DS7

Correction du concours blanc 1 type Edhec

Exercice 1 (Edhec 2017)

1. (a) Rappelons que les produits, puissances et quotients de vecteurs se font coefficients par coefficients. Il s'agit ici de faire la somme du vecteur $[x, x^2, \dots, x^n]$ qu'on construit sur `Python` à l'aide de la commande `x**np.arange(1,n+1)`. D'où la fonction `Python` suivante.

```
def f(x,n):
        y = np.sum(x**np.arange(1,n+1))
        return y
```

(b) $f_n(x)$ est la somme de n termes d'une suite géométrique de raison x et de premier terme x. On a donc :

$$\boxed{f_n(x) = \begin{cases} x\dfrac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n & \text{si } x = 1 \end{cases}.}$$

On peut donc déclarer une deuxième fois `f` comme suit :

```
def f(x,n):
    if x==1 :
        y = n
    else :
        y = x*(1-x**n)/(1-x)
    return y
```

2. On applique le théorème de la bijection à f_n entre 0 et 1 :

- f_n est **continue sur** $[0,1]$ en tant que fonction polynômiale.
- f_n est dérivable sur $[0,1]$ en tant que fonction polynomiale, et on a

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

Ainsi $f_n'(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$. La fonction f_n est donc **strictement croissante sur** $[0,1]$
- $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = n$.

La fonction f_n réalise donc une bijection du segment $[0,1]$ sur le segment $[0,n]$. Puisque $1 \in [0,n]$, on en déduit que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x \in [0,1]$, possède une unique solution α_n dans $[0,1]$.

3. (a) Notons tout d'abord que pour tout $x \in [0,1]$:

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} x^k = \sum_{k=1}^{n} x^k + x^{n+1} = f_n(x) + x^{n+1}.$$

Prenons $x = \alpha_n$ dans cette relation :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) + \alpha_n^{n+1} = 1 + \alpha_n^{n+1}$$

car $f_n(\alpha_n) = 1$. Puisque $\alpha_n^{n+1} \geq 0$, on obtient donc :

$$\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1.}$$

De plus on a $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 1$ par définition de α_{n+1}, donc on obtient :

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1}).$$

La fonction f_{n+1} étant strictement croissante, on en déduit que $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on conclut que $\boxed{(\alpha_n) \text{ est décroissante.}}$

(b) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers une limite $\ell \in [0,1]$.

4. (a) α_2 est solution de l'équation :

$$\alpha_2^2+\alpha_2 = 1 \quad \text{soit} \quad \alpha_2^2+\alpha_2-1=0.$$

On calcule le discriminant $\Delta = 1-4\times(-1) = 5$, et on obtient les solutions $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Puisque $\alpha_2 \geq 0$, on ne conserve que la solution positive. Ainsi on a :

$$\alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

On notera que $\boxed{0 \leq \alpha_2 < \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1.}$

(b) Par décroissance de la suite (α_n), on obtient que pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq \alpha_n \leq \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \alpha_n^{n+1} \leq \alpha_2^{n+1}.$$

Or $0 \leq \alpha_2 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_2^{n+1} = 0$. Par théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} \text{ existe et vaut } 0.}$

(c) On sait que $f_n(x) = x\dfrac{1-x^n}{1-x}$ si $x \neq 1$. Pour $n \geq 2$, on a bien $\alpha_n \leq \alpha_2 < 1$ et donc $\alpha_n \neq 0$. On obtient donc :

$$1 = f_n(\alpha_n) = \alpha_n\frac{1-\alpha_n^n}{1-\alpha_n}$$

d'où $\alpha_n - \alpha_n^{n+1} = 1-\alpha_n$, soit encore $2\alpha_n = 1-\alpha_n^{n+1}$. Tous les termes de cette expression convergent d'après les questions 3.(b) et 4.(b). En passant à la limite, on obtient :

$$2\ell = 1 \quad \text{soit encore} \quad \ell = \frac{1}{2}.$$

On conclut donc que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}.}$

5. Ce programme parcourt l'axe des x en partant de $x = 0$ et par saut de 0.001, et s'arrête dès que $f(n,x) \geq 1$. On sait par l'étude précédente que cette condition sera bien satisfaite dès que $x \geq \alpha_n$. Et lorsque le programme s'arrête, la variable x renvoyée satisfait :

$$f_n(x-0.001) < 1 = f_n(\alpha_n) \leq f_n(x).$$

La fonction f_n étant strictement croissante, on en déduit que $x - 0.001 < \alpha_n \leq x$.

