DS9

Devoir surveillé du 03/03/2023

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Problème 1

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, défini par :

$$\text{pour tous } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ et } y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \text{ de } \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

On confond les ensembles $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tous $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a, en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: $\quad \langle x, y \rangle = {}^t XY$.

Pour tous réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, on note $\operatorname{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Enfin, on rappelle qu'une matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque P est inversible et que $P^{-1} = {}^t P$.

Partie A : Mise en place d'un exemple

On considère les matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = {}^t AA$$

1. (a) La matrice A est-elle inversible ? Déterminer le rang de A.
   (b) Calculer les matrices A^2 et A^3 et vérifier : $\quad A^3 - A^2 + A = 0$.
   (c) En déduire les valeurs propres réelles de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
2. (a) Justifier que la matrice B est diagonalisable.
   (b) On pose : $\quad R = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
      i. Vérifier que la matrice R est orthogonale.
      ii. Montrer que la matrice ${}^t RBR$ est diagonale.

Dans toute la suite du problème, M désigne une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $r = \operatorname{rg}(M)$.
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.

Partie B : Valeurs singulières d'une matrice

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice ${}^tM$ et $h = g \circ f$.

3. Montrer : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, g(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, h(x)\rangle = \|f(x)\|^2$.

4. (a) Soit x appartenant à $\mathrm{Ker}(h)$. En calculant $\langle x, h(x)\rangle$, montrer que x appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.
   (b) En déduire : $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(f)$ puis $\mathrm{rg}(h) = r$.

5. (a) Justifier que l'endomorphisme h est diagonalisable et qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de h.
   (b) Montrer que les valeurs propres de h sont positives ou nulles.

On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}_1$.

6. Justifier que la matrice P est orthogonale et montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ positifs ou nuls tels que: ${}^tMM = PD{}^tP$ avec $D = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Les réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ étant positifs ou nuls, on pose, pour tout i de $[\![1; n]\!]$, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.
Les réels $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sont appelés les valeurs singulières de la matrice M.

7. Dans cette question uniquement, on suppose que la matrice M est symétrique.

   Déterminer, dans ce cas, les valeurs singulières de M en fonction de ses valeurs propres.

8. Justifier que la matrice D admet exactement r coefficients diagonaux non nuls.

Dans toute la suite, on suppose que les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont non nuls et donc que les réels $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ sont nuls.

9. (a) Pour tout i de $[\![1; r]\!]$, justifier que $f(\varepsilon_i)$ est non nul et calculer $\|f(\varepsilon_i)\|$.
   (b) On pose, pour tout i de $[\![1; r]\!]$, $u_i = \frac{1}{\|f(\varepsilon_i)\|} f(\varepsilon_i)$.
   Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_r)$ est une famille orthonormée.
   (c) En déduire qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}_1$ (au départ) et la base $\mathscr{B}_2$ (à l'arrivée) est :

$$\mathrm{Diag}\,(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = \mathrm{Diag}\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$$

On note Q la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}_2$ et Δ la matrice $\mathrm{Diag}\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$.

10. Justifier que la matrice Q est orthogonale et, en calculant de deux façons différentes la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ (au départ) et la base $\mathscr{B}_2$ (à l'arrivée), montrer : $M = Q\Delta{}^tP$.

11. **Retour sur l'exemple :**

    Déterminer deux matrices orthogonales P_1 et Q_1 de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ_1 de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que: $A = Q_1\Delta_1{}^tP_1$.

Partie C : Pseudo-inverse d'une matrice et application

On reprend les notations de la partie B.
Il existe donc deux matrices orthogonales P et Q de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et des réels strictement positifs $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ tels que :

$$M = Q\Delta^{\mathrm{t}}P \quad \text{avec} \quad \Delta = \mathrm{Diag}\left(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0\right)$$

On définit la matrice M^+de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par : $M^+ = P\,\mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\sigma}, \ldots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \ldots, 0\right){}^tQ$.
La matrice M^+est appelée **la matrice pseudo-inverse de** M.
On note f^+ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M^+ et $p = f \circ f^+$.

