DS8

Concours blanc 2 type EM Lyon/Ecricome du 26/01/2023

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

On définit la suite des polynômes de Tchebychev par $T_0 = 1,\ T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

On rappelle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

1. (a) Expliciter T_2 et T_3.
   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de T_n.
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, (T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos(x)\cos((n+1)x).$$
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:
   $$T_n(\cos x) = \cos(nx).$$
3. (a) Montrer que pour tout couple $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   (b) Montrer que l'application :
   $$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \end{array}$$
   définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   On notera $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ce produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.
   (c) Montrer que si n et m sont deux entiers naturels distincts, alors $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = 0$.
   (d) Montrer que si n et m sont deux entiers naturels distincts, $\langle T_n, T_m\rangle = 0$.
   Indication. On pourra procéder au changement de variable $t = \cos(x)$ après avoir justifié sa validité.

(e) Montrer que :

$$\|T_n\|^2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } n \geq 1, \\ \pi & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

(f) En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4. Soit n un entier non nul. On définit d_n la distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :

$$d_n = \inf \{ \|X^n - P\|, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \}$$

(a) Justifier que : $X^n = \sum_{k=0}^{n} \langle X^n, T_k \rangle \frac{T_k}{\|T_k\|^2}$.

(b) Montrer alors que : $d_n = \dfrac{|\langle X^n, T_n \rangle|}{\|T_n\|}$.

(c) Déterminer en particulier la valeur de d_2.

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x + e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x + e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale I_a converge et donner sa valeur.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.

   Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $g(x)$ converge.

2. Établir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t$, puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Établir que : $0 < f(x) - f(y) \leq \dfrac{y - x}{2}$.

4. Montrer que f est une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.

5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On notera α cette solution. Justifier que $\alpha \in]0, 1]$.

6. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\alpha - u_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n \geq 0}$.

   (b) On suppose qu'une fonction `Ecricome` est déjà écrite en `Python`, qui à un réel x donné renvoie le réel $f(x)$.
   À l'aide de la fonction `Ecricome`, écrire une fonction `suite` en `Python` qui, à un réel $\varepsilon > 0$ fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier N tel que $\dfrac{1}{2^N} \leq \varepsilon$ et renvoie la valeur de u_N correspondante.

7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que :
$$|f(x+h)-f(x)-g(x)h| \leq \frac{h^2}{3}.$$
Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = -g(x).$$

8. On considère la fonction T définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $T(x) = xf(x)$.
Justifier que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad \text{puis que :} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad T(x) = \ln(1+x).$$

Problème

Partie I : Formule de Stirling

Pour tout entier naturel n, on définit $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. (a) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $W_n > 0$.
3. (a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
   (b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1 W_0$.
4. (a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $W_n \geq W_{n+1} \geq \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
   (b) En déduire : $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$, puis : $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
5. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $W_{2n} = \dfrac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$.

On note, pour tout entier n tel que $n \geq 1$: $A_n = \dfrac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.
On note, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $a_n = -1 - (n - \frac{1}{2}) \ln(1 - \frac{1}{n})$.

6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$ converge.
   On pourra établir que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$ en effectuant un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$ de a_n.
7. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 2$: $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.
8. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.
9. (a) Justifier : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.
   (b) En utilisant l'expression de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Partie II : Étude de variables aléatoires

Soit un réel a strictement positif et la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par :

$$\begin{cases} f_a(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \\ f_a(x) = \dfrac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

10. Montrer que f_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant f_a comme densité.

11. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
12. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.
13. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$.
14. (a) On considère une variable aléatoire V suivant une loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(V)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.
    (b) Écrire une fonction `Python` nommée `simul`, prenant en entrée le paramètre $a > 0$ et retournant une simulation de la variable X.

Pour tout entier n tel que $n \geq 2$, on considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue, dans U_n, des tirages d'une boule avec remise. On suppose que tous les tirages dans U_n sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue.
On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

15. Justifier : $P(T_n > n + 1) = 0$.
16. Déterminer, pour tout entier k tel que $k \leq n$: $P(T_n > k)$

On considère la variable aléatoire $Y_n = \dfrac{T_n}{\sqrt{n}}$. On se propose d'étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 2}$.

Soit $y \in [0; +\infty[$. On note k_n l'entier naturel égal à la partie entière de $y\sqrt{n}$.
On a donc : $k_n \leq y\sqrt{n} \leq 1 + k_n$.

17. Justifier : $P(Y_n > y) = P(T_n > k_n)$.
18. En utilisant 9.(b), montrer : $P(Y_n > y) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}$.
19. (a) Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $t \mapsto -t + (t - 1)\ln(1 - t)$ en 0.
    (b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \dfrac{k_n}{n}\right)\right) = -\dfrac{y^2}{2}$.
20. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.