DS8

Correction du concours blanc 2 type EM Lyon/Ecricome

Exercice 1 (Ecricome 2020)

1. (a) On a $\boxed{T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1}$ et $\boxed{T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^4 - 2X - X = 4X^3 - 3X.}$

(b) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{H}_n$: « $\deg(T_n) = n$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Init. Puisque $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vraies.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ vraies. On a :

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\deg(2XT_{n+1}) = 1 + n + 1 = n + 2$ et $\deg(-T_n) = n$. D'où $\deg(T_{n+1}) = \max(\deg(2XT_{n+1}, -T_n) = n + 2$ et $\mathcal{H}_{n+2}$ vraie.

Concl. Par principe de récurrence, on a $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \deg(T_n) = n.}$

(c) $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ échelonnés en degré. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$, de cardinal $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Par conséquent, $\boxed{(T_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On applique la formule rappelée avec $a = (n+1)x, b = x$:

$$\cos((n+1)x)\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\cos((n+1)x + x) + \cos((n+1)x - x)\right).$$

D'où :

$$\boxed{\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos((n+1)x)\cos(x).}$$

(b) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{H}_n$: « $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Init. Puisque $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, on a $T_0(\cos(x)) = 1 = \cos(0)$ et $T_1(\cos(x)) = \cos(x) = \cos(1 \times x)$. Donc $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vraies.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ vraies. On a :

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On évalue cette expression en $X = \cos(x)$:

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(x)) &= 2\cos(x)T_{n+1}(\cos(x)) - T_n(\cos(x)) \\ &= 2\cos(x)\cos((n+1)x)) - \cos(nx) \quad \text{par hyp. de réc.} \\ &\overset{2.(a)}{=} \cos((n+2)x) + \cos(nx) - \cos(nx) = \cos((n+2)x) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie.

Concl. Par principe de récurrence, on a $\boxed{T_n(\cos(x)) = \cos(nx) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}.}$

3. (a) Montrons tout d'abord la convergence de l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La fonction $g_k : t \mapsto \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ étant de la parité de k (paire si k paire, impaire si k impaire), l'intégrale I_k est de même nature que $J_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Comme de plus g_k est continue sur $[0, 1[$, l'intégrale J_k est généralisée en 1. On a :

- pour tout $t \in [0, 1[$, $g_k(t) = \dfrac{t^k}{\sqrt{(1+t)(1-t)}} \underset{t \to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$;

- $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \geq 0$ pour tout $t \in [0,1[$;
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ est une intégrale de Riemann en 1, d'exposant $\alpha = 1/2 < 1$. Elle converge donc.

Par théorème de comparaison, l'intégrale J_k converge pour tout $k \in \mathbb{N}$, et il en est donc de même de I_k par parité.

Soit à présent $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. On a $P \times Q \in \mathbb{R}[X]$, de sorte qu'il existe $d \geq 0$ et $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ tels que $P \times Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Par linéarité des intégrales généralisées (toutes les intégrales I_k convergent), on en déduit que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{d} a_k I_k.$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2\text{, l'intégrale } \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

(b) On pose φ l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$.

- Avec 3(a), on sait que φ est bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- **Linéarité à gauche.** Soit $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha P + \beta R, Q) &= \int_{-1}^{1} \frac{(\alpha P(t) + R(t))Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&\underset{\text{Tout conv.}}{=} \alpha \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \beta \int_{-1}^{1} \frac{R(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= \alpha\varphi(P,Q) + \beta\varphi(R,Q).
\end{aligned}$$

  Donc φ est linéaire à gauche.
- **Symétrie.** Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\varphi(Q,P) = \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \varphi(P,Q).$$

  Ainsi φ est symétrique. Comme φ est aussi linéaire à gauche, elle est bilinéaire.
- **Positif.** On a :

$$\varphi(P,P) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \geq 0$$

  car $\frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0$ pour tout $t \in]-1,1[$. φ est positive.
- **Défini positif.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$. On a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = 0.$$

  La fonction $t \mapsto \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est **continue** et **positive** sur $]-1,1[$. Par théorème de nullité de l'intégrale, on en conclut que :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \forall t \in]-1,1[, \quad P(t) = 0.$$

  Le polynôme P a donc une infinité de racines (tous les réels entre -1 et 1 strictement). P est donc le polynôme nul.

