DS9

Correction du concours blanc type Maths 3

Exercice 1 (Edhec 2013)

1. Montrons que f est une densité de probabilité.

   - f est positive sur $\mathbb{R}$.
   - f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
   - f est paire, et pour tout $A \in [1, +\infty[$:

   $$\int_0^A f(t)\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{1}{2x^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{2x}\right]_1^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

   Comme f est paire, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

   $\boxed{f \text{ est donc une densité de probabilité.}}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = P(X_1 \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. Il y a trois cas à considérer :

   - si $x \leq -1$:

   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2t}\right]_{-\infty}^{x} = -\frac{1}{2x}.$$

   - si $-1 \leq x \leq 1$, alors (par relation de Chasles) :

   $$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2t^2}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} 0\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

   - si $x \geq 1$, alors (toujours par relation de Chasles) :

   $$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2t^2}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} \frac{1}{2t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} + 0 + \left[-\frac{1}{2t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

   Finalement on obtient pour fonction de répartition $\boxed{F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{2x} & \text{si } x \leq -1, \\ 1/2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 1 - \dfrac{1}{2x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$G_n(x) = P(Y_n \leq x) = P(S_n \leq nx) = P\left(\bigcap_{1\leq k\leq n} [X_k \leq nx]\right)$$
   $$\underset{X_k \text{ indép.}}{=} \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq nx) \underset{\text{même loi}}{=} F(nx)^n$$

   Ainsi Y_n a pour fonction de répartition :

   $$\boxed{G_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } nx \leq -1, \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } -1 \leq nx \leq 1, \\ \left(1 - \dfrac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } nx \geq 1. \end{cases} = \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } x \leq -\dfrac{1}{n}, \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } -\dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{1}{n}, \\ \left(1 - \dfrac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } x \geq \dfrac{1}{n}. \end{cases}}$$

4. (a) Soit $x \leq 0$. Puisque G_n est une fonction de répartition, elle est en particulier croissante, de sorte que :

$$\boxed{G_n(x) \leq G_n(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

D'où le résultat.

(b) Soit $x > 0$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, il existe (par définition de la limite d'une suite avec $\varepsilon = x$) un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $x \geq \frac{1}{n}$.

On peut même expliciter un tel entier n_0 : il suffit de le choisir tel que $n_0 \geq \frac{1}{x}$. On peut prendre par exemple $n_0 = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1$, puisqu'alors pour tout $n \geq n_0 \geq \frac{1}{x} > 0$, on a bien $x \geq \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \geq n_0$, $x \geq \frac{1}{n}$, et donc :

$$\boxed{G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n.}$$

D'où le résultat demandé.

5. (a) Deux cas sont à considérer :

- Si $x \leq 0$, alors on a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq G_n(x) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on en déduit par théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x)$ existe et vaut 0.

- Si $x > 0$, alors on a vu qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2nx}\right)\right).$$

Or $n \ln\left(1 - \frac{1}{2nx}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{n}{2nx} = -\frac{1}{2x}$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{2nx}\right) = -\frac{1}{2x}$. Par composition de la **limite** par l'exponentielle (qui est continue), on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{2x}}.$$

Mise en garde.

Attention à ne pas dire, ou seulement laisser entendre, que vous composez des équivalents par la fonction exponentielle, ce qui on le sait est faux en général !

On obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{2x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

(b) Notons qu'on ne sait rien sur la fonction G : on ne sait pas si c'est une fonction de répartition d'une variable réelle, on ne sait pas non plus si une telle variable est à densité. Il s'agit donc de vérifier si G est :

- continue sur $\mathbb{R}$: elle est continue sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0]$ comme composée de fonctions continues. Elle est de plus continue en 0 car :

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{2x}} = 0 = G(0).$$

  G est donc bien continue sur $\mathbb{R}$.
- de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points : elle est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ comme composées de fonctions qui le sont. De plus :

$$G'(x) = 0 \text{ si } x < 0 \quad \text{ et } \quad G'(x) = \frac{1}{2x^2} e^{-\frac{1}{2x}} \text{ si } x > 0.$$

- En particulier $G'(x) \geq 0$ pour $x \neq 0$, et G est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Enfin $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 1$.

