DS9

Concours blanc type Maths 3 du 23/01/2024

Durée : 4h

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

   Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, mutuellement indépendantes et admettant toutes f comme densité.
De plus, pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Y_n = \dfrac{S_n}{n}$.
On admet que S_n et Y_n sont des variables aléatoires à densité, définies elles aussi sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

2. Déterminer la fonction de répartition, notée F, commune aux variables aléatoires X_k.

3. On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Y_n. Déterminer explicitement $G_n(x)$ en fonction de n et de x.

4. (a) Montrer que pour tout réel x négatif ou nul, on a $G_n(x) \leq \dfrac{1}{2^n}$.

   (b) Justifier que, pour tout réel x strictement positif, il existe un entier naturel n_0 non nul, tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0, on a $x \geq \dfrac{1}{n}$.

   En déduire que : $\quad \forall x > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \quad G_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2nx}\right)^n.$

5. (a) Déterminer, pour tout réel x, la limite de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On note $G(x)$ cette limite.

   (b) Montrer que la fonction G ainsi définie est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

   (c) En déduire que $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont la fonction de répartition est G.

6. Vérifier que la variable aléatoire $\dfrac{1}{Y}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 2

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note V_i la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i-ème ligne qui est égal à 1. On admet que la famille $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $(i,j)\in[\![1, n]\!]^2$, on note $E_{i,j} = V_i\,{}^tV_j$. Ainsi, pour tout $(i,j)\in[\![1, n]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ est la matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne, qui est égal à 1. On admet que la famille $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $A\neq \lambda I_n$.

On considère l'application Φ_A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\quad \Phi_A(M) = AM - MA.$$

Partie I : Quelques généralités.

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\Phi_A(I_n)$. L'endomorphisme Φ_A est-il injectif ? surjectif ?

Partie II : Étude d'un cas particulier.

On suppose dans cette partie seulement que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et donner ses valeurs propres.

   On note $\mathscr{B}$ la base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ formée des quatre matrices suivantes : $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Écrire la matrice de Φ_A dans la base $\mathscr{B}$, puis calculer le rang de cette matrice.
5. Déterminer les valeurs propres de Φ_A, et montrer que Φ_A est diagonalisable.

Partie III : Étude du cas où A est diagonalisable.

On suppose, dans cette partie seulement, que la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Montrer que ${}^tA$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
7. Soient $X, Y\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. de ${}^tA$). Montrer que $X\,{}^tY$ est un vecteur propre de Φ_A.
8. Soient $(X_1,\dots,X_n)$ et $(Y_1,\dots,Y_n)$ deux bases de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{F}$ la famille $\mathscr{F} = (X_i\,{}^tY_j)_{1\leq i,j\leq n}$.

   Montrer que, pour tout $(i,j)\in[\![1, n]\!]^2$, $V_i\,{}^tV_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathscr{F}$, et en déduire que la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Établir que Φ_A est diagonalisable.

10. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A.

Problème

Une urne contient initialement une boule, blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.
On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$-ème tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$. On admet que pour tout entier k, X_k est une variable aléatoire de $(\Omega, \mathscr{T}, P)$.

Partie A

1. Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.

2. Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :
$$P([X_2 = 1]) = \frac{1}{6}, \quad P([X_2 = 2]) = \frac{2}{3}, \quad P([X_2 = 3]) = \frac{1}{6}.$$

3. Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k.

4. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. Déterminer $P_{[X_k=j]}([X_{k+1} = i])$.
(On distinguera différents cas selon les valeurs relatives de i et j).

5. Déduire de ce qui précède que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad P([X_{k+1} = i]) = \frac{i}{k+2} P([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2} P([X_k = i-1]). \quad (*)$$

6. À l'aide de la formule $(*)$, déterminer la loi de X_3.

7. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\quad P([X_k = 1]) = \dfrac{1}{(k+1)!}$.
   (b) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $P([X_k = k+1])$.
   (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad a_k = (k+1)! \times P([X_k = 2])$.
   Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.
   Montrer que la suite $(b_k)_{k \geq 0}$ définie par : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ b_k = a_k + k + 2 \quad$ est géométrique.
   En déduire alors que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P([X_k = 2]) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

Partie B

8. Que renvoie la fonction `Python` suivante pour un entier k non nul ?

   Détailler le fonctionnement de la ligne 5.

```
1  def mystere(k):
2      n = 1
3      b = 1
4      for i in range(k):
5           r = np.floor(rd.random()*(n+b)+1)
6           if r>n :
7                n = n+1
8           else :
9                b = b+1
10     return(b)
```

9. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def loi_exp(k,N)` qui prend en entrée un entier strictement positif k et un entier N, qui effectue N simulations de k tirages successifs dans l'urne et qui retourne un vecteur `LE` qui contient une estimation de la loi de X_k (c'est-à-dire que pour chaque $i \in [\![1, k+1]\!]$, `LE[i-1]` contient la fréquence d'apparition de l'événement $[X_k = i]$ au cours des N simulations).