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire.}}$

(c) Soit n, m des entiers naturels distincts. On a :

$$\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+m)x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n-m)x)\mathrm{d}x$$

à l'aide de la formule

$$\cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}(\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)).$$

Puisque $n+m \neq 0$ et $n-m \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)x)}{n+m}\right]_0^\pi + \left[\frac{\sin((n-m)x)}{n-m}\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((n+m)\pi) - 0}{n+m}\right) + \left(\frac{\sin((n-m)\pi) - 0}{n-m}\right) \boxed{= 0.}\end{aligned}$$

(d) Soient n et m sont deux entiers naturels distincts. On a :

$$\langle T_n, T_m\rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t.$$

Effectuons le changement de variables $t = \cos(x)$ dans cette intégrale convergente. On a $t = \cos(x)$, $\mathrm{d}t = -\sin(x)\mathrm{d}x$, et $x : \pi \to 0$ lorsque $t : -1 \to 1$. De plus, le changement de variables est licite car la fonction $\varphi : x \in]0, \pi[\mapsto \cos(x)$ est strictement décroissante et de classe $\mathscr{C}^1$. Par théorème de changement de variables, les intégrales suivantes convergent toutes les deux et on a :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{T_n(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t &= \int_\pi^0 \frac{T_n(\cos(x))T_m(\cos(x))}{\sqrt{1-\cos(x)^2}}(-\sin(x))\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \frac{T_n(\cos(x))T_m(\cos(x))}{\sqrt{\sin(x)^2}}\sin(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0, \pi[$, on a $\sqrt{\sin(x)^2} = |\sin(x)| = \sin(x)$ car sin est positive sur $]0, \pi[$. On obtient donc :

$$\langle T_n, T_m\rangle = \int_0^\pi T_n(\cos(x))T_m(\cos(x))\mathrm{d}x \overset{2.(b)}{=} \int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x.$$

À l'aide de la question 3.(c), on conclut donc que : $\boxed{\langle T_n, T_m\rangle = 0.}$

(e) Le changement de variable reste valable avec $n = m$, de sorte que :

$$\langle T_n, T_n\rangle = \int_0^\pi \cos(nx)^2\mathrm{d}x.$$

En prenant $a = b = nx$ dans la formule rappelée dans l'énoncé, on a $\cos(nx)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2nx) + 1)$. D'où en substituant dans l'intégrale :

$$\langle T_n, T_n\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(2nx) + 1)\mathrm{d}x.$$

Pour $n = 0$, on obtient :

$$\langle T_n, T_n\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi 2\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\mathrm{d}x = \pi.$$

Pour $n > 0$, on a :

$$\langle T_n, T_n\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nx)}{2n} + x\right]_0^\pi = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\|T_n\|^2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n \geq 1, \\ \pi & \text{si } n = 0.\end{cases}}$$

(f) Avec 1.(c), on sait que $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est de plus orthogonale selon 3.(d). Il nous reste à normaliser chacun de ses éléments pour obtenir une base orthonormée. Ainsi, $\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_1, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n\right) \text{ est une base orthonormé}}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

4. (a) On vient de voir que $\left(\frac{1}{\|T_0\|}T_0, \frac{1}{\|T_1\|}T_1, \ldots, \frac{1}{\|T_n\|}T_n\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Par le cours, le vecteur $X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ se décompose dans cette base comme suit :

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle X^n, \frac{1}{\|T_k\|}T_k \right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|} = \sum_{k=0}^{n} \langle X^n, T_k\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|^2}$$

(b) D'après le cours, la borne inférieure d_n est atteinte en un unique vecteur P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui n'est autre que le projeté orthogonal de X^n sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or $\left(\frac{1}{\|T_0\|}T_0, \frac{1}{\|T_1\|}T_1, \ldots, \frac{1}{\|T_{n-1}\|}T_{n-1}\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (preuve analogue à ce qui a été fait plus haut). Ainsi, on a par le cours que :

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \langle X^n, T_k\rangle \frac{1}{\|T_k\|^2}T_k,$$

et donc que :

$$\begin{aligned} d_n = \|X^n - P\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \langle X^n, T_k\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|^2} - \sum_{k=0}^{n-1} \langle X^n, T_k\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|^2} \right\| \\ &= \left\| \langle X^n, T_n\rangle \frac{T_n}{\|T_n\|^2} \right\| = |\langle X^n, T_n\rangle| \frac{\|T_n\|}{\|T_n\|^2} \boxed{= \frac{|\langle X^n, T_n\rangle|}{\|T_n\|}.} \end{aligned}$$

