DS6

Correction du Devoir Surveillé

Exercice 1 (Edhec 2008)

1. Commençons par chercher les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On résout pour cela l'équation :

$$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det(A) = 0 \quad \text{soit encore } \lambda^2 - 2x\lambda + y = 0$$

On calcule le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = (2x)^2 - 4y = 4(x^2 - y).$$

On a alors plusieurs cas à étudier :

- Si $\Delta > 0$, alors il y a deux valeurs propres réelles distinctes. Comme A est de taille 2×2, on en déduit que A est diagonalisable dans ce cas.
- Si $\Delta = 0$ (soit $x^2 = y$), alors il y a une seule valeur propre qui est $\dfrac{2x}{2} = x$. Mais alors A est diagonalisable si et seulement si $A = xI_2$. Or ce n'est clairement pas le cas, et ce quelque soit $x \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de valeur propre réel, et A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } x^2 - y > 0.}$

2. (a) On procède par étapes successives.

Étape 1. Fixons $f_X : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ pour densité pour X. On a $X(\Omega) = [0,1]$, donc $X^2(\Omega) = [0,1]$. En particulier, on a $F_{X^2}(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_{X^2}(x) = 1$ si $x > 1$.

Étape 2. Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned} F_{X^2}(x) &= P(0 \leq X \leq \sqrt{x}) \qquad \text{car } X \in [0,1] \\ &= P(X \leq \sqrt{x}) - \underbrace{P(X < 0)}_{=0 \text{ car } X \geq 0} \\ &= F_X(\sqrt{x}) = \sqrt{x} \qquad \text{car } \sqrt{x} \in [0,1] \end{aligned}$$

Ainsi on obtient que :

$$F_{X^2} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Étape 3. F_{X^2} est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0 et en 1. En 0, on a :

$$\lim_{x \mapsto 0^-} F_{X^2}(x) = \lim_{x \mapsto 0^+} F_{X^2}(x) = F_{X^2}(0).$$

Donc F_{X^2} est continue en 0. On montre de même que F_{X^2} est continue aussi en 1. Donc F_{X^2} est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin F_{X^2} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

Étape 4. On détermine alors une densité de X^2 en dérivant :

$$\boxed{f_{X^2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}}$$

où les valeurs en 0 et en 1 sont fixées arbitrairement à 0.

(b) Y est à densité, de densité :

$$f_Y : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$-Y$ l'est donc aussi par transformation affine d'une variable à densité, et une densité de $-Y$ est donnée par :

$$\boxed{f_{-Y} : t \mapsto \frac{1}{|-1|} f_Y\left(\frac{t-0}{-1}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0 \\ 1 & \text{si } -1 < t < 0 \\ 0 & \text{si } t \leq -1 \end{cases}}.$$

(c) On procède par étapes.

Étape 1. Posons $Z = X^2 - Y = X^2 + (-Y)$. Puisque X et Y sont indépendantes, il en est de même de X^2 et $-Y$. Comme de plus f_{-Y} est bornée (notons que f_{X^2} ne l'est pas elle), on sait par le cours que Z est une variable à densité, de densité (définie et continue sur $\mathbb{R}$) :

$$h : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t) f_{-Y}(x-t)\mathrm{d}t.$$

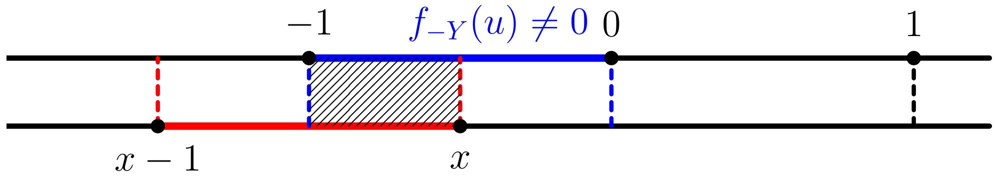
Étape 2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On réduit le domaine d'intégration. On a :

$$h(x) = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} f_{-Y}(x-t)\mathrm{d}t.$$

On effectue le changement de variables $u = x - t$, affine donc licite. On a $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, et $u : x \to x-1$ lorsque $t : 0 \to 1$. On obtient donc (toutes les intégrales convergent bien) :

$$h(x) = \int_x^{x-1} \frac{1}{2\sqrt{x-u}} f_{-Y}(u)(-\mathrm{d}u) = \int_{x-1}^{x} \frac{1}{2\sqrt{x-u}} f_{-Y}(u)\mathrm{d}u.$$

On étudie alors l'intersection $]x-1, x[\bigcap]-1, 0[$.