Donc $\boxed{G \text{ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité } Y.}$

(c) On a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G_n(x)$ converge vers $G(x)$ quand $n \to +\infty$, et que G est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité Y. Par définition de la convergence en loi, $\boxed{(Y_n) \text{ converge en loi vers la variable aléatoire } Y.}$

Remarque. Une densité de Y est de plus donnée par :

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2t^2} e^{-\frac{1}{2t}} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

6. Considérons la variable aléatoire $Z = \dfrac{1}{Y}$, et F_Z sa fonction de répartition. Puisque $Y(\Omega) = \{t \in \mathbb{R},\ g(t) > 0\} = \mathbb{R}_+^*$, on obtient $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$. En particulier, $F_Z(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$.

   Supposons maintenant $x > 0$. Calculons :

$$F_Z(x) = P\left(\frac{1}{Y} \leq x\right) \underset{\substack{Y>0 \\ x>0}}{=} P\left(Y \geq \frac{1}{x}\right) = 1 - P\left(Y < \frac{1}{x}\right) \underset{Y \text{ cont.}}{=} 1 - P\left(Y \leq \frac{1}{x}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}x\right).$$

   La fonction de répartition de Z est :

$$F_Z : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   On reconnait la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $1/2$. Ainsi, $\boxed{\dfrac{1}{Y} \hookrightarrow \mathscr{E}(1/2).}$

Exercice 2 (EML 2014)

Partie I : Quelques généralités.

1. L'application Φ_A va clairement de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. De plus, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, pour tout $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda M + \mu N) &= A(\lambda M + \mu N) - (\lambda M + \mu N)A = \lambda AM + \mu AN - \lambda MA - \mu NA \\ &= \lambda(AM - MA) + \mu(AN - NA) = \lambda \Phi_A(M) + \mu \Phi_A(N). \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\Phi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

2. Puisque $\boxed{\Phi_A(I_n) = 0_n}$, $\mathrm{Ker}(\Phi_A)$ n'est pas réduit à $\{0_n\}$, et $\boxed{\Phi_A \text{ n'est pas injectif}}$. Comme c'est un endomorphisme et que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\boxed{\Phi_A \text{ n'est pas surjectif non plus.}}$

Partie II : Étude d'un cas particulier.

3. A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur sa diagonale. Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}}$, et A admet 2 valeurs propres distinctes et est de taille 2×2. $\boxed{A \text{ est donc diagonalisable.}}$

4. On calcule l'image par Φ_A de la base canonique.

$$\Phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de Φ_A dans la base canonique $\mathscr{B}$ est donc :

$$\boxed{M = M_{\mathscr{B}}(\Phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Si on note $C_1, \dots, C_4$ les colonnes de M, on constate que $C_1 = 2C_2 = -C_4$, et que C_1 et C_4 sont non colinéaires. Donc $\boxed{\text{le rang de } M \text{ est égal à 2.}}$

5. Puisque $\mathrm{rg}(\Phi_A) = \mathrm{rg}(M) = 2$, 0 est valeur propre de Φ_A et $\dim(E_0(\Phi_A)) = \dim(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})) - 2 = 2$ par le théorème du rang.

Cherchons d'autres valeurs propres « à vue ». On remarque que :

$$M - 2I_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

est de rang < 4 (car sa troisième ligne est nulle). Donc 2 est valeur propre de M. De même on montre que -2 est aussi valeur propre car $\mathrm{rg}(M + 2I_4) < 4$. Par conséquent $\dim(E_2(\Phi_A)) \geq 1$ et $\dim(E_{-2}(\Phi_A)) \geq 1$, et donc :

$$4 \leq \dim(E_2(\Phi_A)) + \dim(E_{-2}(\Phi_A)) + \dim(E_0(\Phi_A)) \underset{\text{cours}}{\leq} \dim(E) = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4.$$

On en déduit que :

$$\dim(E_2(\Phi_A)) + \dim(E_{-2}(\Phi_A)) + \dim(E_0(\Phi_A)) = 4 \text{ et que } \dim(E_2(\Phi_A)) = \dim(E_{-2}(\Phi_A)) = 1.$$

Il en résulte qu'il n'y a pas d'autre valeur propre pour Φ_A, et $\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi_A) = \{-2, 0, 2\}}$. Et comme $\sum_{\lambda \in Sp(\Phi_A)} \dim(E_\lambda(\Phi_A)) = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\boxed{\Phi_A \text{ est diagonalisable.}}$

Partie III : Étude du cas où A est diagonalisable.

6. On suppose que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donc il existe P inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale à coefficients réels telles que :

$$D = P^{-1}AP.$$

On transpose cette égalité :

$$D = {}^tD = {}^t(P^{-1}AP) = {}^tP\ {}^tA\ {}^t(P^{-1}) = {}^tP\ {}^tA({}^tP)^{-1}.$$

Puisque ${}^tP$ est inversible (car P l'est), ${}^tA$ est semblable à une matrice diagonale. Donc $\boxed{{}^tA \text{ est bien diagonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

7. Notons $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $AX = \lambda X$, et $\mu \in \mathrm{Sp}({}^tA)$ tel que ${}^tAY = \mu Y$, soit en transposant ${}^tYA = \mu\, {}^tY$.

