DS8

Correction du concours blanc 2 type Maths II

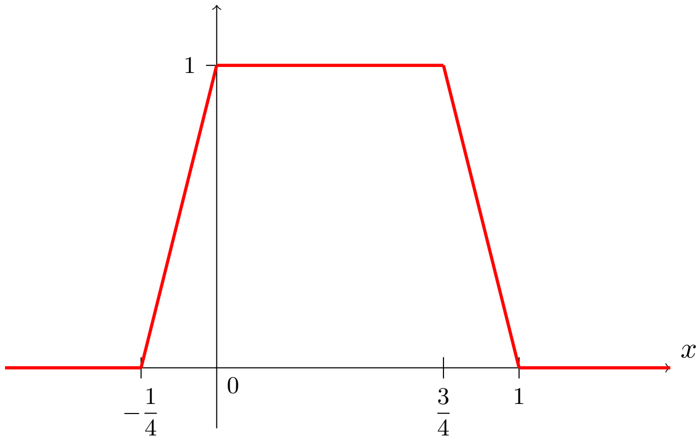
Partie I. Séries télescopiques

1. (a) La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente car son terme général est positif et équivalent au terme général $\frac{1}{n^2}$ d'une série de Riemann convergente.
En écrivant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
on obtient une somme télescopique :
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
La somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est donc égale à 1.

(b) Avec la décomposition de fractions ci-dessus, on reconnaît pour X la loi certaine égale à 1.

2. (a) La fonction f_n est positive lorsque $c_n \geq 0$ et continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points (au maximum deux : $-\frac{1}{n+1}$ et $\frac{n}{n+1}$, mais peut-être aucun (si $c_n = 1$)...).
Calculons l'intégrale de f_n sur $\mathbb{R}$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\frac{1}{n+1}}^{0} f_n(x)dx + \int_{0}^{\frac{n}{n+1}} f_n(x)dx + \int_{\frac{n}{n+1}}^{1} f_n(x)dx;$$
$$\int_{-\frac{1}{n+1}}^{0} f_n(x)dx = \frac{1}{n+1} + \left[\frac{n+1}{2}x^2\right]_{-\frac{1}{n+1}}^{0} = \frac{1}{2(n+1)}$$
$$\int_{0}^{\frac{n}{n+1}} f_n(x)dx = c_n \frac{n}{n+1}$$
$$\int_{\frac{n}{n+1}}^{1} f_n(x)dx = (n+1)\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{n}{n+1}}^{1} = (n+1)\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{n+1} + \frac{n^2}{2(n+1)^2}\right) = \frac{1}{2(n+1)}.$$
On a donc :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1 \iff \frac{1}{2(n+1)} + c_n\frac{n}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} = 1$$
$$\iff c_n \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \iff c_n = 1.$$
La fonction f_n est donc une densité de probabilité si et seulement si $c_n = 1$.
(Par ailleurs, f_n est continue sur $\mathbb{R}$).

Pour $n = 3$: $$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{4} \text{ ou } x > 1 \\ 1+4x & \text{si } -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 4-4x & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$



(b) Puisque f_n est nulle en dehors de $\left[-\dfrac{1}{n+1}, 1\right]$, la fonction de répartition F_n de Y_n est :

- nulle sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{n+1}\right]$,
- égale à 1 sur $[1, +\infty[$.

Par ailleurs :

- pour $-\dfrac{1}{n+1} \leq x \leq 0$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_{-\frac{1}{n+1}}^{x} (1+(n+1)t)dt = \left[t + \frac{n+1}{2}t^2\right]_{-\frac{1}{n+1}}^{x} \\ &= x + \frac{n+1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{n+1}{2}\left(-\frac{1}{n+1}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + x + \frac{n+1}{2}x^2 \end{aligned}$$

- pour $0 \leq x \leq \dfrac{n}{n+1}$:

$$F_n(x) = F_n(0) + \int_0^x c_n dt = \frac{1}{2(n+1)} + x$$

- pour $\dfrac{n}{n+1} \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= F_n\left(\frac{n}{n+1}\right) + \int_{\frac{n}{n+1}}^{x} (n+1)(1-t)dt = \frac{1+2n}{2(1+n)} + \left[(n+1)\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\right]_{\frac{n}{n+1}}^{x} \\ &= \frac{1+2n}{2(1+n)} + (n+1)\left(\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{n}{2(n+1)}\right)\right) \\ &= \frac{1-n}{2} + (n+1)x - \frac{n+1}{2}x^2. \end{aligned}$$

En résumé :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -\dfrac{1}{n+1} \\ \dfrac{1}{2(n+1)} + x + \dfrac{n+1}{2}x^2 & \text{si} \quad -\dfrac{1}{n+1} \leq x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2(n+1)} + x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{n}{n+1} \\ \dfrac{1-n}{2} + (n+1)x - \dfrac{n+1}{2}x^2 & \text{si} \quad \dfrac{n}{n+1} \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

(On pourra vérifier au brouillon qu'il y a bien continuité de F_n en chacun des quatre points x où $F_n(x)$ change d'expression.)