On a :

$$]x-1, x[\bigcap]-1, 0[= \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < -1 \\ ]-1, x[& \text{si } x \in [-1, 0] \\ ]x-1, 0[& \text{si } x \in]0,1[\\ \emptyset & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Étape 3. On calcule l'intégrale selon les cas.

- Si $x < -1$ ou $x \geq 1$, on a $h(x) = 0$.
- Si $x \in]0,1[$, on a :
$$h(x) = \int_{x-1}^{0} \frac{1}{2\sqrt{x-u}} \mathrm{d}u.$$
La fonction intégrée est continue sur $[x-1,0]$, et on reconnait une expression du type $\dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$, d'où :
$$h(x) = \left[-\sqrt{x-u}\right]_{x-1}^{0} = 1 - \sqrt{x}.$$
- Si $x \in [-1,0]$, la fonction intégrée est cette fois continue sur $[-1,x[$, donc l'intégrale est généralisée en x. On a pour $-1 < A < x$:
$$h(x) = \int_{-1}^{A} \frac{1}{2\sqrt{x-u}} \mathrm{d}u = \left[-\sqrt{x-u}\right]_{-1}^{A} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-A} \underset{A \to x}{\to} \sqrt{x+1}.$$

On peut donc conclure que Z admet pour densité la fonction h définie par :

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(d) La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $X^2 - Y > 0$. Cet évènement se réalise avec la probabilité suivante :

$$P(X^2 - Y > 0) = P(Z > 0) = \int_0^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 1 - \sqrt{t}\ \mathrm{d}t = \left[t - \frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi $\boxed{\text{la probabilité que } M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix} \text{ soit diagonalisable dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est de } \frac{1}{3}.}$

3. On choisit deux éléments de $[0,1]$ uniformément à l'aide de la fonction `rd.random()` qu'on stocke dans les variables `x` et `y`. On teste si la matrice associée à `x` et `y` est diagonalisable à l'aide de la condition $x^2 - y > 0$. Si c'est le cas, on augmente la variable `c` de 1. La variable `c` contient à la fin de la boucle `for` le nombre de matrices diagonalisables parmi les 10000 prises au hasard. On renvoie alors la fréquence `c/10000` qui est une estimation de la probabilité que la $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On obtient donc le programme suivant :

```python
c = 0
for k in range(10000)
        x = rd.random()
        y = rd.random()
        if x**2-y > 0 :
                c = c + 1
print(c/10000)
```

Exercice 2 (Extrait de Ecricome 2011)

1. (a) On peut proposer le script suivant :

```
def simulY(n):
    X = rd.exponential(1,n)
    Y = np.max(X)
    return Y
```

(b) En utilisant les opérations coefficient par coefficient sur les vecteurs, on peut proposer le script suivant :

```
def simulZ(n)
    X = rd.exponential(1,n)
    U = np.arange(1,n+1)
    Z = sum(X/U)
    return Z
```

(c) Ce script simule 10000 réalisations des variables Y_n et Z_n, contenues dans les vecteurs `Y` et `Z` respectivement. Il définit ensuite des classes contenues dans la variable `c` (qui sont les intervalles $[0, 0.5],]0.5, 1], \dots,]9.5, 10]$), et renvoie les histogrammes des fréquences (argument `density = "True"` correspondants pour chacun des vecteurs `Y` et `Z` (la largeur de chaque rectangle est égale à 0.5 et sa hauteur est proportionnelle à l'effectif de la classe correspondante). La commande `plt.subplot` permet de tracer ces histogrammes l'un à côté de l'autre pour mieux les comparer.

Les deux graphiques étant semblables, les distributions des deux séries de nombres `Y` et `Z` semblent les mêmes. On peut donc conjecturer que $\boxed{Y_n \text{ et de } Z_n \text{ sont de même loi}}$. C'est ce qu'on vérifie dans la suite de l'exercice par le calcul.

