TD0a

Révisions : Suites, fonctions, polynômes

Exercice 0.1 (Étude d'une suite récurrente d'ordre 1)

Dans cet exercice, on étudie la suite u définie par :

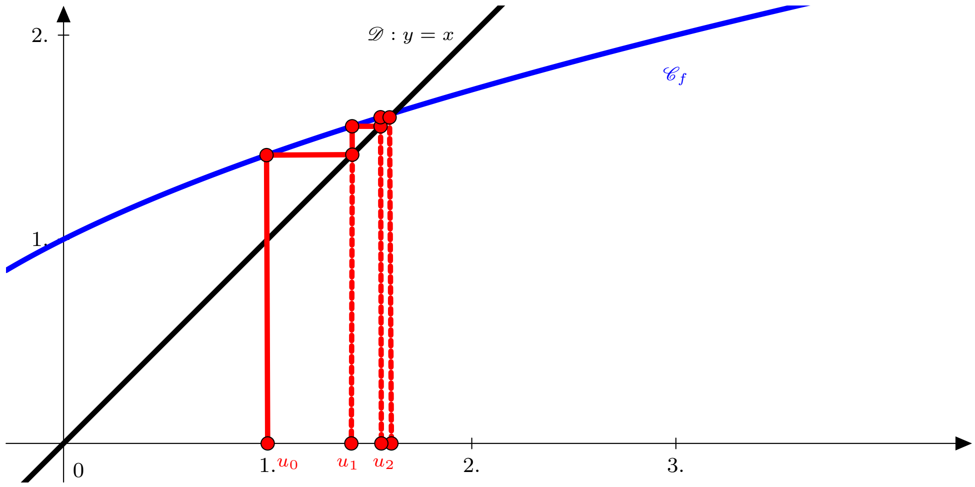
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}.$$

1. Soit $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$.
   Étudier les variations de f, puis représenter la courbe représentative de f ainsi que les quatre premiers termes de la suite u.
2. Étude de la suite u.
   (a) Montrer que $[1,2]$ est un intervalle stable pour f, c'est-à-dire $f([1,2]) \subset [1,2]$.
   (b) En déduire que la suite u est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1,2]$.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1,2]$. On note α cette solution qu'on n'essaiera pas de déterminer.
   (d) Déterminer le sens de variation de la suite u.
   (e) Montrer que u converge et déterminer sa limite.
   (f) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def suite(n)` qui calcule le terme d'indice n de la suite u.
3. Approximation de α.
   (a) Montrer que pour tout $x, y \in [1,2]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|x-y|$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$.
   (d) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
   (e) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def approx(eps)` qui renvoie une approximation de α à `eps` près.

u est une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour une méthode d'étude de ces suites, je vous renvoie au complément de cours sur le sujet.

☞ **Complément de cours 0. Méthodes d'étude d'une suite récurrente d'ordre 1.**

1. La fonction f est définie et continue sur le segment $[1,2]$. Elle est de plus dérivable sur $[1,2]$, de dérivée :
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$
   On en déduit que f est croissante sur $[1,2]$. On trace sa représentation graphique (on utilise que $f(1) = \sqrt{2}, f(2) = \sqrt{3}$) :



2. Étude de la suite u.

   (a) On a vu que f est continue, croissante, et que $f(1) = \sqrt{2}$, $f(2) = \sqrt{3}$. Ainsi pour tout $1 \leq x \leq 2$, on a :
   $$1 \leq f(1) = \sqrt{2} \leq f(x) \leq f(2) = \sqrt{3} \leq 2.$$
   On en déduit que $[1, 2]$ est un intervalle stable pour f, c'est-à-dire $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.

   (b) Montrons par récurrence que la suite u est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 2]$.

   Init. $u_0 = 1$ est bien défini et appartient au segment $[1, 2]$. D'où la propriété au rang $n = 0$.

   Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n. Montrons la propriété au rang $n+1$.
   Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et appartient à $[1, 2]$. Puisque f est définie sur $[1, 2]$, on en déduit que le terme $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. De plus le segment $[1, 2]$ étant stable par f et $u_n \in [1, 2]$, on a $u_{n+1} \in [1, 2]$. D'où la propriété au rang $n + 1$.

   Concl. Par principe de récurrence, la suite u est donc bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1, 2]$.

   (c)

   Idée.

   Une telle question devrait immédiatement vous faire penser au théorème de la bijection. Seule difficulté ici, le théorème de la bijection ne peut s'appliquer à f directement pour obtenir une solution de l'équation $f(x) = x$, mais à $g : x \mapsto f(x) - x$. On cherchera donc à montrer qu'il existe une unique solution à l'équation $g(x) = 0$.