   Calculons :

   $$\Phi_A(X\,{}^tY) = (AX)\,{}^tY - X({}^tYA) = \lambda X\,{}^tY - X\mu\,{}^tY = (\lambda-\mu)X\,{}^tY.$$

   Reste à justifier que la matrice $X\,{}^tY$ est bien non-nulle pour que ça soit bien un vecteur propre.

   Notons pour cela $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors :

   $$X\,{}^tY = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix} = (x_iy_j)_{1\le i,j\le n}.$$

   Puisque X et Y sont non nuls, il existe $i,j \in [\![1,n]\!]$ tels que $x_i \neq 0$ et $y_j \neq 0$. Mais alors $\left[X\,{}^tY\right]_{i,j} = x_iy_j \neq 0$, et $X\,{}^tY$ est bien non nulle.

   Ainsi $\boxed{X\,{}^tY \text{ est bien un vecteur propre de } \Phi_A.}$

8. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Puisque $(X_1,\dots,X_n)$ et $(Y_1,\dots,Y_n)$ sont des bases de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ et $\beta_1,\dots,\beta_n$ des scalaires tels que :

   $$V_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k \quad \text{et} \quad V_j = \sum_{\ell=1}^{n} \beta_l Y_\ell.$$

   On obtient alors :

   $$V_i\,{}^tV_j = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k\right)\,{}^t\left(\sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell Y_\ell\right) = \sum_{1\le k,\ell\le n} \alpha_k\beta_\ell\, X_k\,{}^tY_\ell.$$

   Ainsi $\boxed{V_i\,{}^tV_j \text{ appartient au sous-espace vectoriel } F \text{ de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ engendré par } \mathscr{F}}$.

   Ceci étant vrai pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on en déduit que F contient la famille génératrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée des $E_{i,j}$. Donc F est l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tout entier. Ainsi, $\mathscr{F}$ est une famille génératrice, de cardinal $n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$. $\boxed{\mathscr{F} \text{est donc une base de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

9. Puisque A est diagonalisable, il existe une base $(X_1,\dots,X_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

   D'après la question 6., ${}^tA$ est aussi diagonalisable. Donc il existe une base $(Y_1,\dots,Y_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ${}^tA$.

   D'après la question 8., la famille $\mathscr{F} = (X_i\,{}^tY_j)_{1\le i,j\le n}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, ses éléments sont tous des vecteurs propres de Φ_A d'après la question 7.

   D'où l'existence d'une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de Φ_A. Ainsi, $\boxed{\Phi_A \text{ est diagonalisable.}}$

10. On a construit à la question précédente une base $(X_i\,{}^tY_j)_{1\le i,j\le n}$ formée de vecteurs propres de Φ_A. De plus, on a vu à la question 7. que pour tout $i,j \in [\![1,n]\!]$:

    $$\Phi_A(X_i\,{}^tY_j) = (\lambda_i - \mu_j)X_i\,{}^tY_j$$

    Ainsi les valeurs propres de Φ_A sont exactement les réels de la forme $\lambda - \mu$ où $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}({}^tA)$.

Reste à justifier que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}({}^tA)$ pour obtenir le résultat souhaité. Il suffit pour cela de noter que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n \Leftrightarrow \mathrm{rg}({}^t(A - \lambda I_n)) < n \Leftrightarrow \mathrm{rg}({}^tA - \lambda I_n) < n \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}({}^tA).$$

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } \Phi_A \text{ sont donc exactement les réels } \lambda - \mu \text{ où } \lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(A).}$

Problème (Ecricome 2019)

Partie A

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons B_k l'évènement « on a pioché une boule blanche au k-ème tirage », et $N_k = \overline{B}_k$, c'est-à-dire l'évènement « on a pioché une noire au k^e tirage ».

   Avant le deuxième tirage, il y a soit 2 boules blanches et une noire dans l'urne si on a pioché une boule noire au premier tour, soit 1 boule blanches et deux boules noires si on a pioché une boule blanche au premier tour.

   Ainsi, $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$, et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X_1 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$.