2. (a) Pour tout réel t, on a :

$$F_{Y_n}(t) = P(Y_n \leq t) = P(X_1 \leq t,\ X_2 \leq t, \dots,\ X_n \leq t)$$
$$\underset{\text{indép.}}{=} P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t)\dots P(X_n \leq t) \boxed{= F_{X_1}(t)F_{X_2}(t)\dots F_{X_n}(t).}$$

(b) On obtient alors pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\boxed{F_{Y_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (1-e^{-t})^n, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}}$

(c) La fonction F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 comme produit des F_{X_i} qui le sont. Donc Y_n est une variable à densité.

Pour tout $t \neq 0$, on a :

$$F'_{Y_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ ne^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est bien une densité de probabilité de la variable aléatoire } Y_n}$ (en fixant pour valeur arbitraire 0 en 0).

3. (a) Posons $T_{n+1} = \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_{T_{n+1}}(t)$ est égale à :

$$P\left(\frac{X_{n+1}}{n+1} \leq t\right) = P(X_{n+1} \leq (n+1)t) = F_{X_{n+1}}((n+1)t) \boxed{= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-(n+1)t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}}$$

(b) On reconnait ici la fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathscr{E}(n+1)$. Donc $\boxed{T_{n+1} \text{ est à densité.}}$

Une densité de $T_{n+1} = \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est (en prenant une valeur arbitraire en 0) :

$$\boxed{d_{n+1} : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ (n+1)e^{-(n+1)t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}}$$

Remarque. On sait par le cours que :

$$X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathscr{E}(1).$$

Ici, on a $X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$. On pouvait donc en déduire directement que $\dfrac{1}{n+1}X_{n+1}$ suit une loi $\mathscr{E}(n+1)$. On l'a retrouvé ici en étudiant la fonction de répartition de $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

4. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_0^x n\exp(nt)(1-\exp(-t))^{n-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x ne^t e^{(n-1)t}(1-\exp(-t))^{n-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x ne^t(e^t-1)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ = \Big[(e^t-1)^n\Big]_0^x \boxed{= (e^x-1)^n} \end{aligned}$$

5. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable aléatoire à densité dont f_n est une densité.

Init. Pour $n = 1$, $Z_1 = X_1$ suit une loi exponentielle dont une densité est $f_1 : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \exp(-t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$. D'où la propriété au rang $n = 1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété au rang n, c'est-à-dire Z_n est à densité dont f_n est une densité. Montrons la propriété au rang $n+1$.

On procède en trois étapes.

Étape 1 : Justification du produit de convolution.

On a $Z_{n+1} = Z_n + \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$. Par le lemme de coalition, les variables Z_n et $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ sont indépendantes. De plus, la densité de $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ (par exemple) est bornée. Par le cours, on peut donc conclure que Z_{n+1} est à densité, et une densité de Z_{n+1} est donnée par :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)d_{n+1}(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

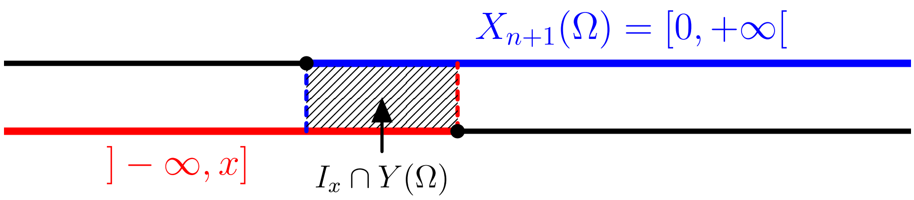
Étape 2 : Réduction du domaine d'intégration.
Fixons $x \in \mathbb{R}$. f_n étant nulle en dehors de $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$h(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t) d_{n+1}(x-t)\, \mathrm{d}t.$$

On effectue le changement de variables $u = x - t$, affine donc licite, dans cette intégrale. On a $u : x \to -\infty$ lorsque $t : 0 \to +\infty$, et $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$. D'où :

$$h(x) = \int_x^{-\infty} f_n(x-u) d_{n+1}(u)(-\mathrm{d}u) = \int_{-\infty}^{x} f_n(x-u) d_{n+1}(u)\, \mathrm{d}u.$$

La fonction d_{n+1} est nulle en dehors de $\mathbb{R}_+$. On est donc dans la situation suivante (représentée dans le cas où $x \geq 0$) :



On a donc :

$$]-\infty, x] \cap X_{n+1}(\Omega) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < 0 \\ [0, x] & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Étape 3 : Calcul de $h(x)$.
On a deux cas à considérer :