La fonction F_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) • Si $x < 0$, alors, comme $-\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ x \leq -\frac{1}{n+1} \quad \text{et donc } F_n(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

• Si $0 \leq x < 1$ alors de même :

$$\exists N' \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N',\ 0 \leq x \leq \frac{n}{n+1} \quad \text{et donc } F_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} + x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$$

• Si $x \geq 1$, alors : $F_n(x) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

En résumé :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

ce qui prouve la convergence en loi de (Y_n) vers une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$.

3. (a) Pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X_{n+1}}{n+1}\right| \geq \varepsilon\right) = 1 - \underbrace{F(\varepsilon(n+1))}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{F(-\varepsilon(n+1))}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

où F est la fonction de répartition de X (donc aussi celle de X_{n+1}). Ce qui prouve la convergence en probabilité de $\left(\dfrac{X_{n+1}}{n+1}\right)$ vers 0.

(b) Comme $X_1 \xrightarrow{P} X_1$ et $\dfrac{X_{n+1}}{n+1} \xrightarrow{P} 0$, par somme la suite de variables aléatoires (D_n) converge en probabilité vers X_1.

(c) En remarquant que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}\left(-\frac{X_{n+1}}{n+1} \leq x\right) = \mathrm{P}(-X_{n+1} \leq x(n+1)) = 1 - F(-x(n+1))$$

on obtient une densité de la variable aléatoire $-\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$:

$$g_{n+1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (n+1)f(-(n+1)t) \end{cases}$$

L'indépendance des variables X_1 et $-\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ permet alors d'utiliser le produit de convolution pour obtenir une densité f_{D_n} de D_n en notant que, f étant bornée, la fonction $f_{D_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous est bien définie et continue sauf en un nombre fini de points:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{D_n}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g_{n+1}(x-t)dt = (n+1)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f((n+1)(t-x))dt.$$

(d) Supposons que X suive la loi uniforme sur $[0,1]$. On peut choisir la densité :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

Celle-ci est bornée, ce qui permet d'appliquer les résultats précédents :

- La question (c) donne une densité de D_n ; or :

$$f(t) \times f\big((n+1)(t-x)\big) = 1 \iff \begin{cases} f(t) = 1 \\ f\big((n+1)(t-x)\big) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq (n+1)(t-x) \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ x \leq t \leq x + \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$$

et $f(t) \times f\big((n+1)(t-x)\big) = 0$ sinon.

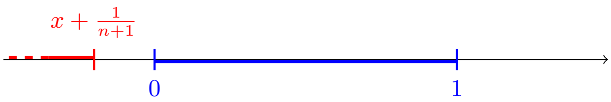
On est donc amené à déterminer l'intersection

$$[0,1] \cap \left[x, x + \frac{1}{n+1}\right]$$

qui est un intervalle borné (comme intersection de deux intervalles bornés), éventuellement vide, et dont on note L_x la longueur (différence entre les deux bornes si l'intervalle est d'intérieur non vide ; nulle s'il est vide ou réduit à un point). On aura alors :

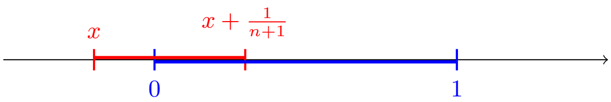
$$\forall x \in \mathbb{R},\ h_n(x) = (n+1) \times L_x.$$

- Si $x < -\dfrac{1}{n+1}$, l'intersection ci-dessus est vide :



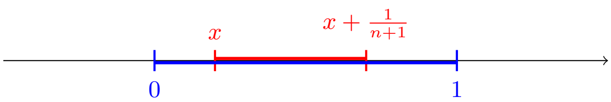
$$h_n(x) = 0$$

- Si $-\dfrac{1}{n+1} \leq x \leq 0$:



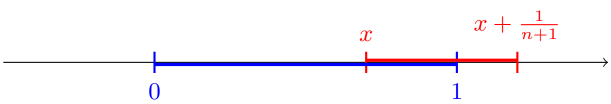
$$h_n(x) = (n+1)\left(x + \frac{1}{n+1} - 0\right) = (n+1)x + 1$$

- Si $0 \leq x \leq \dfrac{n}{n+1}$:



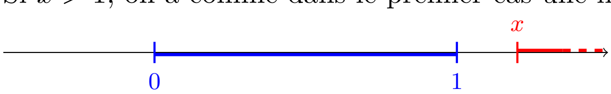
$$h_n(x) = (n+1)\left(x + \frac{1}{n+1} - x\right) = 1$$

- Si $\dfrac{n}{n+1} \leq x \leq 1$:



$$h_n(x) = (n+1)(1-x).$$

- Si $x > 1$, on a comme dans le premier cas une intersection vide :



$$h_n(x) = 0$$

Il s'agit de la densité f_n de la question 2.

- D'après (b), (D_n) converge en loi vers la variable $X_1 \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, et donc aussi vers X (qui est de même loi que X_1).

On a donc retrouvé le résultat de la question 2.(c).