$\boxed{\text{Le résultat } x \text{ affiché est donc une approximation de } \alpha_n \text{ à } 0.001 \text{ près.}}$

Exercice 2 (Edhec 2017)

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x,\ \dots,\ X_n \leq x) \underset{X_i \text{ indép.}}{=} P(X_1 \leq x)\dots P(X_n \leq x)$$
$$\underset{\text{même loi}}{=} P(X_1 \leq x)^n \boxed{= F_{X_1}(x)^n}$$

Puisque F_{X_1} est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1, il en est de même pour F_{M_n} par produit. Ainsi $\boxed{M_n \text{ est une variable à densité.}}$

(b) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{M_n}(x) = F_{X_1}(x)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

On obtient une densité f_{M_n} de M_n en dérivant F_{M_n} là où elle est dérivable. On obtient (en prenant arbitrairement $f_{M_n}(0) = f_{M_n}(1) = 0$) :

$$\boxed{f_{M_n} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ nx^{n-1} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.}$$

(c) Soit $k = 1, 2$. $E(M_n^k)$ existe si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_{M_n}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 nt^{n+k-1}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge car la fonction intégrée est positive. C'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment qui converge donc bien. Ainsi $\boxed{E(M_n^k) \text{ existe bien}}$ et on a :

$$E(M_n^k) = \int_0^1 nt^{n+k-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{n}{n+k}t^{n+k}\right]_0^1 = \frac{n}{n+k}.$$

En particulier, on a pour $k = 1$ que $\boxed{E(M_n) = \frac{n}{n+1}}$ et pour $k = 2$ que $\boxed{E(M_n^2) = \frac{n}{n+2}}$.

(d) Soit $\varepsilon > 0$. La variable aléatoire $(M_n - 1)^2 = M_n^2 - 2M_n + 1$ est positive et admet une espérance car M_n admet un moment d'ordre 2, et on a par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E((M_n-1)^2) &= E(M_n^2) - 2E(M_n) + 1 = \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1 \\ &= \frac{n(n+1) - 2n(n+2) + (n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + n - 2n^2 - 4n + n^2 + 3n + 2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Markov, on obtient donc :

$$\boxed{P\left((M_n-1)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{E((M_n-1)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{2}{\varepsilon^2(n+1)(n+2)}}$$

(e) On a $0 \leq P(|M_n - 1| \geq \varepsilon) = P\left((M_n-1)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{2}{\varepsilon^2(n+1)(n+2)}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\varepsilon^2(n+1)(n+2)} = 0$.
Par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - 1| \geq \varepsilon) \text{ existe et vaut } 0.}$

Remarque. Il ne nous était pas demandé d'interpréter ce résultat, mais nous obtenons ici que M_n converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine $M = 1$.

2. (a) La variable `X` contient n réalisations d'une variable suivant une loi $\mathscr{U}([0,1])$. En utilisant la fonction `np.max`, on obtient une réalisation de la variable M_n, et donc de $Y_n = n(1 - M_n)$.

```
def f(n):
    X = rd.random(n)
    Y = n*(1-np.max(X))
    return Y
```

(b) On remarque que les histogrammes sont semblables, ce qui indique que la distribution des 10000 réalisations de la loi $\mathscr{E}(1)$ sur l'intervalle $[0, 10]$ (représentée par l'histogramme (1)) est très proche de celle de 10000 réalisations de Y_{1000} (histogramme (2)). Cela suggère que la loi de Y_{1000} est proche de la loi $\mathscr{E}(1)$. On peut donc conjecturer que la suite de variables (Y_n) converge en loi vers une variable de loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$.

3. (a) On a $M_n(\Omega) = [0, 1]$, donc $Y_n(\Omega) = [0, n]$ de sorte que $F_{Y_n}(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_{Y_n}(x) = 1$ si $x > n$. Pour tout $x \in [0, n]$, on a :

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= P(Y_n \leq x) = P(n(1-M_n) \leq x) = P\left(1 - M_n \leq \frac{x}{n}\right) = P\left(1 - \frac{x}{n} \leq M_n\right) \\ &= 1 - P\left((M_n < 1 - \frac{x}{n}\right) = 1 - P\left(M_n \leq 1 - \frac{x}{n}\right) \quad \text{car } M_n \text{ continue} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{car } 1 - \frac{x}{n} \in [0,1] \end{aligned}$$

On obtient donc que :

$$\boxed{F_{Y_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}.}$$

(b) Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq x$, on a :

$$F_{Y_n}(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1 - \exp(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)).$$

On a :

$$n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(-\frac{x}{n}\right) = -x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -x.$$

Par composition de cette limite par la fonction exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient que :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \exp(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)) = 1 - e^{-x}.$$

Mise en garde.