   On reconnaît une loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$, d'où $\boxed{E(X_1) = \frac{3}{2} \text{ et } V(X_1) = \frac{4-1}{12} = \frac{1}{4}.}$

2. Lors de deux tirages, on peut extraire soit deux boules noires, soit deux boules blanches, soit une boule blanche puis une boule noire ou l'inverse. Ainsi, X_2 peut valoir 3 ou 2 ou 1, soit $X_2(\Omega) = [\![1, 3]\!]$. $[X_2 = 1]$ est réalisé si, et seulement si, $B_1 \cap B_2$ l'est. D'où (à l'aide de la formule des probabilités composées, les évènements B_1 et B_2 n'étant pas indépendants) :

   $$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

   car lorsque B_1 est réalisé, le deuxième tirage se fait dans une urne avec une boule blanche et deux boules noires.

   De même $[X_2 = 3]$ est réalisé si, et seulement si, $N_1 \cap N_2$ l'est réalisé. D'où :

   $$\mathbb{P}([X_2 = 3]) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

   Enfin, $\mathbb{P}([X_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([X_2 = 1]) - \mathbb{P}([X_2 = 3]) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

3. Lors de k tirages, on peut extraire entre 0 et k boules blanches. Après ceux-ci, l'urne peut donc contenir entre 1 blanche et $k+1$ blanches (en comptant la boule blanche qui est présente dès le début). Ainsi, $\boxed{X_k(\Omega) = [\![1, k+1]\!].}$

4. Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in [\![1, k+1]\!]$. Après le $(k+1)$-ème tirage, il y a $k+2$ boules dans l'urne car on ajoute une boule à chaque tirage. Le tirage $k+1$ amène une boule blanche ou une boule noire. À son issue, le nombre de boules blanches est donc stable ou est augmenté de 1. Par conséquent, $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i]) = 0$ $i \neq j$ et $i \neq j+1$.

   Selon le protocole, le nombre de boules blanches reste constant après un tirage si, et seulement si, on tire une boule blanche. Ainsi, $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = j])$ est la probabilité de sortir une boule blanche dans une urne contenant $k+2$ boules dont j boules blanches, d'où $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = j]) = \frac{j}{k+2}$.

   De même, le nombre de boules blanches augmente de 1 après un tirage si, et seulement si, on sort une boule noire. Le réel $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = j+1])$ est la probabilité de sortir une boule noire dans une urne contenant j boules blanches et $k+2$ boules au total, d'où $\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = j+1]) = \frac{k+2-j}{k+2}$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}$, si $i \notin [\![1, k+2]\!] = X_{k+1}(\Omega)$, alors $\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = 0$ et comme $i-1 \notin [\![1, k+1]\!] = X_k(\Omega)$, on a aussi $\mathbb{P}(X_k = i) = \mathbb{P}(X_k = i-1) = 0$. Donc la formule $(*)$ est vraie dans ce cas.

   Supposons $i = k+2$, alors $[X_{k+1} = k+2]$ est réalisé si, et seulement si, $[X_k = k+1] \cap N_{k+1}$ est réalisé car le nombre maximal de boules blanches après k tirages est $k+1$. Donc $\mathbb{P}(X_{k+1} = k+2) = \mathbb{P}(X_k = k+1) P_{[X_k = k+1]}(N_{k+1}) = \mathbb{P}(X_k = k+1) \times \frac{1}{k+2}$. D'autre part, $(k+2) \notin X_k(\Omega)$, d'où $\mathbb{P}(X_k = k+2) = 0$. On observe donc que la formule

$$\mathbb{P}\left([X_{k+1} = i]\right) = \frac{i}{k+2}\mathbb{P}\left([X_k = i]\right) + \frac{3+k-i}{k+2}\,\mathbb{P}\left([X_k = i-1]\right) \qquad (*)$$

   est vraie pour $i = k+2$.

   Supposons $i \in [\![1, k+1]\!]$, On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[X_k = j]\}_{1 \leq j \leq k+1}$:

$$\mathbb{P}\left([X_{k+1} = i]\right) = \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{P}(X_k = j)\mathbb{P}_{[X_k = j]}(X_{k+1} = i).$$

   Puisque $\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) = 0$ lorsque $i \neq j$ et $i \neq j+1$, cette somme se simplifie :

$$\mathbb{P}\left([X_{k+1} = i]\right) = \mathbb{P}(X_k = i)\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i) + \mathbb{P}(X_k = i-1)\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1} = i).$$