(c) On remarque que $X^2 = \frac{1}{2}(2X^2-1) + \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}T_0$. D'où en substituant dans la formule obtenue à la question précédente :

$$d_2 = \frac{|\langle X^2, T_2\rangle|}{\|T_2\|} = \frac{\left|\left\langle \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}T_0, T_2\right\rangle\right|}{\|T_2\|} = \frac{1}{2} \times \frac{|\langle T_2, T_2\rangle + \langle T_0, T_2\rangle|}{\|T_2\|} = \frac{1}{2} \times \frac{\|T_2\|^2}{\|T_2\|} = \frac{\|T_2\|}{2}.$$

Avec le résultat de 3.(e), on a donc $\boxed{d_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.}$

Exercice 2 (Ecricome 2012)

1. $I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t$ est une intégrale exponentielle avec $a > 0$. Ainsi $\boxed{I_a \text{ converge et vaut } \frac{1}{a}.}$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{x+e^t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (pour tout $t \in [0, +\infty[$, $x + e^t > 0$) donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}$ est généralisée en $+\infty$. En $+\infty$:

- On a $\frac{1}{x+e^t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e^t} = e^{-t}$.
- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $e^{-t} \geq 0$.
- L'intégrale $I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ converge d'après ce qui précède ($1 > 0$).

Par comparaison, on en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } f(x) \text{ converge.}}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$x + e^t - 2\sqrt{xe^t} = \sqrt{x}^2 + \sqrt{e^t}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{e^t} = (\sqrt{x} - \sqrt{e^t})^2 \geq 0.$$

On a donc bien $2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\dfrac{1}{x+e^t} \geq 0$ et l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}$ converge. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $f(x) \geq 0$.

On a pour tout $t \in [0, +\infty[$, $0 < 2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$ donc $\dfrac{1}{x+e^t} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{xe^t}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{t}{2}}$. Par croissance de l'intégrale (toutes les intégrales $f(x)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}I_{1/2}$ convergent), on obtient :

$$f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}I_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.}$$

3. On a :

   - pour tout $t \in [0, +\infty[$, $0 < x + e^t < y + e^t$ donc $\dfrac{1}{y+e^t} < \dfrac{1}{x+e^t}$;
   - les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{y+e^t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{x+e^t}$ sont **continues** sur $[0, +\infty[$;
   - les intégrales $f(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{y+e^t}$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}$ convergent.

   Par stricte croissance de l'intégrale ($0 < +\infty$), on en déduit que $f(y) < f(x)$, soit encore $\boxed{f(x) - f(y) > 0.}$

   Par linéarité (les intégrales en jeu étant convergentes), on a :

$$f(x) - f(y) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{1}{y+e^t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{(y+e^t)-(x+e^t)}{(x+e^t)(y+e^t)}\mathrm{d}t = (y-x)\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+e^t)(y+e^t)}\mathrm{d}t.$$

   Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a :

$$x + e^t \geq e^t \geq 0 \text{ et } y + e^t \geq e^t \geq 0 \text{ donc } (x+e^t)(y+e^t) \geq e^{2t} > 0 \text{ donc } \frac{1}{(x+e^t)(y+e^t)} \leq e^{-2t}.$$

   Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+e^t)(y+e^t)}\mathrm{d}t$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\mathrm{d}t$ étant convergentes, on obtient par croissance de l'intégrale que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+e^t)(y+e^t)}\mathrm{d}t \leq I_2 = \frac{1}{2}.$$

   En multipliant cette inégalité par $y - x \geq 0$, on obtient bien $\boxed{f(x) - f(y) \leq \dfrac{y-x}{2}.}$

4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et soit $x \in \mathbb{R}_+$.