4. (a) Les deux variables aléatoires $\dfrac{X_n}{n}$ et $\dfrac{X_{n+1}}{n+1}$ vérifient une loi normale (chacune transformée affine d'une variable aléatoire suivant une loi normale). Elles sont de plus indépendantes (par lemme de coalition), donc par stabilité additive de la loi normale, U_n suit une loi normale, de paramètres :

$$E(U_n) = \frac{1}{n}E(X_n) - \frac{1}{n+1}E(X_{n+1}) = 0 \quad ;$$

$$\mathrm{V}(U_n) = \frac{1}{n^2}\mathrm{V}(X_n) + \frac{1}{(n+1)^2}\mathrm{V}(X_{n+1}) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(b) Avec les notations de la question 3.:

$$\sum_{n=1}^{N} U_n = X_1 - \frac{X_{N+1}}{N+1} = D_N$$

La variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$ possède une densité bornée, donc d'après 3.(b), la suite $(D_N)_{N\geq 1}$ converge en loi vers X.
La série $\sum\limits_{n\geq 1} U_n$ converge donc en loi vers $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$.

(c) i. Par indépendance des variables aléatoires U'_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ et par stabilité additive de la loi normale :

$$T'_n \hookrightarrow \mathscr{N}\left(0, {\sigma_n}^2\right) \qquad \text{avec } \sigma_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}.$$

La fonction de répartition de T'_n est donnée par :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ F_{T'_n}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)^2\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sigma_n}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)\mathrm{d}u = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_n}\right)\end{aligned}$$

(avec le changement de variable $u = \dfrac{t}{\sigma_n}$ affine donc licite). Par ailleurs :

$${\sigma_n}^2 = 2\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(2) - 1 = \frac{\pi^2}{3} - 1.$$

Par continuité de Φ (sur $\mathbb{R}$) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{T'_n}(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \qquad \text{où} \quad \sigma = \sqrt{\zeta(2)-1}$$

ce qui prouve que la suite T'_n converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale $\mathscr{N}\left(0, \dfrac{\pi^2}{3} - 1\right)$.

ii. Contrairement à la convergence d'une *suite* de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la convergence d'une *série* de variables aléatoires $\sum_{n\geq 1} U_n$ ne dépend pas que des lois des variables U_n $(n\in\mathbb{N}^*)$; elle est liée à la loi de la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} U_k$ qui elle-même ne peut se déduire de la seule connaissance des lois des variables U_n $(n\in\mathbb{N}^*)$, sauf en cas d'indépendance.
Or dans cet exemple les variables aléatoires U'_n $(n\in\mathbb{N}^*)$ sont indépendantes, mais les variables U_n $(n\in\mathbb{N})$ ne le sont pas. Plus précisément, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, les variables U_n et U_{n+1} ne sont pas indépendantes puisque :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U_n,U_{n+1}) &= \mathrm{Cov}\left(\frac{X_n}{n}-\frac{X_{n+1}}{n+1},\frac{X_{n+1}}{n+1}-\frac{X_{n+2}}{n+2}\right)\\ &= -\frac{1}{(n+1)^2}V(X_{n+1}) = -\frac{1}{(n+1)^2}\neq 0\end{aligned}$$

par bilinéarité et indépendance de X_i et X_j pour $i\neq j$.

Partie II. Séries harmoniques « lacunaires »

5. (a) $h_n(\mathscr{D}) = \displaystyle\sum_{k\in\{1,\dots,n\},k\in\mathscr{D}} \frac{1}{k} = \sum_{\ell=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{\ell^2}$

(b) Comme $\lfloor x\rfloor \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (ce que l'on déduit de l'inégalité $x-1\leq\lfloor x\rfloor$):

$$h_n(\mathscr{D}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \zeta(2).$$

(c)
- Si $m=q^6$ avec $q\in\mathbb{N}^*$, alors $m=\left(q^3\right)^2\in\mathscr{D}$ et $m=\left(q^2\right)^3\in\mathscr{T}$.
- Réciproquement, supposons que m est à la fois un carré et un cube :

$$\exists n,p\in\mathbb{N}^*,\ m=n^2=p^3.$$

En posant $q=\dfrac{n}{p}$ $(\in\mathbb{Q})$, on a : $q^6=\dfrac{\left(n^2\right)^3}{\left(p^3\right)^2}=\dfrac{m^3}{m^2}=m$.
De plus, $q^2=\dfrac{n^2}{p^2}=p$ (car $n^2=p^3$) donc q^2 est entier.
Avec la propriété admise dans l'énoncé, comme q n'est pas irrationnel et q^2 est entier, q est entier.