12. Justifier que, si M est inversible, alors $M^{-1} = M^+$.
13. (a) Simplifier le produit MM^+.
    (b) Montrer que p est un projecteur orthogonal.
    (c) Montrer : $\mathrm{rg}\left(MM^+\right) = r$ puis en déduire : $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(f)$.
14. **Application :** Soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Im}(f)$.
    Il n'existe donc pas de vecteur x de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = y$.
    On cherche alors à déterminer un vecteur x^* de $\mathbb{R}^n$ tel que : $\|y - f\left(x^*\right)\| = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|y - f(x)\|$.
    (a) Justifier : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|y - p(y)\| \leqslant \|y - f(x)\|$.
    (b) Proposer un vecteur de $\mathbb{R}^n$ répondant au problème posé.
    Montrer que, lorsque $r < n$, il existe au moins deux vecteurs distincts de $\mathbb{R}^n$ répondant au problème posé.
15. **Retour sur l'exemple :** On note f_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice A et on considère $y = (1, 1, 1)$.
    (a) Déterminer $\mathrm{Im}\left(f_1\right)$ et vérifier que y n'appartient pas à $\mathrm{Im}\left(f_1\right)$.
    (b) Montrer : $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ \|y - f_1(x)\|^2 = (x_2 + x_3 - 1)^2 + (x_1 - x_3 + 1)^2 + 1$.
    (c) En déduire deux vecteurs distincts x^* et z^* de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$\|y - f_1\left(x^*\right)\| = \|y - f_1\left(z^*\right)\| = \min_{x\in\mathbb{R}^3} \|y - f_1(x)\|.$$

Problème 2

Dans ce problème, on considère un réel μ et un réel strictement positif a, et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$F_{\mu,a} : x \longmapsto \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - x}{a}\right)\right).$$

Partie I

1. Soient a et μ deux réels tels que $a > 0$.

   (a) Justifier que $F_{\mu,a}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée notée $f_{\mu,a}$ et sa dérivée seconde $f'_{\mu,a}$.

   (b) En déduire les variations et la convexité de $F_{\mu,a}$ sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites de $F_{\mu,a}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Donner l'allure de la courbe de $F_{\mu,a}$ en y faisant figurer le point d'inflexion.

   (c) Montrer que $F_{\mu,a}$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer. On note G la réciproque de $F_{0,1}$. Expliciter G.

2. Soient a et μ deux réels tels que $a > 0$.

   Montrer que $f_{\mu,a}$ est une densité, et que $F_{\mu,a}$ est la fonction de répartition associée.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et on suppose que toutes les variables aléatoires introduites dans la suite du problème sont définies sur cet espace probabilisé.

Soient μ et a des réels tels que $a > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle X **suit la loi de Gumbel de paramètre** (μ, a), ce que l'on note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(\mu, a)$, si elle admet $f_{\mu,a}$ comme densité.

3. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

   Soit μ un réel et a un réel strictement positif.

   Montrer que la variable aléatoire $X = aZ + \mu$ est une variable aléatoire à densité qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a).

On **admet** que réciproquement, si X suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a), alors $Z = \frac{X-\mu}{a}$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$

4. (a) Soit U une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(-\ln(U))$ suit la loi de Gumbel de paramètre $(0, 1)$.

   (b) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def gumbel(mu,a)` renvoyant une réalisation d'une variable aléatoire de loi $\mathscr{G}(\mu, a)$.

5. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Gumbel de paramètre (μ, a) et $Z = \frac{X-\mu}{a}$.

   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(u)e^{-u}\, du$ converge.

   (b) À l'aide du changement de variable $t = e^{-u}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(-\ln(t))dt$ converge. On notera dans la suite :

   $$\gamma = -\int_0^1 \ln(-\ln(t))dt$$

(c) Montrer que Z admet une espérance et que $E(Z) = \gamma$.
On pourra utiliser le changement de variable $u = \exp(-\exp(-x))$.