   Appliquons le théorème de la bijection à g.

   - $g : x \mapsto f(x) - x$ est une **fonction continue sur** $[1, 2]$ comme différence de deux fonctions qui le sont.
   - Montrons que g est **strictement monotone sur** $[1, 2]$. g est différence de deux fonctions dérivables sur $[1, 2]$. Elle est donc dérivable, et on a pour tout $x \in [1, 2]$:
   $$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}.$$
   On a $g'(x) < 0$ pour tout $x \in [1, 2]$ car $1 - \sqrt{1+x} < 0$. Ainsi g est strictement décroissante sur cet intervalle.
   - Enfin $g(1) = \sqrt{2} - 1 > 0$ et $g(2) = \sqrt{3} - 2 < 0$, donc 0 **appartient à l'intervalle image** $g([1, 2])$.

   On déduit de ces trois points et du théorème de la bijection que l'équation $g(x) = 0$ (ou $f(x) = x$) admet une unique solution sur l'intervalle $[1, 2]$. On note α cette solution.

   (d) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

   Init. $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2}$. D'où la propriété au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n. Montrons la propriété au rang $n+1$. On a par hypothèse de récurrence, $2 \geq u_{n+1} \geq u_n \geq 1$. f étant croissante sur $[1,2]$, on en déduit que :

$$f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \quad \text{soit encore} \quad u_{n+2} \geq u_{n+1}.$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Concl. Par principe de récurrence, on a donc montré que la suite u est croissante.

(e) La suite u est croissante et majorée par 2. Elle converge donc vers une limite finie $\ell \in [1,2]$. De plus cette limite est nécessairement un point fixe de f. En effet on a :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Puisque f est continue, on obtient en passant à la limite quand $n \to +\infty$:

$$\ell = f(\ell).$$

Or cette équation, on l'a vu, admet une unique solution sur $[1,2]$ qui est α. On peut donc conclure que u converge vers α.

(f) On propose le programme suivant, qui nécessite la librairie `numpy` dédiée au calcul mathématique afin d'utiliser la fonction racine carrée `np.sqrt`.

```python
import numpy as np

def suite(n):
    U = 1
    for k in range(n):
        U = np.sqrt(1+U)
    return(U)
```

3. Approximation de α.

(a)

Idée.

Une telle inégalité devrait vous faire immédiatement penser à l'inégalité des accroissements finis. On l'applique donc ici.

La fonction f est continue sur $[1,2]$, dérivable sur $]1,2[$, et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$

Pour tout $x \in]1,2[$, on a :

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, on peut donc conclure que :

$$\forall (x,y) \in [1,2], \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x-y|.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique l'inégalité précédente avec $x = u_n$ et $y = \alpha$:

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$$

ce qui donne, puisque $\alpha = f(\alpha)$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|.$$

(c) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Init. On a bien $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0 |u_0 - \alpha|$. D'où la propriété au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n. Montrons la propriété au rang $n+1$. Par l'inégalité de la question précédente, on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|,$$

et en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

on obtient bien que :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|.$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Concl. Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Reste à remarquer que $|u_0 - \alpha| = \alpha - 1 \leq 2 - 1 = 1$, d'où finalement :

$$n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n.$$

(d) On cherche n tel que :

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \leq 10^{-3} \text{ soit } 10^3 \leq (2\sqrt{2})^n.$$

Prenons le logarithme de cette expression (ln est croissant) :

$$3\ln(10) \leq n\ln(2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\ln(2)n.$$

Ainsi on a $n \geq \dfrac{2\ln(10)}{\ln(2)} \approx 6,64.$. u_7 est donc une approximation de α à 10^{-3} près. En exécutant `suite(7)`, on obtient $\alpha \approx u_7 = 1.6178513$.

(e) On reprend le calcul précédent :

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\ln(\varepsilon) \leq \frac{3}{2}\ln(2)n$$

soit encore :

$$n \geq -\frac{2\ln(\varepsilon)}{3\ln(2)}.$$

Il faut donc $n = \lfloor -\frac{2\ln(\varepsilon)}{3\ln(2)} \rfloor + 1$, et renvoyer u_n. Écrivons notre script à présent.

```python
def approx(eps):
    n = int(np.floor(-2*np.log(eps)/(3*np.log(2)))+1)
    return(suite(n))
```

On remarquera l'utilisation des fonctions partie entière et logarithme népérien à l'aide respectivement des commandes `np.floor` et `np.log`. On notera également l'ajout de la fonction `int()`, indispensable ici pour que le type de la variable `n` soit un entier et non un flottant (nombre à virgules) afin qu'on puisse ensuite lui appliquer la fonction `suite`.