   On pourra utiliser la fonction `mystere`.

10. Recopier et compléter la fonction `loi_theo` suivante, qui prend en entrée un entier strictement positif n, afin qu'elle retourne un vecteur `LT` qui contient la loi théorique de X_n.

```
def loi_theo(n):
    M = np.zeros((n+1,n+1))
    M[0,0] = 1
    M[1,0] = 1/2
    M[1,1] = 1/2
    for k in range(1,n):
        M[k+1,0] = .........
        for i in range(1,k+1):
            M[k+1,i] = .........
    M[k+1,k+1] = .........
    LT = .........
    return(LT)
```

11. Un étudiant nous propose comme loi de X_5 le résultat suivant :

k	1	2	3	4	5	6
$P([X_5 = k])$	0.001368	0.079365	0.419434	0.418999	0.079454	0.00138

   A-t-il utilisé `loi_exp` ou bien `loi_theo` ?

Partie C

12. (a) À l'aide de la formule $(*)$, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} E(X_k) + 1.$$

(b) Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(X_k) = \frac{k+2}{2}.$$

(c) Soit Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne après k tirages.

Justifier que X_k et Y_k ont même espérance, puis retrouver le résultat de la question précédente.

On admettra pour la suite que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad V(X_k) = \frac{k+2}{12}.$$

13. (a) Soit $\alpha > 0$. Montrer que :

$$\lim_{k \to +\infty} P\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right) = 1.$$

(b) Interpréter ce résultat et le justifier intuitivement.

Partie D

14. Pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq j < i$, on définit l'application $\varphi_{i,j}$ par :

$$\varphi_{i,j} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \longmapsto & jP(x+1) - iP(x) \end{array}.$$

(a) Montrer que $\varphi_{i,j}$ est linéaire.

(b) Pour $P \in \mathbb{R}[x]$, montrer que $\deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg(P)$.

(c) En déduire que $\varphi_{i,j}$ est injective.

(d) Montrer que pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}[x]$, il existe un polynôme Q dans $\mathbb{R}[x]$ tel que $\varphi_{i,j}(Q) = P$.

(Pour P non nul, on pourra s'intéresser à la restriction de $\varphi_{i,j}$ à $\mathbb{R}_n[x]$ où n est le degré de P).

Ce qui précède montrant que $\varphi_{i,j}$ est un automorphisme, on définit le polynôme $P_{i,j}$ pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq j \leq i$, en posant :

$$P_{1,1}(x) = 1, \quad \text{et pour } 1 \leq j < i, \quad P_{i,j}(x) = \varphi_{i,j}^{-1}\left((3 + x - i)P_{i-1,j}(x)\right),$$

et enfin pour tout entier $i > 1$,

$$P_{i,i}(x) = -\sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0).$$

15. (a) Vérifier que : $P_{2,1}(x) = -x - 2$, puis calculer $P_{2,2}(x)$.

(b) Vérifier que : $P_{3,2}(x) = -2x - 4$.

On admettra dans la suite que : $P_{3,1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$ et $P_{3,3}(x) = 3$.

16. On considère, pour tout entier i de $\mathbb{N}^*$, la propriété suivante :

$$\mathscr{H}_i : \text{« } \forall k \in \mathbb{N},\ P([X_k = i]) = \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k) j^k \text{ ».}$$

On souhaite montrer par récurrence que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, $\mathscr{H}_i$ est vraie.

(a) Montrer que $\mathscr{H}_1$ est vraie.

(b) Soit $i > 1$. On suppose que $\mathscr{H}_{i-1}$ est vraie et on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_k = (k+1)! P([X_k = i]) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k) j^k.$$

En utilisant la formule $(*)$ et la relation $(3 + x - i) P_{i-1,j}(x) = \varphi_{i,j}(P_{i,j}(x))$, montrer que la suite $(\alpha_k)_{k \geq 0}$ est géométrique.

Déterminer α_0 et en déduire que $\mathscr{H}_i$ est vraie.

(c) Conclure.

17. (a) En utilisant le résultat de la question 15.(a), retrouver le résultat de la question 7.(c).

(b) Déterminer $P([X_k = 3])$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