Attention ici, on compose les limites par l'exponentielle, et pas les équivalents ! Rappelons qu'on ne peut pas composer des équivalents par une fonction exponentielle, logarithme, ...

On a ainsi obtenu que :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad \lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = 1 - e^{-x}.}$$

Et ceci est également satisfait pour $x = 0$ puisque $F_{Y_n}(0) = 0 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 = 1 - e^{-0}$.

(c) Pour tout $x < 0$, on a :

$$F_{Y_n}(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On obtient donc avec le résultat de la question précédente que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = F_Y(x)$$

où Y est une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{E}(1)$. Cela valide donc la conjecture émise en 2.(b), à savoir que $\boxed{(Y_n) \text{ converge en loi vers une variable } Y \text{ de loi exponentielle } \mathscr{E}(1)}$.

Exercice 3 (Edhec 2009)

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k = a_{2n+1}X^{2n+1} + a_{2n}X^{2n} + \cdots + a_1 X + a_0$. On a :

$$f(P) = X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right) = X^{2n+1}\left(a_{2n+1}\left(\frac{1}{X}\right)^{2n+1} + a_{2n}\left(\frac{1}{X}\right)^{2n} + \cdots + a_1\left(\frac{1}{X}\right) + a_0\right)$$

$$= a_{2n+1} + a_{2n}X^1 + \cdots + a_1 X^{2n} + a_0 X^{2n+1} \boxed{= \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k} X^k}$$

2. D'après la question précédente, on a $f(P) \in E$ pour tout $P \in E$. De plus, pour tout $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= X^{2n+1}\left(\lambda P + \mu Q\right)\left(\frac{1}{X}\right)\Big) \\ &= X^{2n+1}\left(\lambda P\left(\frac{1}{X}\right) + \mu Q\left(\frac{1}{X}\right)\right) \\ &= \lambda X^{2n+1} P\left(\frac{1}{X}\right) + \mu X^{2n+1} Q\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$

3. (a) On a pour tout $P \in E$:

$$\begin{aligned} f \circ f(P) = f(f(P)) &= f\left(X^{2n+1}P\left(\frac{1}{X}\right)\right) \\ &= X^{2n+1}\left(\frac{1}{X^{2n+1}}P\left(X\right)\right) = P(X) \end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{f \circ f = \mathrm{Id}}$.

Autre méthode. À l'aide de l'égalité obtenue en 1., on a pour tout $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k \in E$:

$$f \circ f(P) = f(f(P)) = f\left(\sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}X^k\right) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-(2n+1-k)}X^k = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k \boxed{= P}$$

> **Déjà vu ?**
> Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E satisfaisant $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ est une *symétrie vectorielle*. Voir à ce sujet le **Complément de cours 3. Symétries vectorielles.**

(b) D'après la question précédente, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de f. Les valeurs propres **possibles** de f se trouvent parmi les racines de $X^2 - 1$. Ainsi, les deux valeurs propres possibles de f sont $\boxed{1 \text{ et } -1}$.

4. Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ un polynôme quelconque de $\mathrm{Ker}(f - Id)$.

(a) On a $f(P) = P$, soit encore :

$$\sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}X^k = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$$

Puisque la famille $(1, X, \ldots, X^{2n+1})$ est libre, on en déduit que :

$$\boxed{\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad a_k = a_{2n+1-k}.}$$

(b) On obtient donc :

$$\begin{aligned} P(X) &= \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k X^k \\ &\overset{3.(a)}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_{2n+1-k}X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{j=0}^{n} a_j X^{2n+1-j} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k\left(X^k + X^{2n+1-k}\right) \end{aligned}$$

$\left(X^k + X^{2n+1-k}\right)_{k=0,\ldots,n}$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f - Id)$. Comme elle est de plus libre car échelonnée en degrés, $\boxed{\left(X^k + X^{2n+1-k}\right)_{k=0,\ldots,n} \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f - Id).}$