   Si $x \geq x_0$, on a d'après la question précédente :

$$0 \leq f(x_0) - f(x) \leq \frac{x - x_0}{2}$$

et donc $|f(x_0) - f(x)| \leq \dfrac{|x - x_0|}{2}$.
Si $x < x_0$, on a toujours avec la question précédente :

$$0 \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{x_0 - x}{2}.$$

et donc $|f(x_0) - f(x)| \leq \dfrac{|x - x_0|}{2}$.
Dans tous les cas, on a donc :

$$0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|x - x_0|}{2}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|x - x_0|}{2} = 0$,on en déduit par théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0))$ existe et vaut 0, soit encore que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ainsi f est continue en x_0. Et comme ceci est vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $\boxed{f \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}_+.}$

Soit x et y deux réels de $\mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. On a prouvé que $f(x) - f(y) > 0$, soit encore $f(x) > f(y)$. Par suite $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe et vaut 0. D'autre part, on a $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = I_1 = 1$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [0, +\infty[\text{ sur }]0, 1].}$

5. Soit $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto f(x) - x$. g est continue comme somme de fonctions qui le sont. Elle est strictement décroissante car somme de deux fonctions strictement décroissantes, et on a :

$$g(0) = f(0) = 1 \quad \text{ et } \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty.$$

D'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]-\infty, 1]$. Par conséquent, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$. Enfin, puisque f est à valeurs dans $]0, 1]$, on a $\alpha = f(\alpha) \in]0, 1]$.

6. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\alpha - u_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

Init. Pour $n = 0$, on a :

$$|\alpha - u_0| = \alpha \leq 1 = \frac{1}{2^0}.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n, à savoir $|\alpha - u_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$. On a :

$$|\alpha - u_{n+1}| = |f(\alpha) - f(u_n)| \underbrace{\leq}_{\text{quest. 4.}} \frac{|\alpha - u_n|}{2} \underbrace{\leq}_{\text{H.R.}} \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence, on a donc $\boxed{|\alpha - u_n| \leq \dfrac{1}{2^n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, on a par théorème des gendarme $\lim\limits_{n \to +\infty} |\alpha - u_n| = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$.

(b) Le programme suivant convient :

```python
def suite(epsilon):
      u = 0 ;
      N = 0 ;
      while (1/2**N) > epsilon :
            N = N+1
            u = Ecricome(u)
      return u
```

La variable `u` contient d'abord $0 = u_0$. Puis après le premier passage dans la boucle, elle vaut $f(u_0) = u_1$. Après un second passage, elle vaudra donc $f(u_1) = u_2$, etc. À la fin du programme, après N passages dans la boucle `while`, où N est bien le premier entier tel que $\dfrac{1}{2^N} \leq \varepsilon$, elle vaut donc u_N.

7. On a :

$$\begin{aligned}|f(x+h) - f(x) + hg(x)| &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+h+e^t} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t} + h\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^2}\right| \\ &= \left|\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}\right)\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

par linéarité (les intégrales sont toutes convergentes). Or, on a pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}\right| &= \left|\frac{(x+e^t)^2 - (x+h+e^t)(x+e^t) + h(x+h+e^t)}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}\right| \\ &= \left|\frac{x^2 + 2xe^t + e^{2t} - x^2 - xe^t - hx - he^t - e^t x - e^{2t} + hx + h^2 + he^t}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}\right| \\ &= \left|\frac{h^2}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2}\right| = \frac{h^2}{(x+h+e^t)(x+e^t)^2} \text{ car ce réel est positif.}\end{aligned}$$

Comme $x + h + e^t \geq e^t \geq 0$ (car $x + h \geq 0$) et $(x + e^t)^2 \geq e^{2t} \geq 0$ (car $x \geq 0$), on a par produit $(x + h + e^t)(x + e^t)^2 \geq e^{3t} > 0$, ce qui donne :

$$0 \leq \left|\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}\right| \leq \frac{h^2}{e^{3t}} = h^2 e^{-3t}.$$

L'intégrale $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3t}\mathrm{d}t$ converge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h^2 e^{-3t}\mathrm{d}t$ aussi par linéarité. Et par comparaison, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}\right|\mathrm{d}t$ converge.
Par inégalité triangulaire puis par croissance, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}\right)\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{1}{x+h+e^t} - \frac{1}{x+e^t} + \frac{h}{(x+e^t)^2}\right|\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^{+\infty} h^2 e^{-3t}\mathrm{d}t = h^2 I_3\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.}$$

On suppose $h \neq 0$. On a alors :

$$0 \leq \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + g(x)\right| \leq \frac{|h|}{3}.$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|}{3} = 0$. Donc par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + g(x) \right)$ existe et vaut 0. Ainsi $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = -g(x)$, ce qui signifie que f est dérivable en x et $f'(x) = -g(x)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } f' = -g.}$