* si $x < 0$, on a $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \underbrace{f_n(x-u) d_{n+1}(u)}_{=0}\, \mathrm{d}u = 0.$
* si $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x f_n(x-u) d_{n+1}(u)\, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^x n e^{-(x-u)}(1 - e^{-(x-u)}))^{n-1}(n+1)e^{-(n+1)u}\, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

Effectuons de nouveau le changement de variables $t = x - u$, affine donc licite, pour se ramener à l'intégrale de la question 4. On a $t : x \to 0$ lorsque $u : 0 \to x$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_x^0 n e^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1}(n+1)e^{-(n+1)(x-t)}(-\mathrm{d}t) \\ &= (n+1)e^{-(n+1)x} \int_0^x n e^{-t}(1 - \exp(-t))^{n-1} e^{(n+1)t}\, \mathrm{d}t \\ &\underset{\text{quest. 4.}}{=} (n+1)e^{-(n+1)x}(e^x - 1)^n \\ &= (n+1)e^{-x}e^{-nx}(e^x - 1)^n = (n+1)e^{-x}(1 - e^{-x})^n \end{aligned}$$

Une densité de Z_{n+1} est donc bien f_{n+1}. D'où la propriété au rang $n+1$.

Concl. Par principe de récurrence, $\boxed{Z_n \text{ est une variable aléatoire à densité dont } f_n \text{ est une densité}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Puisque f_n est une densité commune à Y_n et Z_n, les variables Y_n et Z_n suivent la même loi. Ainsi $E(Y_n)$ existe si et seulement si $E(Z_n)$ existe, et elles ont la même valeur. Or par linéarité de l'espérance, Z_n admet bien une espérance qui vaut :

$$E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{E(X_k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Ainsi $\boxed{Y_n \text{ admet une espérance, et } E(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.}$

Problème (EM Lyon 2007)

I. Étude d'un endomorphisme de E

1. Soit $P \in E$, de degré $\leq n$. Alors $(X^2-1)P$ est un polynôme de degré $\leq n+2$, et donc $[(X^2-1)P]''$ est de degré au plus n. Donc $\boxed{[(X^2-1)P]'' \text{ appartient bien à } E.}$

2. Si $P = 1$, on a $(X^2-1)P = X^2-1$ et donc $[(X^2-1)P]'' = 2$. Ainsi on a $\boxed{\Phi(1) = 2}$.

   Si $P = X$, on a $(X^2-1)P = X^3-X$ et donc $[(X^2-1)P]'' = 6X$. Ainsi on a $\boxed{\Phi(X) = 6X}$.

3. On a déjà d'après 1. que Φ est bien à valeur dans E. Montrons que Φ est linéaire. Soit $P_1, P_2 \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P_1 + \mu P_2) &= [(X^2-1)(\lambda P_1 + \mu P_2)]'' = [\lambda(X^2-1)P_1 + \mu(X^2-1)P_2]'' \\ &\overset{\text{deriv. lin.}}{=} \lambda[(X^2-1)P_1]'' + \mu[(X^2-1)P_2]'' = \lambda\Phi(P_1) + \mu\Phi(P_2)\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

4. On a déjà calculé $\Phi(X^k)$ pour $k = 0, 1$. Soit $k \in [\![2, n]\!]$, on a $(X^2-1)X^k = X^{k+2} - X^k$ et donc en dérivant deux fois :

$$\boxed{\Phi(X^k) = (k+2)(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}.}$$

   On peut donc écrire la matrice de Φ dans la base canonique de E.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 6 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 12 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (n+2)(n+1) \end{pmatrix}.}$$

5. (a) A est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. On en déduit que A, et donc Φ, admet $n+1$ valeurs propres qui sont $\lambda_k = (k+2)(k+1)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

   (b) Φ est bien bijective car toutes ses valeurs propres sont non nulles.

   (c) Comme Φ est un endomorphisme de E qui est de dimension $n+1$ et qu'il admet $n+1$ valeurs propres distinctes, alors on sait que ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1 et que Φ est diagonalisable.

