DS7

Concours blanc 1 type Edhec du 24/01/2023

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1] \ , \ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. On importe la librairie `numpy` en exécutant `import numpy as np`.

   (a) Compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de `f(x,n)`, où x et n sont donnés par l'utilisateur.

```python
def f(x,n):
    y = np.sum(------)
    return y
```

   (b) Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de déclarer `f`, en complétant la déclaration suivante où la fonction est toujours nommée `f`.

```python
def f(x,n):
    if x==1 :
        y = ------
    else :
        y = ------
    return y
```

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x \in [0,1]$, possède une unique solution α_n dans $[0,1]$.

3. (a) Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   (b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

4. (a) Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 < 1$.

   (b) Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.

   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$.

5. On suppose que f_n a été déclarée (cf question 1). On considère les commandes supplémentaires suivantes :

```python
n=int(input('entrer la valeur de n :'))
x=0
while f(x,n)<1 :
    x=x+0.001
print(x)
```

   Quel est le lien entre le résultat affiché et α_n ?

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires, notées $X_1, X_2, \ldots, X_n$, définie sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant toutes la même loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. On note M_n la variable aléatoire définie par $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire que pour tout ω dans Ω, on a $M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$. On admet que M_n est une variable aléatoire et on note F_{M_n} sa fonction de répartition.
   (a) Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F_{M_n}(x)$, puis montrer que M_n est une variable à densité.
   (b) En déduire une densité f_{M_n} de M_n.
   (c) Établir l'existence et donner la valeur de $E(M_n)$ et $E(M_n^2)$.
   (d) Donner, pour tout $\varepsilon > 0$, un majorant ne dépendant que de n et de ε de la probabilité $P\left((M_n - 1)^2 \geq \varepsilon^2\right)$.
   (e) Conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - 1| \geq \varepsilon) = 0$.

2. On pose $Y_n = n(1 - M_n)$
   (a) On importe les librairies `numpy` (à l'aide du raccourci `np`), `matplotlib.pyplot` (à l'aide du raccourci `plt`) et `numpy.random` (à l'aide du raccourci `rd`). On rappelle que dans la librairie `numpy.random`, la commande `rd.random(n)` simule n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.

   Compléter la déclaration de fonction `Python` suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y_n.

```python
def f(n):
        X = rd.random(n)
        Y = ------
        return Y
```

   (b) Voici deux scripts (celui de droite utilise la fonction `f` définie ci-dessus) :

```python
e = rd.exponential(1,10000)
s = np.linspace(0,10,11)
plt.hist(e,s,density='True',edgecolor='k')
plt.show()
```

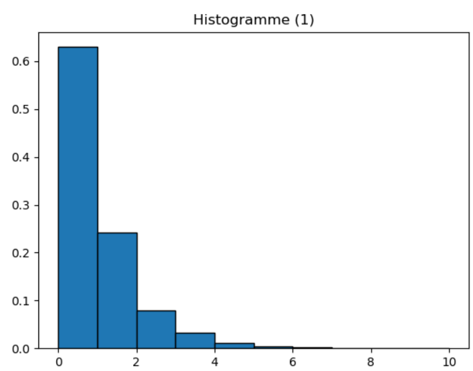
Script (1)

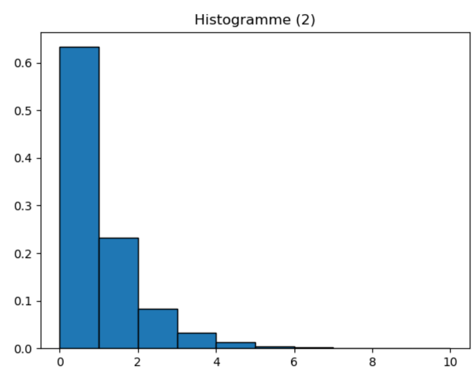
```python
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
Y = np.zeros(10000)
for k in range(10000):
    Y[k] = f(n)
s = np.linspace(0,10,11)
plt.hist(Y,s,density='True',edgecolor='k')
plt.show()
```

Script (2)

   Chacun de ces scripts simule 10000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0, 1]$, $]1, 2], \ldots,$ $]9, 10]$, et trace l'histogramme des fréquences correspondant (la largeur de chaque rectangle vaut 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).

   Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi exponentielle de paramètre 1, renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables suivent la même loi que Y_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.





Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des variables aléatoires (Y_n) ?

3. (a) Déterminer la fonction de répartition F_{Y_n} de la variable Y_n définie à la question 2.
   (b) Pour tout réel x positif ou nul, calculer $\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x)$.
   (c) Démontrer le résultat conjecturé à la question 2.(b).

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n+1$.

Pour tout k de $\{0, 1, \ldots, 2n+1\}$, on admet que l'expression $X^{2n+1} \times \dfrac{1}{X^k}$ désigne le polynôme X^{2n+1-k}.

On désigne par Id l'endomorphisme identique de E et on note f l'application qui à toute fonction P de E associe la fonction $f(P)$ définie par $f(P) = X^{2n+1}P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

1. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$. Montrer que $f(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_{2n+1-k} X^k$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E.
3. (a) Vérifier que $f \circ f = \text{Id}$.
   (b) En déduire les deux valeurs propres possibles de f.
4. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ un polynôme quelconque de $\text{Ker}(f - \text{Id})$.
   (a) Montrer que les a_k $(0 \leq k \leq 2n+1)$ sont solutions du système : $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $a_k = a_{2n+1-k}$.
   (b) En déduire une base de $\text{Ker}(f - \text{Id})$.
5. Déterminer de la même façon une base de $\text{Ker}(f + \text{Id})$.
6. On considère l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E associe le réel $\varphi(P, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k b_k$ où l'on a noté $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} b_k X^k$.
   (a) Montrer que φ est un produit scalaire défini sur E.
   (b) Établir alors que f est un endomorphisme symétrique, c'est-à-dire :
   $$\forall P, Q \in E, \quad \varphi(f(P), Q) = \varphi(P, f(Q)).$$
   (c) En déduire que $\text{Ker}(f - \text{Id})$ et $\text{Ker}(f + \text{Id})$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Problème

Partie 1

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0, 1[$.

1. Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\dbinom{n}{r} \sim \dfrac{n^r}{r!}$.
2. (a) Donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty} n^{r+2}\, x^n$.
   (b) En déduire que la série de terme général $\dbinom{n}{r} x^n$ est convergente.
3. (a) Pour tout entier naturel r, on pose : $S_r = \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$. Donner la valeur de S_0.
   (b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que : $(1-x)\, S_{r+1} = x\, S_r$.
   (c) En déduire que : $\forall x \in]0, 1[$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.
   (d) Donner enfin la valeur de $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Partie 2

On désigne par α et p deux réels de $]0,1[$. Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches. Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. A chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1-p$.
Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

- X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié.
- Y le nombre de manches gagnées par le joueur.
- G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires réelles définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. (a) Donner la loi de X. (On pourra noter D_k l'événement « Le joueur ne joue pas la k-ème manche »).
   (b) On pose $T = X+1$. Reconnaître la loi de T puis en déduire que l'on a $E(X) = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.
   (c) En déduire également la valeur de $V(X)$.

2. (a) Déterminer, pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=n]$.
   (b) En déduire à l'aide de la *partie 1* la loi de Y.

3. Calculer l'espérance de Y, puis montrer que $V(Y) = \dfrac{p\,(1-\alpha)\,(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$.

4. (a) Exprimer G en fonction de X et Y.
   (b) En déduire l'espérance de G.
   (c) On admet l'existence de $E(XY)$. Etablir que $E(XY) = \dfrac{p\,(1-\alpha)\,(2-\alpha)}{\alpha^2}$.
   (d) En déduire la variance de G.

5. (a) Compléter les commandes `Python` suivantes pour qu'elles simulent l'expérience aléatoire étudiée et affichent les valeurs prises par X et Y.

```python
alpha = float(input('entrer la valeur de alpha :'))
p = float(input('entrer la valeur de p :'))
X = -------
Y = -------
print(X)
print(Y)
```

   (b) Quelles commandes faut-il ajouter aux précédentes pour calculer et afficher la valeur prise par G ?
