qu'elle constitue un estimateur biaisé de b_p .

- 13. On pose : $\theta^* = \left(1 - \frac{c}{B_p}\right) \times \hat{\theta}$, où c est un paramètre réel strictement positif. Soit K une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{b_p}{2}$.

- (a) En admettant que l'on a : $E\left(\frac{1}{B_p} \sum_{j=1}^p \theta_j \hat{\theta}_j\right) = E\left(\frac{2K}{p - 2 + 2K}\right)$, établir l'égalité suivante :

$$R(\theta^*, \theta) - R(\hat{\theta}, \theta) = (c^2 - 2c(p - 2)) \times E\left(\frac{2K}{p - 2 + 2K}\right)$$

- (b) Montrer que l'inégalité : $R(\theta^*, \theta) < R(\hat{\theta}, \theta)$ est vérifiée si et seulement si $0 < c < 2(p - 2)$. Déterminer, en fonction de p , la valeur de c pour laquelle $R(\theta^*, \theta) - R(\hat{\theta}, \theta)$ est minimale. Comment s'écrit alors l'estimateur θ^* ?