6. (a) Soit donc P un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k. On a :

$$\Phi(P) = \lambda_k P \text{ soit encore } [(X^2-1)P]'' = (k+2)(k+1)P.$$

   Comme P est un vecteur propre, P est non nul. Notons d son degré, et a_d son coefficient dominant. Identifions les coefficients dominants des polynômes en jeu :

- $[(X^2-1)P]''$ est de degré d, on l'a vu, et son coefficient dominant est celui de $[a_d X^{d+2}]''$, c'est-à-dire $a_d(d+2)(d+1)$.
- Le coefficient dominant de $(k+2)(k+1)P$ est $(k+2)(k+1)a_d$.

Ces polynômes étant égaux, ils ont mêmes coefficients dominants. Comme de plus $a_d \neq 0$ (car $P \neq 0_E$), on obtient $(k+2)(k+1) = (d+2)(d+1)$, et donc $\boxed{k=d}$.

(b) Soit $Q = P(-X)$. On a par la formule de Leibniz

$$\lambda_k P(X) = \Phi(P) = [(X^2-1)P]'' = (X^2-1)P''(X) + 2\times 2XP'(X) + 2P(X) \qquad (*)$$

et de même

$$\Phi(Q) = (X^2-1)Q'' + 4XQ' + 2Q.$$

Mais comme $Q(X) = P(-X)$, on a $Q'(X) = -P'(-X)$ et $Q''(X) = P''(-X)$ et donc

$$\Phi(Q) = (X^2-1)P''(-X) - 4XP'(-X) + 2P(-X).$$

En substituant $-X$ à X dans $(*)$, on obtient

$$\lambda_k P(-X) = (X^2-1)P''(-X) - 4XP'(-X) + 2P(-X)$$

et donc $\lambda_k Q = \Phi(Q)$. Comme de plus $Q \neq 0$ car $P \neq 0$, on en déduit que $\boxed{Q \text{ est vecteur propre associé à la valeur propre } \lambda_k \text{ également}}$.

7. Soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une famille de vecteurs propres de Φ telle que P_k est associée à la valeur propre λ_k. Comme il s'agit de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille libre, de cardinal $n+1$ dans un espace de dimension $n+1$, donc c'est une base. Quitte à les normaliser, on peut supposer que ces polynômes sont tous unitaires.

   D'après la question 6., on a montré de plus que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est de degré k. De plus, on sait que $Q_k = P_k(-X)$ est aussi vecteur propre pour la valeur propre λ_k. Comme le sous-espace propre $E_{\lambda_k}(\Phi)$ est de dimension 1, on en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Q_k = \alpha P_k$. Mais alors identifions les coefficients dominants dans cette expression, c'est à dire les coefficients de X^k :

   - le coefficient en X^k de αP est α car P est unitaire.
   - le terme en X^k de $Q_k(X) = P(-X)$ est $(-X)^k = (-1)^k X^k$, et donc son coefficient dominant est $(-1)^k$.

   Ainsi on a par identification que $(-1)^k = \alpha$, et donc que $Q_k = (-1)^k P$.

   Reste à montrer l'unicité d'une telle base. Soit $(S_0, \ldots, S_n)$ une base de E satisfaisant les mêmes propriétés. Alors S_k est vecteur propre pour la valeur propre λ_k. Comme $\dim(E_{\lambda_k}(\Phi)) = 1$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $S_k = \alpha P_k$. Comme les polynômes sont supposés tous les deux unitaires, on a donc $\alpha = 1$ et $S_k = P_k$.

   Enfin on a $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$, donc le polynôme P_k est pair si k est pair, impair si k est impair.

8. P_0 est de degré 0 et son coefficient dominant est 1, donc $P_0 = 1$. P_1 est impair, de degré 1 et son coefficient dominant est 1, donc $P_1 = X$.

P_2 est pair, de degré 2 et son coefficient dominant est 1, donc il existe un réel a tel que $P_2 = X^2 + a$.

$\Phi(P_2) = \Big((X^2-1)\,P_2\Big)'' = \Big((X^2-1)\,(X^2+a)\Big)'' = (X^4+(a-1)\,X^2-a)'' = 12X^2+2(a-1)$

Or $\Phi(P_2) = \lambda_2\,P_2 = 12\,(X^2+a)$ donc $12X^2+2(a-1) = 12\,X^2+12a$ et ainsi $2a-2 = 12a$. Finalement $a = -1/5$ et $P_2 = X^2 - \frac{1}{5}$

P_3 est impair, de degré 3 et son coefficient dominant est 1, donc il existe un réel b tel que $P_3 = X^3 + b\,X$.