   On a vu que $\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2}$.
   Si $i = 1$, alors $\mathbb{P}(X_k = i-1) = \mathbb{P}(X_k = 0) = 0$ et la formule $(*)$ est valable pour $i = 1$.
   Sinon, la question précédente avec $j = i-1$ donne $\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1} = i) = \frac{k+2-(i-1)}{k+2} = \frac{k+3-i}{k+2}$, et donc :

$$\boxed{\mathbb{P}\left([X_{k+1} = i]\right) = \frac{i}{k+2}\;P\left([X_k = i]\right) + \frac{3+k-i}{k+2}\;P\left([X_k = i-1]\right).}$$

   La formule $(*)$ est donc bien satisfaite pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

6. Avec ce qui précède, $X_3(\Omega) = [\![1, 4]\!]$, et $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{24}$, $\mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{24}$, puis :

$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{2}{4}\mathbb{P}(X_2 = 2) + \frac{3}{4}\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$$

   et $\mathbb{P}(X_3 = 3) = 1 - \mathbb{P}(X_3 = 1) - \mathbb{P}(X_3 = 2) - \mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{11}{24}$.

7. (a) À l'aide de la question 5 avec $i = 1$ et $\mathbb{P}(X_k = 0) = 0$, on obtient $\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{k+2}\mathbb{P}(X_k = 1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par une récurrence immédiate, on obtient :

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}\mathbb{P}(X_0 = 1) \boxed{= \frac{1}{(k+1)!}.}$$

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. La question 5 avec $i = k+2$ donne (en notant que $\mathbb{P}(X_k = k+2) = 0$) :

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = k+2) = \frac{3+k-(k+2)}{k+2}\mathbb{P}(X_k = k+1) = \frac{1}{k+2}\mathbb{P}(X_k = k+1).$$

   Avec $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$, une récurrence immédiate donne $\boxed{\mathbb{P}(X_k = k+1) = \frac{1}{(k+1)!}.}$

   (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (k+2)!\mathbb{P}(X_{k+1} = 2) = (k+2)!\left(\frac{2}{k+2}\;P\left([X_k = 2]\right) + \frac{3+k-2}{k+2}\;P\left([X_k = 1]\right)\right) \\ &= (k+2)!\left(\frac{2}{k+2}\frac{a_k}{(k+1)!} + \frac{3+k-2}{k+2}\frac{1}{(k+1)!}\right) = 2a_k + k + 1 \end{aligned}$$

Définissons la suite (b_k) par $b_k = a_k + k + 2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$b_{k+1} = a_{k+1} + k + 1 + 2 = 2a_k + k + 1 + k + 3 = 2(a_k + k + 2) = 2b_k.$$

La suite (b_k) est géométrique de raison 2, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$b_k = 2^k b_0 = 2^k(a_0 + 2) = 2^{k+1}$$

car $\mathbb{P}(X_0 = 2) = 0$. En substituant, on obtient $a_k = 2^{k+1} - k - 2$ et $\boxed{\mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{2^{k+1}-k-2}{(k+1)!}}$.

Partie B

8. Détaillons déjà le fonctionnement de la ligne 5. La commande `rd.random()` renvoie une réalisation d'une variable suivant une loi uniforme sur $[0, 1[$. Par transformation affine, `rd.random()*(n+b)+1` renvoie une réalisation d'une variable suivant une loi uniforme sur $[1, n+b+1[$. Et en prenant la partie entière, `r = np.floor(rd.random()*(n+b)+1)` est donc un nombre entier pris au hasard dans $[\![1, n+b]\!]$ (de manière uniforme).

   Les variables `n` et `b` représentent le nombre de boules blanches et de boules noires dans l'urne. On effectue k tirages successifs à l'aide de la boucle `for`. À chaque tirage, on imagine avoir numéroté les boules noires de 1 à n, et les boules blanches de $n+1$ à $n+b$. On tire au hasard une boule dans l'urne, ce qui revient à choisir un entier `r` au hasard dans $[\![1, n+b]\!]$. Si `r >n`, alors cela correspond à sortir une boule blanche de l'urne. Dans ce cas, on augmente le nombre de boules noires de 1 en faisant `n = n+1`. Sinon, cela correspond à un tirage d'une boule noire, et on augmente alors le nombre `b` de boules blanches de 1. On renvoie enfin le nombre `b` de boules blanches contenues dans l'urne après `k` tirages. Cela correspond donc à une réalisation de la variable X_k.

9. On commence par créer un vecteur `u` contenant N réalisations de la variable X_k. Pour cela, on utilise une boucle `for` et la fonction `mystere(k)`.