8. T est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} T'(x) = f(x) + xf'(x) = f(x) - xg(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t} - x\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(x+e^t)-x}{(x+e^t)^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(x+e^t)^2}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Pour $A \in [0, +\infty[$, on a :

$$\int_0^A \frac{e^t}{(x+e^t)^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{x+e^t} \right]_0^A = -\frac{1}{x+e^A} + \frac{1}{x+1} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+x}.$$

On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ T'(x) = \dfrac{1}{x+1}.}$

Ainsi T est une primitive sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, donc de la forme $T(x) = \ln(1+x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Mais lorsque $x \to 0^+$, on a $f(x) \to f(0) = 1$, et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} T(x) = 0$. On en déduit que :

$$0 = \lim_{x\to 0^+} \ln(1+x) + c = c.$$

Ainsi on a $\boxed{T(x) = \ln(x+1) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*.}$

9. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$T(x) = xf(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+e^t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+e^t}\mathrm{d}t.$$

Effectuons le changement de variables proposé. Soit pour cela φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\forall t \in [0, +\infty[,\ \varphi(t) = e^t$.

- La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et on a pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\varphi'(t) = e^t > 0$.
- La fonction φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Donc $\boxed{\text{le changement de variable } u = e^t \text{ est licite.}}$

On a $u = e^t$ donc $\mathrm{d}u = e^t\mathrm{d}t$.
Lorsque $t = 0$ alors $u = e^0 = 1$ et lorsque t tend vers $+\infty$ alors u tend vers $+\infty$.
On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+e^t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^t(x+e^t)}e^t\mathrm{d}t$. Par le théorème de changement de variable, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{u(x+u)}\mathrm{d}u$ converge et on a :

$$\begin{aligned} T(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{x}{u(x+u)}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{x+u-u}{u(x+u)}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{x+u} \right)\mathrm{d}u \\ &= \lim_{y\to+\infty} [\ln(u) - \ln(x+u)]_1^y = \lim_{y\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{u}{x+u} \right) \right]_1^y = \lim_{y\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{y}{x+y} \right) - \ln\left(\frac{1}{x+1} \right) \right) \\ &= \lim_{y\to+\infty} \left(\ln\left(\frac{1}{\frac{x}{y}+1} \right) + \ln(x+1) \right) = \ln(x+1). \end{aligned}$$

On retrouve bien que $\boxed{T(x) = \ln(x+1) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*.}$

Problème (EM Lyon 2012)

Partie I : Formule de Stirling

Pour tout entier naturel n, on définit $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t$.

1. On a $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \boxed{= \frac{\pi}{2}}$ et $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \boxed{= 1}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^n(t)}_{\geq 0}\underbrace{(\cos(t)-1)}_{\leq 0}\,\mathrm{d}t \leq 0.$$

La suite $\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc décroissante.}}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : t \mapsto (\cos(t))^n$ est **continue**, **positive** sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et $f_n(0) = 1 \neq 0$. Par stricte positivité de l'intégrale, on conclut que $\boxed{W_n > 0}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par parties.

$$\begin{array}{c|ccc} + & \cos^{n+1}(t) & & \cos(t) \\ & & \searrow & \\ - & -(n+1)\sin(t)\cos^n(t) & \overset{\int}{\leftarrow} & \sin(t) \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos^{n+1} t$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \times \cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)(n+1)\sin(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(1-\cos^2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$

D'où l'égalité $\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

(b) Posons pour tout $n \geq 0$, $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} \overset{3.(a)}{=} (n+1)W_nW_{n+1} = u_n.$$

La suite (u_n) est donc constante, de sorte que $u_n = u_0$ pour tout $n \geq 0$, ce qui se réécrit :

$$\boxed{(n+1)W_{n+1}W_n = (0+1)W_1W_0 = W_1W_0.}$$

4. (a) Pour tout entier naturel n, on a par décroissance de la suite (W_n) :

$$W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n \quad \overset{3.(a)}{\Rightarrow} \quad \boxed{W_n \geq W_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2}W_n.}$$

(b) En quotientant ces inégalités par $W_n > 0$, on obtient :

$$1 \geq \frac{W_{n+1}}{W_n} \geq \frac{n+1}{n+2}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, le théorème des gendarmes implique que la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n}$ existe et vaut 1. Ce qui se réécrit :

$$\boxed{W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n.}$$

À l'aide de la question 3.(b) à présent, on a pour tout $n \geq 0$:

$$(n+1)W_{n+1}W_n = W_1 W_0 = \frac{\pi}{2}$$

avec la question 1. Et avec l'équivalent de la question précédente, on obtient :

$$nW_n^2 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

5. Montrons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Init. Pour $n = 0$, on a $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et :

$$\frac{0! \times \pi}{(2^{0+1} \times (0!)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