$\Phi(P_3) = \Big((X^2-1)\,P_3\Big)'' = \Big((X^2-1)\,(X^3+b\,X)\Big)'' = (X^5+(b-1)\,X^3-b\,X)'' = 20\,X^3+6(b-1)\,X$

Or $\Phi(P_3) = \lambda_3\,P_3 = 20\,(X^3+b\,X)$ donc $20X^3+6(b-1)\,X = 20\,X^3+20b\,X$ et ainsi $6b-6 = 20b$. Finalement $b = -3/7$ et $P_3 = X^3 - \frac{3}{7}\,X$.

II. Un produit scalaire sur E

1. Pour tout P, Q dans E, l'application $x \mapsto (1-x^2)P(x)Q(x)$ est continue sur le segment $[-1,1]$ donc l'intégrale est bien définie. Montrons qu'on définit un produit scalaire sur E.

   - Linéarité à gauche : pour tout $P_1, P_2, Q \in E$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

   $$\begin{aligned}(\lambda P_1 + \mu P_2|Q) &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)(\lambda P_1+\mu P_2)(x)Q(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x^2)(\lambda P_1(x)+\mu P_2(x))Q(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1}\lambda(1-x^2)P_1(x)Q(x)+\mu(1-x^2)P_2(x)Q(x)\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{lin. de l'int.}}{=} \lambda\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_1(x)Q(x)\mathrm{d}x+\mu\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_2(x)Q(x)\mathrm{d}x \\ &= \lambda(P_1|Q)+\mu(P_2|Q).\end{aligned}$$

   - Symétrie : Pour tout $P, Q \in E$, on a

   $$(P|Q) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)P(x)Q(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x^2)Q(x)P(x)\mathrm{d}x = (Q|P).$$

   On en déduit en particulier que $(\cdot|\cdot)$ est aussi linéaire à droite.
   - Positif : Soit $P \in E$, l'application $x \mapsto (1-x^2)P(x)^2$ est positive sur $[-1,1]$, donc son intégrale est aussi positive :

   $$(P|P) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)P(x)^2\mathrm{d}x \geq 0$$

   - Définie positive : Soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$, alors

   $$\int_{-1}^{1}(1-x^2)P(x)^2\mathrm{d}x = 0$$

   Or c'est l'intégrale d'une fonction continue (car polynomiale) et positive. Son intégrale est nulle si et seulement si

   $$\forall x \in [-1,1], \quad (1-x^2)P(x)^2 = 0$$

   Comme $1-x^2 \neq 0$ sur $]-1,1[$, on en déduit que

   $$\forall x \in]-1,1[, \quad P(x) = 0$$

   Le polynôme P admet donc une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul.

On conclut donc que $\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est bien un produit scalaire sur } E.}$

2. (a) Soit $P, Q \in E$. On a

$$\begin{aligned}(\Phi(P)|Q) &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)\Phi(P)(x)Q(x)\mathrm{d}x\\ &= -\int_{-1}^{1}[(X^2-1)P]''(x)(x^2-1)Q(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On effectue une double intégration par parties sur le segment $[-1,1]$.

$$\begin{array}{cccc} + & [(X^2-1)Q] & & [(X^2-1)P]'' \\ & & \searrow & \\ - & [(X^2-1)Q]' & & [(X^2-1)P]' \\ & & \searrow & \\ + & [(X^2-1)Q]'' & \xleftarrow{\int} & [(X^2-1)P] \end{array}$$

Les fonctions $x \mapsto (x^2-1)P(x)$ et $x \mapsto (x^2-1)Q(x)$ sont $\mathscr{C}^2$. Donc on obtient :

$$\begin{aligned}(\Phi(P)|Q) = &-\Big[(x^2-1)Q(x)[(X^2-1)P]'(x) - (x^2-1)P(x)[(X^2-1)Q]'(x)\Big]_{-1}^{1}\\ &- \int_{-1}^{1}[(X^2-1)Q]''(x)(x^2-1)P(x)\mathrm{d}x\\ &\boxed{= (P|\Phi(Q))}\end{aligned}$$

(b) Soit $i \neq j$, on a :

$$\lambda_i(P_i|P_j) = (\Phi(P_i)|P_j) = (P_i|\Phi(P_j)) = \lambda_j(P_i|P_j).$$

Ainsi on obtient $(\lambda_i - \lambda_j)(P_i|P_j) = 0$, et puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$, on obtient donc $\boxed{(P_i|P_j) = 0}$.