   Ensuite, on crée un vecteur `LE` de taille $k+1$ (dont les composantes vont de 0 à k). On effectue une boucle `for` afin de parcourir ce vecteur, et de placer dans `LE[i-1]` la fréquence d'apparition de `i` dans `u`. Pour cela, on utilisera la commande `np.mean(u==i)`.

```python
def loi_exp(k,N):
    u = np.zeros(N)
    for j in range(N):
        u[j] = mystere(k)
    LE = np.zeros(k+1)
    for i in range(1,k+2):
        LE[i-1] = np.mean(u==i)
    return(LE)
```

10. La matrice M est telle que $[M]_{k,i} = \mathbb{P}(X_k = i-1)$. On fera attention au décalage de numérotation (qui commence à 0 avec `Python`). On utilise les questions 7.(a) et 7.(b) pour compléter les lignes 7 et 10, la formule $(*)$ pour la ligne 9. Pour la ligne 10, on extrait la dernière ligne de la matrice M qui contient la loi de X_n.

```python
1 def loi_theo(n):
2     M = np.zeros((n+1,n+1))
3     M[0,0] = 1
4     M[1,0] = 1/2
5     M[1,1] = 1/2
6     for k in range(1,n):
7         M[k+1,0] = M[k,0]/(k+2)
```

```
        for i in range(1,k+1):
            M[k+1,i] = ((i+1)/(k+2))*M[k,i]+((2+k-i)/(k+2))*M[k,i-1]
    M[k+1,k+1] = M[k+1,0]
    LT = M[n,:]
    return(LT)
```

11. En théorie, $\mathbb{P}(X_5 = 1) = \mathbb{P}(X_5 = 6) = \frac{1}{6!}$, alors que dans le tableau, les valeurs sont distinctes. Donc c'est un calcul expérimental obtenu avec `loi_exp`.

Partie C

12. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k(\Omega)$ est fini donc admet une espérance.
Calculons :

$$\begin{aligned}
E(X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+2} i\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{i=1}^{k+2} i\left(\frac{i}{k+2}\ P\left([X_k = i]\right) + \frac{3+k-i}{k+2}\mathbb{P}\left([X_k = i-1]\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k+2} \frac{i^2}{k+2}\mathbb{P}\left([X_k = i]\right) + \sum_{i=1}^{k+2} i\frac{3+k-i}{k+2}\mathbb{P}\left([X_k = i-1]\right) \\
&= \frac{1}{k+2}E(X_k^2) + \sum_{j=0}^{k+2}(j+1)\frac{3+k-j-1}{k+2}\mathbb{P}\left([X_k = j]\right) \quad \text{par théorème de transfert} \\
&= \frac{1}{k+2}E(X_k^2) + \sum_{j=1}^{k+1}(j+1)\frac{2+k-j}{k+2}\mathbb{P}\left([X_k = j]\right) \quad \text{car } X_k(\Omega) = [\![1, k+1]\!] \\
&= \frac{1}{k+2}E(X_k^2) + \frac{1}{k+2}E((X_k+1)(2+k-X_k)) \quad \text{par théorème de transfert} \\
&= \frac{1}{k+2}E\left(X_k^2 + (2+k)X_k - X_k^2 + 2 + k - X_k\right) \\
&= \frac{1}{k+2}E\left((1+k)X_k + 2 + k\right) \boxed{= \frac{1+k}{k+2}E\left(X_k\right) + 1.}
\end{aligned}$$

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{H}_k :<< \left(E(X_k) = \frac{k+2}{2}\right) >>$.

Init. X_0 étant constante égale à 1, $E(X_0) = 1 = \frac{0+2}{2}$. D'où $\mathscr{H}_0$ vraie.

Hér. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{H}_k$ vraie, soit $E(X_k) = \frac{k+2}{2}$. Avec la question précédente :

$$E(X_{k+1}) = \frac{1+k}{k+2}E(X_k) + 1 = \frac{1+k}{k+2}\frac{k+2}{2} + 1 = \frac{k+3}{2}.$$

D'où la propriété $\mathscr{H}_{k+1}$ vraie.