Exercice 0.2 (Étude d'une suite implicite - Edhec 2018)

Une *suite implicite* est une suite (u_n) de réels dont chacun des termes u_n est solution d'une équation du type

$$f_n(x) = 0 \qquad (E_n)$$

où $f_n : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Il n'est en général pas possible de résoudre explicitement l'équation (E_n). On ne connait donc pas en général la valeur de u_n. On dit que ces termes sont définis implicitement.

Méthode. Étude d'une suite implicite.

Pour étudier une suite implicite (u_n), on pourra procéder ainsi :

- *Pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution u_n de (E_n), on pensera au théorème de la bijection dont on rappelle l'énoncé :*

  Si

  - *f_n est **strictement monotone** et **continue**,*
  - *l'intervalle image $f_n(I)$ contient 0,*

  alors l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n appartenant à I.

- *Pour étudier (u_n), on pensera à utiliser l'équation (E_n) définissant la suite. En effet, on ne connait pas explicitement les termes de la suite, mais on peut avoir des informations sur la suite de leurs images par f_n. Ainsi pour étudier par exemple la monotonie de (u_n), on pourra*

  - *comparer $f_n(u_{n+1})$ avec $f_n(u_n) = 0$;*
  - *en déduire le signe de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de la monotonie de f.*

  Pour la recherche d'équivalents, on pensera également à utiliser l'équation $f_n(u_n) = 0$.

L'étude de suites implicites est fréquente aux concours, comme l'an dernier à l'Edhec avec l'exercice suivant.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.
2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
   (d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -n\, v_n$.
   (b) Établir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{n\, v_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
   (c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.
4. Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2.

1. On applique le théorème de la bijection :
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est polynomiale, donc **continue**.
   - f_n est également dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car polynomiale), et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
     $$f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} < 0.$$
     Donc f_n est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}_+$.
   - On a $f_n(0) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$.

D'après le théorème de la bijection, f_n réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 1]$. Puisque $0 \in]-\infty, 1]$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On la note dans la suite u_n.

Mise en garde.

Dire que $f_n'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ ne suffit pas pour conclure que f_n est strictement décroissante. Rappelons le résultat de cours suivant :

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I.
> Si f' est strictement négative, sauf éventuellement en un nombre fini de points de I où f' s'annule, alors f est strictement décroissante.

En particulier ici $f_n' < 0$ sur $\mathbb{R}_+$, donc f_n est strictement décroissante.

2. (a) On a $f_n(0) = 1$, $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(1) = -1$. Comme de plus f_n est strictement décroissante, on en déduit que u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

   (b) Rappelons comment procéder.

   Méthode. Monotonie d'une suite implicite.

   Pour déterminer la monotonie d'une suite implicite, on peut comparer les images $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, et conclure grâce à la monotonie de f_{n+1}.

   Puisque $u_n \in]0, 1[$, on a $u_n^{n+1} \leq u_n^n$, et donc :

$$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} \geq 1 - u_n - u_n^n = f_n(u_n) = 0.$$

   Puisque f_{n+1} est strictement décroissante et que

$$f_{n+1}(u_n) \geq 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

   on en déduit que $u_n \leq u_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.

   (c) La suite (u_n) est **croissante** et **majorée** (car $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Par le théorème de la limite monotone, on peut donc conclure que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ finie. De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1.$$

   Par passage à la limite dans une inégalité, on obtient donc que $0 \leq \ell \leq 1$.

   Mise en garde.

   Une inégalité stricte devient large quand on passe à la limite !

   (d)

   Idée.

   Il faut pour ce type de question penser à revenir à l'équation $f_n(u_n) = 0$ pour obtenir des informations sur (u_n).

   Par l'absurde, supposons que $0 \leq \ell < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_n(u_n) = 0 \quad \text{soit } 1 - u_n - u_n^n = 0.$$

   (u_n) étant croissante et convergente vers ℓ, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_n \leq \ell, \quad \text{d'où} \quad 0 \leq u_n^n \leq \ell^n.$$

Or par hypothèse $0 \leq \ell < 1$, donc on a $\lim_{n\to+\infty} \ell^n = 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0$. Ainsi tous les termes de l'égalité $1 - u_n - u_n^n = 0$ convergent. Par le théorème de passage à la limite dans les (in)égalités, on en déduit que :

$$1 - \ell - 0 = 0 \quad \text{soit encore } \ell = 1.$$

D'où une contradiction puisque $\ell < 1$ par hypothèse. On peut donc conclure que $\ell = 1$.