3. (a) Soit $j \in [\![1, n]\!]$, et soit S un polynôme de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$. On sait que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\deg(P_k) = k$. Alors $(P_0, \ldots, P_{j-1})$ est une famille de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$ échelonnée en degré donc libre, de cardinal j égal à la dimension de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_{j-1}[X]$. En particulier il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_{j-1}$ tels que

$$S = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{j-1}P_{j-1}$$

On en déduit alors que

$$(S|P_j) = (\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{j-1}P_{j-1}|P_j) = \lambda_0(P_0|P_j) + \cdots + \lambda_{j-1}(P_{j-1}|P_j)\boxed{= 0}$$

car la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est orthogonale. D'où le résultat.

(b) Comme $j \geq 1$, on a d'après la question précédente $(1|P_j) = 0$, d'où :

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_j(x) = 0.$$

Supposons par l'absurde que P_j garde un signe constant sur $]-1,1[$, par exemple positif (le raisonnement est le même si négatif). Alors $x \mapsto (1-x^2)P(x)$ est une fonction continue et positive sur $[-1,1]$. Son intégrale étant nulle, cette fonction serait nulle. Le polynôme P_j aurait donc une infinité de racines et serait le polynôme nul (raisonnement déjà fait plus haut). Or ce n'est pas le cas puisque $P_j \neq 0$.

Ainsi, $\boxed{P_j \text{ ne garde pas un signe constant sur }]-1,1[.}$

(c) Puisque P_j ne garde pas un signe constant sur $]-1,1[$, il existe deux éléments $a, b \in]-1,1[$ tels que $P(a) > 0$ et $P(b) < 0$. La fonction $x \mapsto P_j(x)$ étant continue, elle s'annule en un point $\alpha \in]-1,1[$ en changeant de signe par le théorème des valeurs intermédiaires. Si on note m sa multiplicité comme racine de P_j, on a donc l'existence d'un polynôme Q tel que :

$$P_j = (X-\alpha)^m Q \text{ avec } Q(\alpha) \neq 0$$

En particulier au voisinage de α, Q reste de signe constant, et c'est donc $(X-\alpha)^m$ qui change de signe en α. Ceci impose donc que m soit impair.

Ainsi, $\boxed{P_j \text{ admet au moins une racine d'ordre de multiplicité impair dans }]-1,1[.}$

4. (a) Puisque $x_1, \ldots, x_m$ sont des racines distinctes de P_j, le polynôme $S_m = (X-x_1)\ldots(X-x_m)$ divise P_j. Il existe donc un polynôme Q tel que :

$$P_j = Q \times S_m.$$

En prenant le degré dans cette expression, on obtient que :

$$j = \deg(P_j) = \deg(Q \times S_m) = \deg(Q) + \deg(S_m) \geq \deg(S_m) = m.$$

(b) Le polynôme $S_m P_j$ n'a que des racines de multiplicité paire par construction (définition de S_m). Donc $\boxed{x \mapsto S_m(x)P_j(x) \text{ garde un signe constant sur }]-1,1[.}$

(c) Supposons que $m < j$. D'après 3.(a), on a $(S_m|P_j) = 0$ car $\deg(S_m) = m < j$. Or on a :

$$(S_m|P_j) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)S_m(x)P_j(x)\mathrm{d}x.$$

Mais la fonction $x \mapsto (1-x^2)S_m(x)P_j(x)$ est de signe constant sur $[-1,1]$ et est continue. Son intégrale est nulle si et seulement si $(1-x^2)S_m(x)P_j(x) = 0$ pour tout $x \in [-1,1]$. Ainsi le polynôme $(1-X^2)S_m(X)P_j(X)$ admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Or c'est faux car $(1-X^2)S_mP_j \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On peut donc conclure que $\boxed{m = j}$.

(d) Ainsi $\deg(S_m) = j$, et en reprenant les calculs du 4.(a), on obtient que $\deg(Q) = 0$, et donc que $Q = \lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $P = \lambda S_m = S_m$ car les polynômes sont unitaires, et $\boxed{P_j \text{ admet bien } j \text{ racines simples réelles toutes situées dans }]-1,1[.}$