5. Soit de même $P \in \mathrm{Ker}(f + Id)$. On a :

$$f(P) = -P \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k}X^k = -\sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k.$$

Puisque la famille $(1, X, \ldots, X^{2n+1})$ est libre, on en déduit que :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad a_k = -a_{2n+1-k}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
P(X) &= \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k X^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-a_{2n+1-k}) X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{j=0}^{n} a_j (-X^{2n+1-j}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(X^k - X^{2n+1-k}\right)
\end{aligned}$$

$\left(X^k - X^{2n+1-k}\right)_{k=0,\ldots,n}$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f+Id)$, et libre car échelonnée en degrés.

$\boxed{\left(X^k - X^{2n+1-k}\right)_{k=0,\ldots,n} \text{ est donc une base de } \mathrm{Ker}(f+Id).}$

6. (a) Montrons que φ est un produit scalaire sur E :

- *Bilinéarité.* Soient $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k X^k$ et $R = \sum_{k=0}^{2n+1} c_k X^k$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a $\lambda P + \mu Q = \sum_{k=0}^{2n+1} (\lambda a_k + \mu b_k) X^k$. On obtient :

$$\varphi(\lambda P + \mu Q, R) = \sum_{k=0}^{2n+1} (\lambda a_k + \mu b_k) c_k = \lambda \sum_{k=0}^{2n+1} a_k c_k + \mu \sum_{k=0}^{2n+1} b_k c_k = \lambda \varphi(P, R) + \mu \varphi(Q, R)$$

- *Symétrie.* Soient $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k X^k$. On a :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k b_k = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k a_k = \varphi(Q, P).$$

- *Positivité.* Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$. On a :

$$\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k^2 \geq 0.$$

- *Définie positive.* Soit $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$. On a :

$$\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k^2 = 0.$$

Comme tous les termes de cette somme sont positifs, et que cette somme vaut 0, on en déduit que :

$$\forall k = 0, \ldots, 2n+1, \quad a_k^2 = 0, \text{ soit encore } a_k = 0.$$

On en déduit donc que $P = 0$.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire.}}$

(b) Soient $P = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k X^k$. On a $f(P) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k} X^k$ et $f(Q) = \sum_{k=0}^{2n+1} b_{2n+1-k} X^k$. On a alors :

$$\langle f(P), Q \rangle = \sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k} b_k \qquad = \sum_{j=0}^{2n+1} a_j b_{2n+1-j} = \langle P, f(Q) \rangle$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est un endomorphisme symétrique.}}$

(c) **Méthode 1. Sans le Chapitre 18.**
On a établi aux questions 4. et 5. que $\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 1\}$ et que $\dim(E_1(f)) = \dim(E_{-1}(f)) = n+1$, de sorte que :

$$\dim(E_1(f)) + \dim(E_{-1}(f)) = 2n+2 = \dim(E).$$

Donc f est diagonalisable, et :

$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}).$$

Reste à montrer que ces sous-espaces sont orthogonaux. Soit pour cela $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \times \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$. On a :

$$\langle x, y \rangle = \langle f(x), y \rangle \underset{f \text{ sym.}}{=} \langle x, f(y) \rangle = \langle x, -y \rangle = -\langle x, y \rangle.$$

D'où $\langle x, y \rangle = 0$. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ sont donc bien supplémentaires orthogonaux.

Méthode 2. Avec le Chapitre 18.
f étant un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien, on sait que f est diagonalisable, et que ces sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. De plus, on a vu que f admet deux valeurs propres 1 et -1. On a donc :

$$E = Ker(f - Id) \overset{\perp}{\oplus} Ker(f + Id).$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(f - Id) \text{ et } \mathrm{Ker}(f + Id) \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } E.}$

Problème (Edhec 2015)

Partie 1

1. Pour $n \geq r$, on a : $\displaystyle\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} \boxed{\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}.}$

2. (a) Puisque $x \in]0, 1[$, les croissances comparées assurent que : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} n^{r+2} x^n = 0.}$

   (b) On a :
   - $\displaystyle n^2 \binom{n}{r} x^n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{r+2}}{r!} x^n$ et $\displaystyle\frac{n^{r+2}}{r!} x^n \to 0$ par 1., d'où : $\displaystyle\binom{n}{r} x^n \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   - $\displaystyle\frac{1}{n^2} \geq 0$.
   - $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente

   Par théorème de comparaison, $\boxed{\displaystyle\sum_n \binom{n}{r} x^n \text{ est convergente.}}$

3. (a) On a $\displaystyle S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \times x^n$. On reconnaît la série géométrique, d'où :

$$\boxed{S_0 = \frac{1}{1-x}.}$$

   (b) On a :

$$\begin{aligned}
(1-x)S_{r+1} &= \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} \\
&= \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n+1}{r+1} x^{n+1} - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} \\
&= x \left(\sum_{n=r+1}^{+\infty} \left[\binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1} \right] x^n + \binom{r+1}{r+1} x^r \right)
\end{aligned}$$

Or on a $\binom{n+1}{r+1} - \binom{n}{r+1} = \binom{n}{r}$ par la formule de Pascal, et $\binom{r+1}{r+1} = 1 = \binom{r}{r}$. On a donc : $\boxed{(1-x)S_{r+1} = xS_r.}$

(c) On a $S_{r+1} = \dfrac{x}{1-x} S_r$ pour tout $r \geq 0$. (S_r) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{x}{1-x}$, de sorte que :

$$\forall r \geq 0, \quad S_r = \left(\frac{x}{1-x}\right)^r S_0.$$

Ainsi on a :

$$\boxed{\forall x \in]0,1[, \ \forall r \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.}$$

(d) Et en divisant par x^r $(x > 0)$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in]0,1[, \ \forall r \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.}$$

Partie 2

1. (a) Comme le joueur peut ne jamais jouer, $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On a $P(X=0) = P(D_1) = \alpha$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X=k) = P(\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \cdots \cap \overline{D_k} \cap D_{k+1}).$$

Par la formule des probabilités composées, on a :

$$P(X=k) = P(\overline{D_1}) P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) P_{\overline{D_1} \cap \overline{D_2}}(\overline{D_3}) \dots P_{\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \cap \cdots \cap \overline{D_k}}(D_{k+1})$$

On a donc $P(X=k) = (1-\alpha)^k \alpha$, formule encore valable si $k=0$. Ainsi :

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X=k) = (1-\alpha)^k \alpha.}$$

Remarque. Les D_k ne sont pas indépendants, puisque la règle stipule que la disqualification est définitive. Le recours à la formule des probabilités composées s'avère nécessaire, même si le calcul invoquant une prétendue indépendance (qui est fausse !) aboutit au même résultat...

(b) Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$$P(T=k) = P(X+1=k) = P(X=k-1) = (1-\alpha)^{k-1}\alpha$$

Ainsi, $\boxed{T \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \alpha.}$ Comme $X = T-1$ et que $E(T)$ existe et vaut $\dfrac{1}{\alpha}$, alors $E(X)$ existe aussi par linéarité et on a :

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}.}$$

(c) De même, $X = T-1$ entraîne que $\boxed{V(X) \text{ existe et } V(X) = V(T) = \dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}.}$

2. (a) Si $n=0$, l'événement $[X=0]$ entraîne $[Y=0]$ puisque le joueur ne joue jamais (100% des gagnants ont tenté leur chance...). Ainsi la loi de Y sachant $[X=0]$ est la loi d'une variable constante égale à 0.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $[X=n]$ entraîne que le joueur participe à n partie(s) indépendante(s) avec une même probabilité de succès p. Son nombre de succès Y suit alors la loi binomiale de paramètres n et p. Ainsi $\boxed{\text{la loi de } Y \text{ sachant } [X=n] \text{ est } \mathscr{B}(n,p).}$

(b) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Avec le système complet d'événements $([X=n])_{n \in \mathbb{N}}$, on a par la formule des probabilités totales que pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) P_{[X=n]}(Y=k) = 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} (1-\alpha)^n \alpha \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \alpha \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \times \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} [(1-\alpha)(1-p)]^n \end{aligned}$$

En reconnaissant S_k de la partie 1 avec $x = (1-\alpha)(1-p) \in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \alpha\left(\frac{p}{1-p}\right)^k \times \frac{[(1-\alpha)(1-p)]^k}{[1-(1-\alpha)(1-p)]^{k+1}} = \frac{\alpha p^k(1-\alpha)^k}{(\alpha+p-\alpha p)^{k+1}} \\ &= \left(\frac{p-\alpha p}{\alpha+p-\alpha p}\right)^k \times \frac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p} \end{aligned}$$