Concl. Par principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ E(X_k) = \frac{k+2}{2}.}$

(c) Le rôle joué par les boules blanches et les boules noires durant cette expérience aléatoire étant exactement le même, X_k et Y_k suivent la même loi par symétrie. Elles ont en particulier même espérance, et satisfont $X_k + Y_k = k+2$ puisque $X_k + Y_k$ correspond au nombre de boules dans l'urne après k tirages. Ainsi :

$$2E(X_k) = E(X_k) + E(Y_k) = E(X_k + Y_k) = k+2.$$

Ainsi, $\boxed{E(X_k) = E(Y_k) = \frac{k+2}{2}.}$

13. (a) Soit $\alpha > 0$. La variable X_k admet une variance, donc $\frac{X_k}{k+2}$ également. On peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - E\left(\frac{X_k}{k+2}\right)\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{V\left(\frac{X_k}{k+2}\right)}{\alpha^2}.$$

D'où :

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2}-\frac{1}{2}\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{12(k+2)\alpha^2}$$

en utilisant $E\left(\frac{X_k}{k+2}\right) \underset{\text{lin. de } E}{=} \frac{E(X_k)}{k+2} = \frac{1}{2}$ et $V\left(\frac{X_k}{k+2}\right) = \frac{1}{(k+2)^2}V(X_k) = \frac{1}{12(k+2)}$.

Par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2}-\frac{1}{2}\right| \geq \alpha\right)$ et vaut 0.

Par passage à l'évènement complémentaire :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2}-\frac{1}{2}\right| < \alpha\right) = 1-\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2}-\frac{1}{2}\right| \geq \alpha\right) \underset{k\to+\infty}{\to} 1.}$$

(b) La variable $\frac{X_k}{k+2}$ converge donc en probabilité vers $\frac{1}{2}$. Ce n'est pas surprenant, puisque $\frac{X_k}{k+2}$ représente la proportion de boules blanches dans l'urne après k tirages. Intuitivement, cette proportion a tendance à être proche de $\frac{1}{2}$ quand k est grand puisque l'expérience est totalement symétrique en ce qui concerne les rôles joués par les boules blanches et les boules noires.

Partie D

14. (a) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi_{i,j}(\alpha P+\beta Q) &= j(\alpha P+\beta Q)(x+1) - i(\alpha P+\beta Q)(x)\\ &= j\alpha P(x+1) + j\beta Q(x+1) - i\alpha P(x) - i\beta Q(x)\\ &= \alpha\left(jP(x+1)-iP(x)\right) + \beta\left(jQ(x+1)-iQ(x)\right)\\ &= \alpha\varphi_{i,j}(P) + \beta\varphi_{i,j}(Q)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi_{i,j} \text{ est une application linéaire.}}$

(b) Si P est nul alors $\varphi_{i,j}(P)$ est nul aussi.

Supposons P non nul, de la forme $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ avec $\alpha_n \neq 0$. Alors $P(x+1) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k (x+1)^k$ aura le même terme dominant que $\alpha_n(x+1)^n$ (car les autres termes sont tous de degrés inférieurs stricts à n), à savoir $\alpha_n x^n$.

Par somme, le terme dominant de $\varphi_{i,j}(P) = jP(x+1) - iP(x)$ est donc $(j-i)\alpha_n x^n$ avec $(j-i)\alpha_n \neq 0$.

Donc $\boxed{P \text{ et } \varphi_{i,j}(P) \text{ ont le même degré}}$.

(c) D'après la question précédente, si P n'est pas nul, alors $\varphi_{i,j}(P)$ ne l'est pas non plus. Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi_{i,j})$ ne contient que le polynôme nul, et $\boxed{\varphi_{i,j} \text{ est injective.}}$

(d) Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Si P est le polynôme nul, on peut prendre $Q = 0_{\mathbb{R}[x]}$.

Supposons $\deg(P) = n \geq 0$. D'après la question 14.(b), le sous-espace $\mathbb{R}_n[x]$ de $\mathbb{R}[x]$ est stable par $\varphi_{i,j}$. $\varphi_{i,j}$ y induit un endomorphisme $\tilde{\varphi_{i,j}}$, injectif puisque $\varphi_{i,j}$ l'est. Puisque $\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension finie, $\tilde{\varphi_{i,j}}$ est également surjective. Par conséquent, le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ admet un antécédent par $\tilde{\varphi_{i,j}}$: il existe $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $P = \tilde{\varphi_{i,j}}(Q) = \varphi_{i,j}(Q)$.

On a ainsi montré que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[x], \quad \exists Q \in \mathbb{R}[x], \quad \varphi_{i,j}(Q) = P.$$

15. (a) Par définition, $P_{2,1}(x) = \varphi_{2,1}^{-1}((3+x-2)P_{2-1,1}(x)) = \varphi_{2,1}^{-1}(x+1)$.