D'où la propriété au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété au rang n, et montrons là au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned}
W_{2(n+1)} = W_{2n+2} &\overset{3.(a)}{=} \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \overset{\text{HR}}{=} \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2} \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1} \times (n!)^2} \\
&= \frac{(2n+2)!\pi}{2^2(n+1)^2 \times 2^{2n+1} \times (n!)^2} \\
&= \frac{(2n+2)!\pi}{2^{2(n+1)+1} \times ((n+1)!)^2}
\end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on peut donc conclure que $\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 0 : W_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}.}$

6. On effectue un développement limité de a_n :

$$\begin{aligned}
-1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= -1 - \left(-1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi on a $a_n \sim \frac{1}{12n^2}$. Comme la série $\sum \frac{1}{12n^2}$ est à termes positifs et convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), $\boxed{\sum a_n \text{ converge par théorème de comparaison.}}$

7. On a pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\ln(A_n) - \ln(A_{n-1}) &= \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}(n-1)!}{n!(n-1)^{n-1}e^{-n+1}\sqrt{n-1}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n^{n-1}e^{-1}}{(n-1)^{n-1}\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\right) = -1 - \ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \\
&= -1 - \left(n-1+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \boxed{= a_n.}
\end{aligned}$$

8. Pour tout $N \geq 2$, on a :

$$\sum_{n=2}^{N} a_n = \sum_{n=2}^{N} (\ln(A_n) - \ln(A_{n-1})) = \ln(A_N) - \ln(A_1)$$

par télescopage. Comme la série $\sum_{n\geq 2} a_n$ converge, on en déduit que la suite $(\ln(A_N))$ converge également vers une limite $\ell' \in \mathbb{R}$. Par composition avec l'exponentielle qui est une fonction continue, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \ell = e^{\ell'} > 0.}$

9. (a) Le résultat de la précédente question donne $A_n \sim \ell$, ce qui se réécrit :

$$\frac{1}{n!}n^n e^{-n}\sqrt{n} \sim \ell \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\ell}n^n e^{-n}\sqrt{n} \sim n!.}$$

(b) De l'équivalent $n! \sim \frac{1}{\ell}n^n e^{-n}\sqrt{n}$ on tire, d'une part,

$$(2n)! \sim \frac{1}{\ell}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n} = \frac{1}{\ell}2^{2n}n^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}$$

et, d'autre part, en multipliant par 2^n et en élevant au carré,

$$(2^n n!)^2 \sim \frac{1}{\ell^2}2^{2n}n^{2n+1}e^{-2n}.$$

Il vient alors

$$\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \sim \frac{\frac{1}{\ell}2^{2n+1}n^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{\frac{1}{\ell^2}2^{2n}n^{2n+1}e^{-2n}} \sim \ell\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

soit enfin, en utilisant les résultats des questions 4.(b) et 5 :

$$\ell\frac{\pi}{\sqrt{2n}} \sim W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

Ainsi, le quotient de ces deux expressions tend vers 1; c'est en fait une constante, car on a :

$$\ell\frac{\pi}{\sqrt{2n}} \div \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \ell\frac{\pi}{\sqrt{2n}} \times \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} = \ell\sqrt{2\pi}$$

ce qui donne finalement $\frac{1}{\ell} = \sqrt{2\pi}$. Ainsi, en substituant :

$$\boxed{n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.}$$

Le saviez-vous ?

C'est Abraham de Moivre (1667 -1754) qui a initialement démontré l'équivalent obtenu à la question 9.(a). Le mathématicien écossais James Stirling (1692 - 1770) l'a précisé en montrant que $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ à l'aide des intégrales de Wallis, comme nous l'avons fait en question 9.(b). La formule obtenue :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

est couramment appelée *formule de Stirling*.