Soit $\beta = \dfrac{p-\alpha p}{\alpha+p-\alpha p}$. Alors on a $1-\beta = \dfrac{\alpha+p-\alpha p-p+\alpha p}{\alpha+p-\alpha p} = \dfrac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}$. Finalement on a donc $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\quad P(Y=k) = \beta^k(1-\beta) \text{ avec } \beta = \dfrac{p(1-\alpha)}{\alpha+p-\alpha p}.}$

3. En s'inspirant de la démarche de 1.(b), $Y+1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-\beta$, et on a :

$$\boxed{E(Y) \text{ existe et vaut } \frac{1}{1-\beta} - 1 = \frac{p(1-\alpha)}{\alpha}.}$$

De même, on a $\boxed{V(Y) = V(Y+1) = \dfrac{\beta}{(1-\beta)^2} = \dfrac{p(1-\alpha)(\alpha+p-\alpha p)}{\alpha^2}.}$

4. (a) Le joueur gagnant Y parties et en perdant $X-Y$, on a $\boxed{G = Y-(X-Y) = 2Y-X.}$

   (b) Par linéarité, G admet une espérance et on a

$$E(G) = 2E(Y) - E(X) = 2\frac{p(1-\alpha)}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{(1-\alpha)(2p-1)}{\alpha}$$

   Remarque. On notera que, conformément à l'intuition, $E(G)$ est positive pour $p \geq 1/2$, c'est-à-dire lorsque le jeu est favorable au joueur…

   (c) Même si ça n'était pas demandé, montrons l'existence de $E(XY)$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant $[X=n]$, Y suit $\mathscr{B}(n,p)$ donc $E(Y|[X=n])$ existe et vaut np. Par linéarité, $E(XY|[X=n]) = E(nY|[X=n])$ existe et vaut n^2p. Cette égalité est encore valable pour $n=0$, puisqu'alors $E(XY|[X=0]) = E(0|[X=0]) = 0 = n^2p$.

   La série

$$\sum_{n\geq 0} P(X=n)E(XY|[X=n]) = \sum_{n\geq 0} pn^2P(X=n)$$

   converge (absolument) puisque X admet un moment d'ordre 2. D'après le théorème de l'espérance totale, avec le système complet d'événements $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que XY possède une espérance et on a :

$$E(XY) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)E(XY|[X=n]).$$

   Cette somme se calcule alors rapidement par théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(XY) &= p\sum_{n=0}^{+\infty} n^2P(X=n) = pE(X^2) = p(V(X)+E(X)^2) \\ &= p\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^2}\right) = \frac{p(1-\alpha)(1+1-\alpha)}{\alpha^2} \end{aligned}$$

   Ainsi, on a :

$$\boxed{E(XY) \text{ existe et vaut } \frac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}.}$$

   (d) La variance de G existe car X et Y admettent une variance, et on a (par bilinéarité de la covariance) :

$$V(G) = V(2Y-X) = 4V(Y) + V(X) - 4\mathrm{Cov}(X,Y).$$

On a par la formule de Huygens :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) &= \frac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2} - \frac{1-\alpha}{\alpha} \times \frac{p(1-\alpha)}{\alpha} \\ &= \frac{p(1-\alpha)}{\alpha^2}\big((2-\alpha)-(1-\alpha)\big) = \frac{p(1-\alpha)}{\alpha^2}\end{aligned}$$

On a donc :

$$V(G) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}\big(4p(p+\alpha+\alpha p)+1-4p\big) = \frac{(1-\alpha)(4p^2(1+\alpha)+4p(\alpha-1)+1)}{\alpha^2}.$$

Ainsi on a la formule :

$$\boxed{V(G) = \frac{(1-\alpha)(4p^2(1+\alpha)+4p(\alpha-1)+1)}{\alpha^2}.}$$

5. (a) Rappelons que $X = T - 1$ où T suit une loi $\mathscr{G}(\alpha)$, et que la loi de Y sachant $[X = n]$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ (la loi de Y sachant $[X = 0]$ étant certaine égale à 0).

```
alpha = float(input('entrez la valeur de alpha :'))
p = float(input('entrez la valeur de p :'))
X = rd.geometric(alpha) - 1
Y = rd.binomial(X,p) # renvoie bien 0 si X=0
print(X)
print(Y)
```

(b) Que l'on peut compléter par :

```
G = 2*Y - X
print(G)
```