(d) En distinguant chacun des quatre cas « $k\in\mathscr{D}$ et $k\in\mathscr{T}$ », « $k\in\mathscr{D}$ et $k\notin\mathscr{T}$ », « $k\notin\mathscr{D}$ et $k\in\mathscr{T}$ » et « $k\notin\mathscr{D}$ et $k\notin\mathscr{T}$ », on vérifie que :

$$\mathbb{1}_{\mathscr{D}\cup\mathscr{T}}=\mathbb{1}_{\mathscr{D}}+\mathbb{1}_{\mathscr{T}}-\mathbb{1}_{\mathscr{D}\cap\mathscr{T}}$$

et on obtient alors, avec la même explication qu'en (a) :

$$h_n(\mathscr{D}\cup\mathscr{T})=\sum_{\substack{k\in\{1,\dots,n\}\\ k\in\mathscr{D}}}\frac{1}{k}+\sum_{\substack{k\in\{1,\dots,n\}\\ k\in\mathscr{T}}}\frac{1}{k}-\sum_{\substack{k\in\{1,\dots,n\}\\ k\in\mathscr{D}\cap T}}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\zeta(2)+\zeta(3)-\zeta(6).$$

6. (a) Pour tout $t\in[n,n+1]$:

$$0\leq\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2t-1}\leq\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}\leq\frac{2}{(2n-1)^2}.$$

On obtient donc l'encadrement demandé par croissance de l'intégrale.

(b) L'égalité demandée semblant quelque peu artificielle, partons du membre de droite.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} u_k &= \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \int_k^{k+1} \frac{1}{2k-1} dt - \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \int_k^{k+1} \frac{1}{2t-1} dt \\
&= \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \frac{1}{2k-1} - \int_1^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1} \frac{1}{2t-1} dt \\
&= \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \frac{1}{2k-1} - \int_1^{\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor} \frac{1}{2t-1} dt
\end{aligned}$$

et donc :

$$\sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} u_k + \int_1^{\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor} \frac{1}{2t-1} dt = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \frac{1}{2k-1} = \sum_{\substack{\ell \in \{1,\dots,n\} \\ \ell \text{ impair}}} \frac{1}{\ell} = h_n(\mathscr{I}).$$

En effet, $2\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor - 1$ est le plus grand entier impair inférieur ou égal à n (il vaut $n-1$ si n est pair ; n si n est impair) :

- si $n = 2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) : $2\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor - 1 = 2\left\lfloor p + \dfrac{1}{2} \right\rfloor - 1 = 2p - 1 = n - 1$;
- si $n = 2p+1$: $2\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor - 1 = 2\lfloor p+1 \rfloor - 1 = 2(p+1) - 1 = 2p+1 = n$.

(c) L'inégalité classique

$$\forall x > 0,\ \ln(x) \leq x - 1$$

que l'on retrouve par exemple par concavité du logarithme, donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{1}{n}\left(2\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right) \leq \frac{2}{n}\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - \frac{1}{n} - 1 \leq \frac{n+3}{n} - \frac{1}{n} - 1 = \frac{2}{n}.$$

(d) La série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{2}{(2n-1)^2}$ est convergente car son terme général (positif) est équivalent à $\dfrac{1}{2n^2}$ et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

L'encadrement établi en (a) donne donc la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$.

Avec l'égalité établie en (b) :

$$\begin{aligned}
h_n(\mathscr{I}) - \ln(\sqrt{n}) &= \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} u_k + \int_1^{\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor} \frac{1}{2t-1} dt - \ln(\sqrt{n}) \\
&= \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} u_k + \left[\frac{1}{2} \ln(2t-1) \right]_1^{\left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor} - \ln(\sqrt{n}) \\
&= \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} u_k + \frac{1}{2} \ln\left(2 \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right) \underbrace{- \ln(\sqrt{n})}_{= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} u_k}_{\substack{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \delta \\ \text{car } \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}} + \underbrace{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{n}\left(2 \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right)}_{\substack{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ d'après (c) et} \\ \text{le théorème d'encadrement}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \delta.
\end{aligned}$$

(e) D'après la majoration de u_n établie en question (a), il suffirait de prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{(2k-1)^2} \leq \frac{1}{2n-1}.$$

On peut utiliser la technique suivante assez classique de comparaison série/intégrale. La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{2}{(2t-1)^2} \end{array} \right.$ étant décroissante, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t) dt$$

donc en sommant ces inégalités pour $k \in [n+1,+\infty[$ et avec la relation de Chasles :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{(2k-1)^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{2}{(2t-1)^2} dt = \frac{1}{2n-1}.$$

(f) Réutilisons le calcul fait en question (d) :

$$\begin{aligned}
\delta - (h_n(\mathscr{I}) - \ln(\sqrt{n})) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} u_k - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{n}\left(2 \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right) \\
&= \sum_{k=\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1}^{+\infty} u_k - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{n}\left(2 \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor - 1\right)\right)
\end{aligned}$$

- Cette dernière somme étant positive, la question (c) donne immédiatement :

$$-\frac{1}{n} \leq \delta - (h_n(\mathscr{I}) - \ln(\sqrt{n})).$$

- De même le logarithme dans l'égalité ci-dessus étant positif, la question (e) donne :

$$\delta - (h_n(\mathscr{I}) - \ln(\sqrt{n})) \leq \sum_{k=\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1}^{+\infty} u_k \leq \frac{1}{2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1}$$

