DS6

Devoir Surveillé du 13/01/2023

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$, élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   Montrer que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $x^2 - y > 0$.

2. Dans la suite, X et Y sont des variables aléatoires réelles, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes et qui suivent toutes les deux la loi uniforme sur $[0,1]$. On note F_X (respectivement F_Y) la fonction de répartition de X (resp. Y).

   (a) Déterminer une densité de X^2.

   (b) Déterminer une densité de $-Y$ (on ne demande pas de vérifier que $-Y$ est une variable aléatoire à densité).

   (c) En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

   $$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (d) Déterminer enfin la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

3. On souhaite vérifier notre résultat à l'aide de `Python`. Compléter le programme suivant afin qu'il renvoie une estimation de la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

```python
c = 0
for k in range(10000):
    x = ...
    y = ...
    if ...
        c = ...
print(...)
```

Exercice 2

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n et Z_n les deux variables aléatoires définies respectivement par :

$$Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{X_1}{1} + \frac{X_2}{2} + \cdots + \frac{X_n}{n}.$$

Pour finir, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ n\exp(-t)(1-\exp(-t))^{n-1} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

1. On suppose avoir importé les librairies `numpy` (avec le raccourci `np`), `numpy.random` (avec le raccourci `rd`) et `matplotlib.pyplot` (avec le raccourci `plt`).

   On rappelle que la commande `rd.exponential(1/lambda, r)` renvoie un un vecteur de taille `r` dont les coefficients sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre `lambda`.

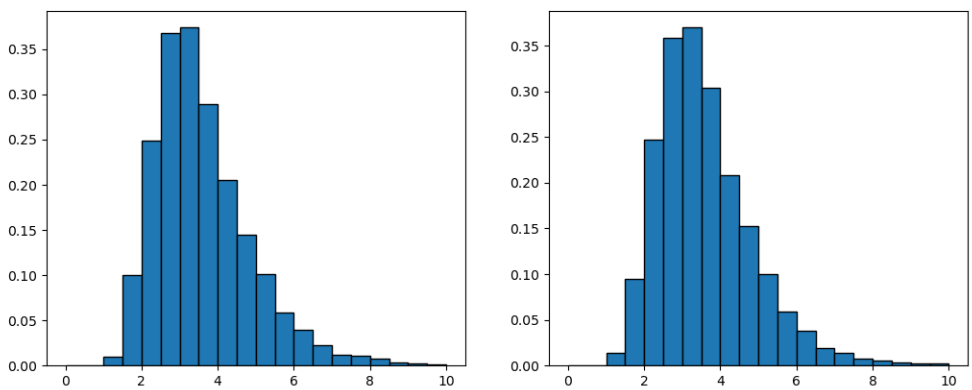
   (a) Écrire une fonction d'en-tête `def simulY(n)` renvoyant une réalisation de Y_n.

   (b) Écrire une fonction d'en-tête `def simulZ(n)` renvoyant une réalisation de Z_n.

   (c) On considère le script suivant, utilisant les fonctions `simulY` et `simulZ` définies dans les questions précédentes.

```
n = int(input("entrer une valeur de n"))
Y = np.zeros(10000)
Z = np.zeros(10000)
for k in range(10000):
    Y[k] = simulY(n)
    Z[k] = simulZ(n)
c = np.linspace(0,10,21)
plt.subplot(1,2,1)
plt.hist(Y,c,density="True",edgecolor='k')
plt.subplot(1,2,2)
plt.hist(Z,c,density="True",edgecolor='k')
plt.show()
```

   En choisissant $n = 20$, ce script renvoie les histogrammes suivants :



   On obtient des représentations analogues en exécutant ce script avec d'autres valeurs de n. Quelle conjecture peut-on émettre quant aux lois de Y_n et Z_n ?

2. (a) Pour tout réel t, exprimer le réel $F_{Y_n}(t)$ à l'aide des réels $F_{X_1}(t), \ldots, F_{X_n}(t)$.

   (b) Pour tout réel t, donner alors l'expression de $F_{Y_n}(t)$ en fonction de n et de t et distinguant le cas $t < 0$ et le cas $t \geq 0$.

(c) Vérifier alors que la fonction f_n est une densité de probabilité de la variable aléatoire Y_n.

3. (a) Préciser la fonction de répartition de la variable aléatoire $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

   (b) Démontrer que $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable aléatoire à densité et proposer une densité d_{n+1}.

4. Pour tout réel x, vérifier que : $\displaystyle\int_0^x n\exp(nt)(1-\exp(-t))^{n-1}\,\mathrm{d}t = (\exp(x)-1)^n$.

5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, Z_n est une variable aléatoire à densité dont f_n est une densité.

   Indication. Pour l'hérédité, on remarquera que $Z_{n+1} = Z_n + \dfrac{X_{n+1}}{n+1}$.

6. Sans calcul d'intégrale, montrer que Y_n admet une espérance, et calculer $E(Y_n)$.

Problème

On note n un nombre entier fixé supérieur ou égal 2, E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\mathscr{B} = (1, x, \ldots, x^n)$ la base canonique de E.

I. Étude d'un endomorphisme de E

1. Montrer que, pour tout polynôme P de E, le polynôme $\Big((x^2-1)P\Big)''$ est élément de E, où $\Big((x^2-1)P\Big)''$ désigne le polynôme dérivée seconde de $(x^2-1)P$.

   On note $\Phi : E \to E$ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe

$$\Phi(P) = \Big((x^2-1)P\Big)''.$$

2. Vérifier : $\Phi(1) = 2, \quad \Phi(x) = 6x$.

3. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

4. Calculer $\Phi(x^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et écrire la matrice A de Φ dans la base $\mathscr{B}$.

5. (a) Montrer que Φ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.

   (b) Est-ce que Φ est bijectif ?

   (c) Montrer que Φ est diagonalisable et déterminer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la dimension du sous-espace propre de Φ associé à λ_k.

6. Soient $k \in [\![0, n]\!]$ et P un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ_k.

   (a) Montrer que le degré du polynôme P est égal à k.

   (b) Montrer que le polynôme Q défini par $Q(x) = P(-x)$ est un vecteur propre de Φ associé à λ_k.

7. En déduire qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de Φ telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$.

   Que peut-on en déduire sur la parité de P_k ?

8. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3.

II. Un produit scalaire sur E

1. Montrer que l'application : $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) P(x) Q(x) \mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E. On munit dorénavant E de ce produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.

2. (a) À l'aide d'intégrations par parties, établir que $(\Phi(P)|Q) = (P|\Phi(Q))$ pour tout $P, Q \in E$.
   (b) Montrer que la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E obtenue à la question I.7 est orthogonale.

3. Soit $j \in [\![1, n]\!]$.
   (a) Montrer que pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $j-1$, on a : $(S|P_j) = 0$.
   (b) En considérant $(1|P_j)$, montrer que P_j ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $]-1; 1[$.
   (c) En déduire que P_j admet au moins, dans l'intervalle $]-1; 1[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.

4. Soit toujours $j \in [\![1, n]\!]$. On note $\{x_1, \dots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de P_j appartenant à l'intervalle $]-1; 1[$ et $S_m = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_m)$.
   (a) Justifier : $m \leq j$.
   (b) Montrer que le polynôme $S_m P_j$ (produit des polynômes S_m et P_j) garde un signe constant sur l'intervalle $]-1; 1[$.
   (c) En considérant $(S_m|P_j)$, montrer que $m = j$.
   (d) En déduire que P_j admet j racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle $]-1, 1[$.