Calculons :

$$\varphi_{2,1}(-x-2) = 1\times(-(x+1)-2) - 2(-x-2) = x+1 = \varphi_{2,1}(P_{2,1}(x)).$$

Par injectivité de $\varphi_{2,1}$, on obtient $\boxed{-x-2 = P_{2,1}(x).}$

Par définition, $\boxed{P_{2,2} \text{ est le polynôme constant égal à } -P_{2,1}(0) = 2.}$

(b) Par définition, $P_{3,2}(x) = \varphi_{3,2}^{-1}((3+x-3)P_{3-1,2}(x)) = \varphi_{3,2}^{-1}(2x)$. Or :

$$\varphi_{3,2}(-2x-4) = 2(-2(x+1)-4) - 3(-2x-4) = -4x-12+6x+12 = 2x.$$

Par injectivité de $\varphi_{3,2}$, on obtient $\boxed{P_{3,2}(x) = -2x-4.}$

16. (a) La propriété $\mathscr{H}_1$ s'écrit : « $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}P_{1,1}(k)1^k$ ». Et cette propriété est bien satisfaite puisqu'on sait que $P_{1,1} = 1$ et $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}$.

(b) Soit $i \geq 2$. On suppose $\mathscr{H}_{i-1}$ vraie. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{k+1} &= (k+2)!\,\mathbb{P}(X_{k+1}=i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \\
&= (k+2)!\left(\tfrac{i}{k+2}\mathbb{P}(X_k=i) + \tfrac{3+k-i}{k+2}\mathbb{P}(X_k=i-1)\right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \text{ avec } (*) \\
&= (k+1)!\,(i\mathbb{P}(X_k=i) + (3+k-i)\mathbb{P}(X_k=i-1)) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \\
&= (k+1)!\left(i\mathbb{P}(X_k=i) + (3+k-i)\tfrac{1}{(k+1)!}\sum_{j=1}^{i-1} P_{i-1,j}(k)j^k\right) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1} \text{ avec } \mathcal{H}_{i-1} \\
&= (k+1)!\,i\,\mathbb{P}(X_k=i) + \sum_{j=1}^{i-1}\left(\underbrace{(3+k-i)P_{i-1,j}(k)}_{=\varphi_{i,j}(P_{i,j})(k) \text{ par déf. de } P_{i,j}} j^k - P_{i,j}(k+1)j^{k+1}\right) \\
&= (k+1)!\,i\,\mathbb{P}(X_k=i) + \sum_{j=1}^{i-1}\left((jP_{i,j}(k+1) - iP(k))j^k - P_{i,j}(k+1)j^{k+1}\right) \\
&= (k+1)!\,i\,\mathbb{P}(X_k=i) + \sum_{j=1}^{i-1}\left(j^{k+1}P_{i,j}(k+1) - iP_{i,j}(k)j^k - P_{i,j}(k+1)j^{k+1}\right) \\
&= i\left((k+1)!\,\mathbb{P}(X_k=i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k\right) = i\alpha_k.
\end{aligned}$$

Donc (α_k) est une suite géométrique de raison i : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = i^k\alpha_0$.

Or $\alpha_0 = (0+1)!\,\mathbb{P}(X_0=i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0)j^0 = P_{i,i}(x)$ (car $i > 1$ donc $\mathbb{P}(X_0=i) = 0$).

Donc $\alpha_k = -i^kP_{i,i}(x)$, ce qui se récrit :

$$(k+1)!\,\mathbb{P}(X_k=i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k = i^kP_{i,i}(k).$$

car $P_{i,i}$ est un polynôme constant. Finalement :

$$(k+1)!\,\mathbb{P}(X_k=i) = \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k + i^kP_{i,i}(k) = \sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k)j^k.$$

Ce qui prouve que $\mathscr{H}_i$ est vraie.

(c) Le 16.(a) initialise la récurrence, le 16.(b) assure l'hérédité. Par principe de récurrence, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, la propriété suivante est satisfaite :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k=i) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k)j^k.}$$

17. (a) À la question 7.(c), il est vu que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{2^{k+1}-k-2}{(k+1)!}$.
La question 15.(a) donne $P_{2,1}(x) = -x-2$. D'où, avec la question 16 :

$$\mathbb{P}(X_k=2) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=1}^{2} P_{2,j}(k)j^k = \frac{1}{(k+1)!}\left(P_{2,1}(k) + P_{2,2}(k)2^k\right) = \frac{1}{(k+1)!}\left(-k-2+2^{k+1}\right).$$

Les résultats sont bien identiques.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X_k = 3) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^{3} P_{3,j}(k) j^k = \frac{1}{(k+1)!} \left(P_{3,1}(k) + P_{3,2}(k) 2^k + P_{3,3}(k) 3^k \right)$$
$$\boxed{= \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{2} k + 1 + (-2k-4)\, 2^k + 3^{k+1} \right)}.$$