Partie II : Étude de variables aléatoires

10. Montrons que f_a est une densité de probabilité.

- f_a est positive sur $\mathbb{R}$.
- f_a est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme produit et composées de fonctions qui le sont.
- Étudions la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto \frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ étant continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Soit $A > 0$. On a :
$$\int_0^A \frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\mathrm{d}x = \left[-e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right]_0^A = 1 - e^{-\frac{A^2}{2a^2}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

$\boxed{f_a \text{ est donc une densité de probabilité.}}$

11. Pour tout $x \geq 0$, on a :
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_a(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$
Pour $x > 0$, on obtient :
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t}{a^2}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$
La fonction de répartition de la variable aléatoire X est donc :
$$\boxed{F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

12. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{t^2}{a^2}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}}_{\geq 0}\,\mathrm{d}t$ converge (absolument).

Notons que cette intégrale ressemble fortement à celle définissant le moment d'ordre 2 d'une loi normale. Plus précisément, soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathscr{N}(0, a^2)$, qui possède pour densité :
$$t \mapsto \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}.$$
Alors nous savons, par parité de l'intégrande, que :
$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{a\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t.$$

De plus, $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = a^2 + 0 = a^2$.
On en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} = a^3 \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Et donc $E(X)$ existe et vaut :

$$E(X) = \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2a^2}} = \frac{1}{a^2} a^3 \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \boxed{= a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

Remarque. Ce résultat pouvait également se retrouver par une intégration par partie. On avait alors besoin de la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2a^2}$ qui se retrouve en se rappelant que l'intégrale de la densité d'une loi normale vaut 1.

13. De même, sous réserve de convergence, on a :

$$E\left(X^2\right) = \int_0^{+\infty} t^2 f_a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $A > 0$. Procédons à une intégration par parties sur le **segment** $[0, A]$.

$$\begin{array}{c|ccc} + & t^2 & & \frac{t^2}{a^2} e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \\ & & \searrow & \\ - & 2t & \overset{\int}{\longleftarrow} & -e^{-\frac{t^2}{2a^2}} \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto -e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$ D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^A t^3 e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}t &= \left[-t^2 e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^A + 2\int_0^A t e^{-\frac{t^2}{2a^2}} dt \\ &= -A^2 e^{-\frac{A^2}{2a^2}} + 2\left[-a^2 e^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right]_0^A \\ &= -A^2 e^{-\frac{A^2}{2a^2}} + 2a^2 - 2a^2 e^{-\frac{A^2}{2a^2}} \\ &\underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 2a^2 \quad \text{par croissances comparées} \end{aligned}$$

Et par la formule de Huygens, il vient :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = 2a^2 - a^2 \frac{\pi}{2} \boxed{= a^2 \frac{4-\pi}{2}.}$$

14. (a) Notons que $Z(\Omega) = \mathbf{R}^+$, de sorte que $F_Z(x) = 0$ pour tout $x < 0$.
Soit $x \geq 0$. Il vient :

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(a\sqrt{-2\ln V} \leq x) = P\left(\sqrt{-2\ln V} \leq \frac{x}{a}\right) = P\left(-2\ln V \leq \frac{x^2}{a^2}\right)$$

par croissance de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$. Et par croissance de l'exponentielle, on obtient :

$$F_Z(x) = P\left(\ln V \geq -\frac{x^2}{2a^2}\right) = P\left(V \geq e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) = 1 - P\left(V \leq e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right).$$

Puisque V suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, et que $0 \leq e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \leq 1$, il vient donc :

$$F_Z(x) = 1 - F_V\left(e^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

Ainsi, Z a la même fonction de répartition que X, et donc $\boxed{\text{ces deux variables ont même loi.}}$

(b) On suppose avoir importé les librairies `numpy` et `numpy.random` à l'aide des préfixes `np` et `rd`. Le programme suivant convient :

```
def simul(a):
    v = rd.random()
    z = a*np.sqrt(-2*np.log(v))
    return z
```

Remarque. Il s'agit ici d'un cas particulier de la méthode d'inversion rencontrée dans le TP5.

15. Puisque l'urne ne contient que n boules, il faut au maximum $(n+1)$ tirages avant de retirer une boule déjà sortie. Et donc T_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$, de sorte que $\boxed{P(T_n > n+1) = 0}$.