En utilisant l'inégalité $x-1 \leq \lfloor x \rfloor$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1} \leq \frac{1}{2\left(\frac{n+1}{2}-1\right)-1} = \frac{1}{n-2}$$

et donc :

$$\delta - (h_n(\mathscr{I}) - \ln(\sqrt{n})) \leq \frac{1}{n-2}.$$

Remarque. On peut aussi éviter l'utilisation de l'inégalité« $x-1 \leq \lfloor x \rfloor$ » (un peu « grossière » ici puisque utilisée avec x entier ou demi-entier) en distinguant les cas selon la parité de n. On obtient une inégalité légèrement meilleure (calcul fait en fin de question 6.(b)):

$$\ldots \leq \frac{1}{n-1} \text{ si } n \text{ est pair,} \qquad \ldots \leq \frac{1}{n} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

(g) i. On a :

$$\frac{1}{n-2} > 0,2 \iff n-2 < 5 \iff n < 8.$$

Pour `eps=0.2`, le programme affectera à `s` successivement les valeurs de :

$$h_3(\mathscr{I}) - \ln(\sqrt{3}) \quad ; \quad h_5(\mathscr{I}) - \ln(\sqrt{5}) \quad ; \quad h_7(\mathscr{I}) - \ln(\sqrt{7}).$$

ii. On peut procéder ainsi.

```python
def delta(eps):
    n = 3
    s = 1+1/3-(np.log(3)/2)
    while 1/(n-2)>eps :
        n = n+2
        s = s+1/n+(np.log((n-2)/n)/2)
    return s
```

iii. L'encadrement établi en question (f) donne :

$$\frac{1}{n-2} \leq \varepsilon \implies -\varepsilon \leq -\frac{1}{n-2} \leq -\frac{1}{n} \leq \delta - (h_n(\mathscr{I}) - \ln(\sqrt{n})) \leq \frac{1}{n-2} \leq \varepsilon$$

Il existe donc un entier n ($n \geq \frac{1}{\varepsilon} + 2$) tel que $-\varepsilon \leq \delta - (h_n(\mathscr{I}) - \ln(\sqrt{n})) \leq \varepsilon$, ce qui assure la précision souhaitée.

Partie III. Séries de Riemann alternées

7. La technique développée dans cette question est appelée « transformation d'Abel ».

(a) i. En remarquant que :

$$\forall k \geq 2,\ x_k = s_k - s_{k-1} \quad (\text{et } x_1 = s_1)$$

on a, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^\beta} &= \frac{s_1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{k^\beta} = \frac{s_1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \frac{s_k}{k^\beta} - \sum_{k=2}^{n} \frac{s_{k-1}}{k^\beta} \\
&= s_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{s_k}{k^\beta} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{(k+1)^\beta} = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k^\beta} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{(k+1)^\beta} \\
&= \frac{s_n}{n^\beta} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right).
\end{aligned}$$

ii. Prouvons la convergence (pour $n \to +\infty$) de chacun des deux termes ci-dessus :

$$\frac{s_n}{n^\beta} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n-1} s_k \left(\frac{1}{k^\beta} - \frac{1}{(k+1)^\beta} \right).$$

- Avec la majoration de $|s_n|$ supposée dans l'énoncé, on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \left| \frac{s_n}{n^\beta} \right| \leq \underbrace{M n^{\alpha-\beta}}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ n\to+\infty \\ \text{car } \alpha-\beta<0}}$$

donc par le théorème d'encadrement :

$$\frac{s_n}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- La question est donc de prouver la convergence de la série :

$$\sum_{n\geq 1} s_n \left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} \right).$$

On va en montrer la convergence absolue (qui implique la convergence).
Avec l'hypothèse de l'énoncé sur s :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |s_n| \overbrace{\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} \right)}^{(\geq 0)} \leq M\ n^\alpha \left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} \right).$$

Déterminons un équivalent de ce majorant :

$$n^\alpha \left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} \right) = n^\alpha \frac{(n+1)^\beta - n^\beta}{\big(n(n+1)\big)^\beta} = n^{\alpha+\beta} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - 1}{\big(n(n+1)\big)^\beta}$$

$$\sim n^{\alpha+\beta} \frac{\frac{\beta}{n}}{n^{2\beta}} = \frac{\beta}{n^{1+\beta-\alpha}}$$

(on a utilisé : $(1+x)^\beta - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \beta x$)

La série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+\beta-\alpha}}$ est convergente car $1+\beta-\alpha > 1$ ($\beta > \alpha$), donc par critères de comparaisons des séries à terme général positif, on obtient la convergence annoncée.

En conclusion, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{n^\beta}$ est convergente (mais peut-être pas absolument !).

(b) En prenant $(x_n) = ((-1)^n)$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = -1+1-1+1-\dots(-1)^n = \begin{cases} 0 \\ \text{ou} \\ -1 \end{cases}$$

et en prenant $M = 1$ et α un réel vérifiant $0 < \alpha < x$ (par exemple $\alpha = \frac{x}{2}$):

$$\forall \in \mathbb{N}^*,\ |s_n| = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \text{ou} \\ 1 \end{matrix} \right\} \leq \underbrace{M\ n^\alpha}_{\substack{=1 \text{ pour } n=1 \\ \geq 1 \text{ pour tout } n}}.$$

On choisit bien sûr $\beta = x$ ($> \alpha$), et la question précédente nous donne la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ pour tout $x > 0$.