(d) En déduire que X admet une espérance et déterminer $E(X)$ en fonction de γ, μ et a.

On **admet** que X admet un moment d'ordre 4 et en particulier que la variance de X notée σ^2 est égale à a^2c où c est un réel strictement positif indépendant de a et de μ.

6. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes, de même loi de Gumbel de paramètre $(0,1)$.

(a) Montrer que $-Z$ est une variable aléatoire à densité, et déterminer une densité g de $-Z$.

(b) Montrer que pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-\left(e^{-x}+1\right)u}\,\mathrm{d}u$ converge et déterminer sa valeur.

(c) À l'aide du changement de variable $u = e^t$, en déduire que pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)g(t)\mathrm{d}t$ converge.

(d) Montrer que $Y - Z$ est une variable aléatoire à densité, de densité la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}.$$

Partie II

Soient μ et a deux réels tels que $a > 0$.
On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, suivant chacune la loi de Gumbel de paramètre (μ, a).
On définit pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \qquad \text{et} \qquad C_n = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}.$$

7. Méthode des moments

(a) Montrer que si les suites de variables aléatoires $(V_n)_{n\geqslant 0}$ et $(W_n)_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement en probabilité vers deux variables aléatoires V et W, alors pour tous réels α et β, la suite de variables aléatoires $(\alpha V_n + \beta W_n)_{n\geqslant 0}$ converge en probabilité vers $\alpha V + \beta W$.

(b) Montrer que les variables aléatoires M_n et C_n convergent en probabilité respectivement vers $E(X_1)$ et $E(X_1^2)$.

(c) Montrer que $A_n = \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{C_n - M_n^2}$ est un estimateur convergent de a.

(d) Montrer alors que $S_n = M_n - A_n\gamma$ est un estimateur convergent de μ.

8. On suppose qu'ont été définies précédemment dans un script `Python` des valeurs approchées de γ et de c, dans des variables notées `gamma` et `c`.

(a) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def estimateur_a(X)` renvoyant la valeur de l'estimateur A_n étudié précédemment, lorsque X est un vecteur-ligne de longueur n dont les coefficients sont des réalisations de $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

(b) On a tracé sur la figure 1 l'évolution de cinq réalisations indépendantes de cet estimateur A_n, pour le cas particulier $\mu = 2$ et $a = 1$.

Commenter ce graphique.

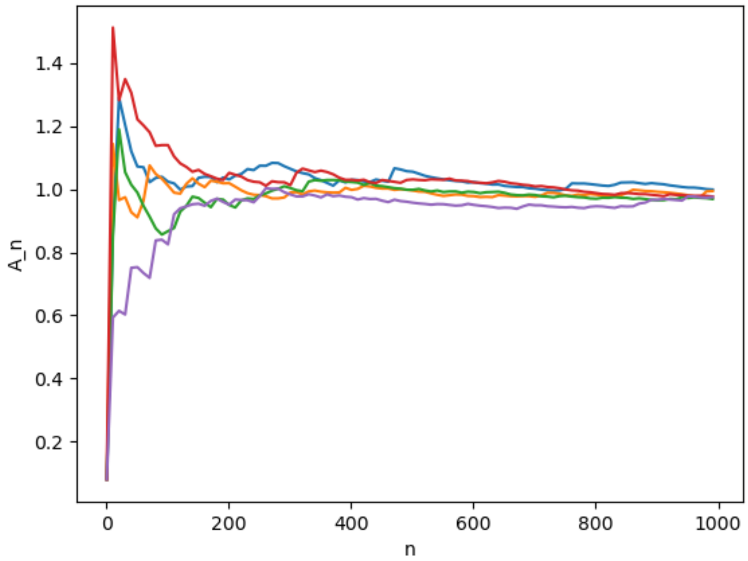

FIGURE 1 - Évolutions de A_n pour $\mu = 2$ et $a = 1$.