16. Remarquons que pour $k = 1$, on a $P(T_n > 1) = 1$, car T_n est à valeurs dans $[\![2, n]\!]$.

    Notons A_i l'événement « la boule obtenue au tirage i n'a pas été tirée auparavant ». Alors :

$$[T_n > k] = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k.$$

   Par la formule des probabilités composées, on a alors :

$$P(T_n > k) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}}(A_k).$$

   Mais pour tout $\ell \in [\![2, k]\!]$,

$$P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1}}(A_i) = \frac{n-(i-1)}{n}$$

   puisque cette probabilité conditionnelle est la probabilité de tirer une boule qui n'a pas été tirée, sachant qu'on a déjà obtenu $i-1$ boules différentes lors des tirages précédents. On obtient en substituant dans la formule des probabilités composées :

$$P(T_n > k) = 1 \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n} = \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}} \boxed{= \frac{n!}{n^k (n-k)!}}.$$

17. Par définition de Y_n, on a :

$$P(Y_n > y) = P\left(\frac{T_n}{\sqrt{n}} > y\right) = P(T_n > y\sqrt{n}).$$

   Mais T_n étant à valeurs entières, on a :

$$P(T_n > k_n) = \underbrace{P(k_n < T_n \leq y\sqrt{n})}_{=0} + P(T_n > y\sqrt{n}) \quad \text{soit} \quad P(T_n > k_n) = P(T_n > y\sqrt{n}).$$

   Et donc $\boxed{P(Y_n > y) = P(T_n > k_n)}$.

18. Notons que $\sqrt{n}y - 1 < k_n \leq \sqrt{n}y$ et donc $\frac{\sqrt{n}y-1}{y\sqrt{n}} \leq \frac{k_n}{y\sqrt{n}} \leq 1$.

    Par le théorème des gendarmes, on a alors $\frac{k_n}{y\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui se réécrit $k_n \sim y\sqrt{n}$.

    En utilisant le résultat de la question 9.b, il vient $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$.

    De même, on a $n - k_n \geqslant n - y\sqrt{n} \to +\infty$, et donc :

$$(n-k_n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-(n-k_n)} (n-k_n)^{n-k_n} \sqrt{2\pi(n-k_n)}.$$

On en déduit que :

$$
\begin{aligned}
P\left(Y_n > y\right) = P\left(T_n > k_n\right) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{k_n}} \frac{e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}}{e^{-(n-k_n)}\left(n-k_n\right)^{n-k_n}\sqrt{2\pi\left(n-k_n\right)}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n}\left(\frac{n}{n-k_n}\right)^{n-k_n}\sqrt{\frac{n}{n-k_n}}.
\end{aligned}
$$

Mais on a $\frac{n}{n-k_n} = \frac{n}{n}\frac{1}{1-\frac{k_n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $\sqrt{\frac{n}{n-k_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Il vient alors :

$$
\boxed{P\left(Y_n > y\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n}\left(\frac{1}{1-\frac{k_n}{n}}\right)^{n-k_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n}\left(1-\frac{k_n}{n}\right)^{k_n-n}.}
$$

19. (a) Nous savons qu'au voisinage de 0 , on a $\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$ et donc :

$$
\begin{aligned}
-t + (1-t)\ln(1-t) &= -t + (t-1)\left(-t - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)\right) \\
&= -t + t + \frac{t^2}{2} - t^2 + \underbrace{o\left(t^2\right) - \frac{t^3}{2} + o\left(t^3\right)}_{=o(t^2)} \boxed{= -\frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right).}
\end{aligned}
$$

(b) En factorisant par n, il vient :

$$
\begin{aligned}
-k_n + (k_n - n)\ln\left(\frac{k_n}{n} - 1\right) &= n\left(-\frac{k_n}{n} + \left(\frac{k_n}{n} - 1\right)\ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)\right) \\
&= n\left(-\frac{k_n^2}{2n^2} + o\left(\frac{k_n^2}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{k_n^2}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{y^2}{2}
\end{aligned}
$$

Et donc

$$
\boxed{\lim_{n\to+\infty} -k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right) = -y^2/2.}
$$

20. Nous savons que pour $x \leq 0$, on a $P\left(Y_n \leq x\right) = 0$ car Y_n est à valeurs strictement positives. Pour $x > 0$, on a, grâce au résultat de la question précédente,

$$
P(Y_n \leq y) = 1 - P(Y_n > y) = 1 - e^{-k_n + (k_n - n)\ln(1 - \frac{k_n}{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{-y^2/2}
$$

par composition de la limite par l'exponentielle continue. On reconnait alors la fonction de répartition d'une variable aléatoire de densité f_1. Soit X une telle variable aléatoire.

On a alors, en tout $x \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = F_X(x)$.

Et donc $\boxed{Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X.}$

Remarque. On a ici un exemple d'une suite de variables discrètes qui convergent en loi vers une variable à densité.