8. (a) Déterminons d'abord la loi de S_n :
   - Comme S_n est somme de n nombres valant chacun 1 ou -1 :
   $$S_n(\Omega) \subset [\![-n, n]\!].$$
   (Mais il ne s'agit pas d'une égalité ; en effet S_n ne prend parmi les valeurs de cet intervalle que celles de même parité que n.)
   - Pour tout k, la variable aléatoire $Y_k = \dfrac{X_k+1}{2}$ suit la loi $\mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
   Les variables aléatoires Y_k ($k \in \mathbb{N}^*$) étant indépendantes, la stabilité additive de la loi binomiale donne :
   $$\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{2}S_n + \frac{n}{2} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$$
   c'est-à-dire :
   $$\forall j \in [\![0, n]\!],\ \mathrm{P}(S_n = 2j - n) = \binom{n}{j}\frac{1}{2^n}.$$

   Appliquons maintenant le théorème de transfert :
   $$\begin{aligned} E\left(\mathrm{e}^{tS_n}\right) &= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{t(2j-n)}\binom{n}{j}\frac{1}{2^n} = \mathrm{e}^{-tn}\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{2t}\right)^j\binom{n}{j} \\ &= \mathrm{e}^{-tn}\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\mathrm{e}^{2t}\right)^j 1^{n-j} = \mathrm{e}^{-tn}\frac{1}{2^n}\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)^n \\ &\qquad \text{(formule du binôme de Neton)} \\ &= \cancel{\mathrm{e}^{-tn}}\frac{1}{2^n}\left(\cancel{\mathrm{e}^t}\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right)\right)^n = \left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

   (b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Travaillons avec les sommes partielles des séries exponentielles intervenant ici ; pour $n \in \mathbb{N}$:
   $$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-t)^k}{k!}\right) = \overbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k+(-t)^k}{k!} = \sum_{\substack{k\in\{0,\dots,n\}\\ k \text{ pair}}}\frac{t^k}{k!}}^{t^k + (-t)^k = \begin{cases} 2t^k & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}} = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\frac{t^{2\ell}}{(2\ell)!}.$$

   Or: $\forall \ell \in \mathbb{N},\ (2\ell)! \geq 2^\ell\ \ell!$; en effet, il y a égalité pour $\ell = 0$, et pour $\ell \geq 1$:
   $$(2\ell)! = \ell!\ \overbrace{\underbrace{(\ell+1)}_{\geq 2}\dots\underbrace{(\ell+\ell)}_{\geq 2}}^{\ell \text{ facteurs}}.$$

   On a donc l'inégalité :
   $$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-t)^k}{k!}\right) \leq \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\frac{(t^2)^\ell}{2^\ell\ \ell!} = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\frac{\left(\dfrac{t^2}{2}\right)^\ell}{\ell!}.$$

   Par passage à la limite quand $n \to +\infty$:
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \leq \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}.$$

(c) Appliquons l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive e^{tS_n} :

$$\overbrace{P(S_n > s) = P\left(e^{tS_n} > e^{ts}\right)}^{\text{croissance de exp ; } t>0} \leq \underbrace{\frac{E\left(e^{tS_n}\right)}{e^{ts}} \leq \frac{\left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)^n}{e^{ts}}}_{\text{avec les questions (a) et (b)}} = \exp\left(\frac{nt^2}{2} - ts\right).$$

(d) L'inégalité prouvée en question précédente est vraie pour tout $t > 0$ mais le membre de gauche ne dépend pas de t. Or le membre de droite est minimal pour $t = \frac{s}{n}$ (il suffit de faire le tableau de variations de $t \mapsto \frac{nt^2}{2} - ts$). Donc :

$$P(S_n > s) \leq \exp\left(\frac{n\left(\frac{s}{n}\right)^2}{2} - \left(\frac{s}{n}\right)s\right) = \exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right).$$

Par ailleurs :

$$P(|S_n| > s) = P(S_n > s) + P(S_n < -s)$$

et on vérifie que les deux probabilités $P(S_n > s)$ et $P(S_n < -s)$ sont égales en utilisant la loi de S_n déterminée en (a) :

$$\begin{aligned}\forall j \in [\![0, n]\!],\ P(S_n = n - 2j) = P(S_n = 2(n-j) - j) &= \binom{n}{n-j}\frac{1}{2^n}\\ &= \binom{n}{j}\frac{1}{2^n} = P(S_n = 2j - n)\end{aligned}$$

et donc : $\quad \forall i \in S_n(\Omega),\ P(S_n = i) = P(S_n = -i).$

On conclut :

$$P(|S_n| > s) \leq 2\exp\left(-\frac{s^2}{2n}\right).$$

9. (a) La stabilité d'une tribu par unions et intersections dénombrables justifie l'appartenance de $\mathscr{C}_\alpha$ à $\mathscr{A}$.

(b) Supposons $\alpha > \frac{1}{2}$. D'après 8.(d) :

$$\forall n \geq 1,\ P(|S_n| > n^\alpha) \leq 2\exp\left(-\frac{1}{2}n^{2\alpha-1}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n^{2\alpha-1}} = 2\ q^{n^\beta}$$

avec $q = \frac{1}{\sqrt{e}} > 0$ et $\beta = 2\alpha - 1 > 0$. Par croissances comparées :

$$\frac{q^{n^\beta}}{n^2} = \left(\frac{q^n}{n^{\frac{2}{\beta}}}\right)^\beta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par comparaison avec la série de Riemann convergente $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, la série à terme général positif $\sum_{n\geq 1} q^{n^\beta}$ est convergente et, avec l'inégalité ci-dessus, il en est donc de même de la série à terme général positif $\sum_{n\geq 1} P(|S_n| > n^\alpha)$.

(c) La suite d'événements $\left(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} (|S_k| > k^\alpha)\right)_{n\geq 1}$ est décroissante :

$$\forall n \geq 1,\ \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} (|S_k| > k^\alpha) \subset \bigcup_{k=n}^{+\infty} (|S_k| > k^\alpha).$$

Le théorème de la limite monotone donne donc :

$$\mathrm{P}(C_\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} (|S_k| > k^\alpha)\right).$$

De plus :

$$0 \leq \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} (|S_k| > k^\alpha)\right) \leq \underbrace{\sum_{k\geq n} \mathrm{P}\Big((|S_k| > k^\alpha)\Big)}_{\substack{\longrightarrow\limits_{n\to+\infty} 0 \\ \text{(reste d'une série convergente)}}}$$

et on conclut avec le théorème d'encadrement que C_α est de probabilité nulle.

10. (a) Soit $\alpha \in [0, 1[$.
Remarquons d'abord que :

$$\omega \in \mathscr{C}_\alpha \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geq n,\ |S_k(\omega)| > k^\alpha.$$

Soit $\omega \in \overline{\mathscr{C}_\alpha}$. Écrivons la négation de l'assertion précédente :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |S_n(\omega)| \leq n^\alpha.$$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = X_n(\omega) \quad ; \quad s_n = S_n(\omega) \quad ; \quad M = 1 \quad ; \quad \beta = 1 \text{ (donc } \beta > \alpha)$$

les hypothèses de la question 7. sont vérifiées.

(L'inégalité $|s_n| \leq Mn^\alpha$ n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang, ce qui ne change rien au raisonnement car elle n'a été utilisée en question 7. qu'au voisinage de $+\infty$; si on veut chipoter on prendra $M = \max\left(|s_1|, \dfrac{|s_2|}{2^\alpha}, \dots, \dfrac{|s_{N-1}|}{(N-1)^\alpha}, 1\right)$ de sorte que l'inégalité soit vraie dès le rang $n = 1$.)

On en déduit avec 7.(a).ii. la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x_n}{n^\beta} = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{X_n(\omega)}{n}$. Autrement dit : $\omega \in \mathscr{C}$.

(b) Soit $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$ (par exemple $\alpha = \dfrac{3}{4}$).
D'après la question 9., $\mathrm{P}(C_\alpha) = 0$ donc $\mathrm{P}\left(\overline{C_\alpha}\right) = 1$.
Donc avec l'inclusion prouvée en question 10.(a) et par croissance de P: $\mathrm{P}(\mathscr{C}) = 1$.

(c) • Si $\omega \in \mathscr{C}$, par définition de K, on a $K(\omega) - K_n(\omega) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ c'est-à-dire :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N,\ |K(\omega) - K_n(\omega)| \leq \varepsilon.$$

Or par définition de $E(\varepsilon)$:

$$\omega \in E(\varepsilon) \iff \forall N \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \geq N,\ |K(\omega) - K_n(\omega)| > \varepsilon$$

ce qui est exactement la négation de l'assertion précédente.
Par conséquent :

$$\omega \in E(\varepsilon) \implies \omega \notin \mathscr{C}, \quad \text{c'est-à-dire :} \quad E(\varepsilon) \subset \overline{\mathscr{C}}$$

et on en déduit :

$$\mathrm{P}\big(E(\varepsilon)\big) \leq \mathrm{P}\left(\overline{\mathscr{C}}\right) = 1 - \mathrm{P}(\mathscr{C}) = 0 \quad \text{et donc} \quad \mathrm{P}\big(E(\varepsilon)\big) = 0.$$

- Comme en question 9.(c), le théorème de la limite monotone donne :

$$\lim_{N \to +\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} (|K - K_n| > \varepsilon)\right) = \mathrm{P}\big(E(\varepsilon)\big) = 0.$$

En écrivant, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \mathrm{P}\big(|K - K_N| > \varepsilon\big) \leq \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} (|K - K_n| > \varepsilon)\right)$$

le théorème d'encadrement donne :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathrm{P}\big(|K - K_N| > \varepsilon\big) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui signifie que la suite de variable aléatoire (K_n) converge en probabilité vers K.

11. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable B_k est d'espérance $\dfrac{1}{2}$ et de variance $\dfrac{1}{4}$.
Par linéarité de l'espérance et propriété de la variance (utilisant l'indépendance des variables B_k $(k \in \{1, \dots, n\})$):

$$E(H_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad ; \quad \mathrm{V}(H_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\zeta(2)}{4} = \frac{\pi^2}{24}.$$

(b) Soit $r > 0$. Comme $E(H_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$:

$$\exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N,\ E(H_n) - r > 0$$

On peut alors utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev :

$$\mathrm{P}\big(|H_n - E(H_n)| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\mathrm{V}(H_n)}{\varepsilon^2} \quad \text{avec } \varepsilon = E(H_n) - r$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathrm{P}(H_n \leq r) &= \mathrm{P}\big(E(H_n) - H_n \geq E(H_n) - r\big) \\ &\leq \mathrm{P}\big(|H_n - E(H_n)| \geq E(H_n) - r\big) \\ &\leq \frac{\mathrm{V}(H_n)}{\big(E(H_n) - r\big)^2} \end{aligned}$$

Avec les deux limites trouvées en (a) :

$$\frac{\mathrm{V}(H_n)}{\big(E(H_n) - r\big)^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \left(\text{« } \frac{\ell}{+\infty} \text{ » avec } \ell \in \mathbb{R}^*\right)$$

On conclut avec le théorème d'encadrement que :

$$\forall r > 0,\ \mathrm{P}(H_n \leq r) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci prouve notamment que la série $\sum_{n \geq 1} \dfrac{B_n}{n}$ ne converge pas en loi
(la limite simple de la suite de fonctions (F_{H_n}) ne tend pas vers 1 en $+\infty$).

(c) i. En notant que $\dfrac{1-(-1)^k}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$, on peut proposer le programme suivant :

```
def simul(n,p):
    y = np.zeros(p)
    for i in range(p):
        for k in range(1,n+1):
            y[i] = y[i] + (rd.binomial(1,0.5) + ((-1)**k-1)/2)/k
    return y
```

ii. On peut utiliser les commandes suivantes :

```
n = 50   # ou 100 ou 200
u = simul(n,10000)
plt.hist(u,10,density = 'True', edgecolor = 'k')
```

iii. La similitude de ces histogrammes suggère que les lois des variables $H_n - h_n(\mathcal{I})$ sont proches pour n assez grand. Ce qui suggère en effet une convergence en loi pour cette suite de variables aléatoires.

12. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec la même astuce que pour le programme ci-dessus donne :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathscr{I}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+X_k}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} = \frac{K_n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}.$$

(b) Nous savons (question 10.(c)) que (K_n) converge en probabilité vers K. D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, qui est bien une série convergente d'après 7.(b). Mais en voyant cette suite de réels comme une suite de variables aléatoires certaines, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \xrightarrow{P} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

La convergence en probabilité étant compatible avec la somme, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathscr{I}) \xrightarrow{P} \frac{K}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Et par le résultat admis par l'énoncé :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathscr{I}) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{K}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

D'autre part, les variables aléatoires B'_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ *(astuce utilisée en question 8.(a))*, c'est-à-dire la même loi que B_n, et sont indépendantes (car les X_n le sont). Les lois des variables $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{B'_k}{k} - h_n(\mathscr{I})$ et $H_n - h_n(\mathscr{I})$ sont donc les mêmes. Et comme la convergence en loi ne regarde que les lois de variables en jeu, on peut conclure que :

$$H_n - h_n(\mathscr{I}) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{K}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Remarque. Il n'est en fait pas trop difficile de prouver que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$. Voir à ce sujet par exemple l'exercice 15 du TD2.

Extraits commentés du rapport du Jury

> “
>
> *Le poids des questions de* `Python` *était assez élevé puisqu'il représentait 14% des points de barême.*

Le rapport stipule un peu plus loin qu'il fallait avoir 60% du total des points pour avoir 20. Et donc un rapide calcul nous indique que les questions de `Python` rapportaient environ 4/20. Si l'on considère qu'il faut maximum une demi-heure pour traiter intégralement ces questions, c'est plutôt bien payé !

> “
>
> *La recherche d'une solution à une question ne doit pas dépasser quatre à cinq minutes. Au-delà de ce délai, en cas d'échec, le candidat doit admettre le résultat de cette question (si la réponse figure dans l'énoncé), passer à la question suivante sans éprouver un sentiment de déstabilisation ou de découragement. Autrement dit, le jury recommande aux futurs candidats de faire preuve d'une grande ténacité.*

Tout est dit : on ne sèche pas un quart d'heure sur une question pour laquelle on n'a aucune piste. Bien entendu, la rédaction complète de la réponse à une question peut prendre davantage de temps, mais même là, on conseille de ne pas trop dépasser les 10 minutes, surtout en cas de calculs dont vous ne voyez pas la fin.

> “
>
> *Le jury recommande aux futurs candidats de prendre le temps de lire l'ensemble du sujet, non seulement pour s'en imprégner, mais aussi pour pointer les questions qui paraissent faciles à résoudre, lesquelles ne se situent pas nécessairement dans la première partie du sujet.*

À noter tout de même que 30% du barème total était attribué à cette première partie, ce qui signifie qu'il était possible d'avoir la moyenne ou presque uniquement en traitant cette partie.