Mise en garde.

Ne pas confondre le théorème des gendarmes et le théorème de passage à la limite dans les (in)égalités.

- Pour appliquer le théorème de passage à la limite dans les inégalités, il faut savoir au préalable que **tous** les termes convergent.
- Le théorème des gendarmes est d'une autre nature et démontre deux choses : la **convergence** de la suite encadrée et la valeur de sa limite.

3. (a) Puisque $u_n \in]0,1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $v_n = 1 - u_n \in]0,1[$ et $\ln(v_n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus on a $1 - u_n - u_n^n = 0$ et donc :

$$\ln(v_n) = \ln(1-u_n) = \ln(u_n^n) = n\ln(u_n) = n\ln(1+(u_n-1)).$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$, on a(en utilisant l'équivalent usuel $\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u$) :

$$\ln(1+(u_n-1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n - 1 = -v_n.$$

D'où finalement $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$.

(b) On a $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0^+$, donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = -\infty$. D'autre part, on a $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n} = 1$ et on obtient $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right) = 0$. Par opération sur les limites, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0.$$

On a $-\ln(v_n)$ et $nv_n > 0$, d'où :

$$\frac{\ln\left(\dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n)) - \ln(n) - \ln(v_n)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1.$$

De plus, on a $\lim_{n\to+\infty} -\ln(v_n) = +\infty$ et $\lim_{u\to+\infty} \dfrac{\ln(u)}{u} = 0$ par croissances comparées, d'où par composition des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} = 0.$$

On a donc finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1 = 0.$$

Ainsi on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{\ln(v_n)} = -1$, et donc $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

(c) On a montré que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$ et que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$. Donc on a $nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, soit encore $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

4. *On reprendra les résultats sur les séries dans un chapitre à la rentrée. Traitons dès maintenant cette question accessible avec le cours de première année.*

   La série $\sum v_n$ est à termes positifs d'après les questions précédentes. On utilise le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

   - $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$;
   - $0 \leq \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour tout $n \geq 3$;
   - la série $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente (série harmonique).

   Par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum v_n$ diverge.

   De même, la série $\sum v_n^2$ est à termes positifs, et on a :

   - $v_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)^2}{n^2}$;
   - $\dfrac{\ln(n)^2}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ puisque $\dfrac{\frac{\ln(n)^2}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \dfrac{\ln(n)^2}{n^{1/2}} \to 0$ par croissances comparées ;
   - la série $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$).

   Par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum v_n^2$ converge.

Exercice 0.3

1. Déterminer le développement limité des fonctions suivantes :
   (a) $f : x \mapsto \ln(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de e ;
   (b) $f : x \mapsto \cos(x)e^{-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 ;
   (c) $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)^2}{x^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0 ;
   (d) $f : x \mapsto \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$;
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos(2\pi x)-1}{\ln(x)+1-x}$.
3. On définit sur $I =]0,+\infty[$ la fonction $f : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$.
   (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
   (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f ce prolongement.
   (c) f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$?
4. À l'aide des propriétés de convexité ou concavité des fonctions, montrer les inégalités suivantes :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$;
   (b) $\forall x \in]0,+\infty[$, $\ln(x) \leq x-1$;
   (c) $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $1 - \dfrac{2x}{\pi} \leq \cos(x) \leq 1$.

1. (a) On cherche le $DL_4(e)$ de la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$. Pour cela, on pose $h = x - e$ de sorte que quand $x \to e$, on a $h \to 0^+$. On remplace dans f en notant que $x = e + h$:

$$f(e+h) = \ln(e+h).$$

Il cherche se ramener à un DL qu'on connait, c'est-à-dire ici celui de $\ln(1+u)$ en 0. Pour cela on factorise par e :

$$f(e+h) = \ln\left(e\left(1+\frac{h}{e}\right)\right) = \ln(e) + \ln\left(1+\frac{h}{e}\right) = 1 + \ln\left(1+\frac{h}{e}\right).$$

On connait les DL usuels (?) qu'on applique ici :

$$f(e+h) = 1 + \left(\frac{h}{e} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{e}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{e}\right)^4 + o(h^4)\right).$$

Reste enfin à remplacer $h = x - e$:

$$f(x) \underset{x\to e}{=} 1 + \frac{x-e}{e} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-e}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-e}{e}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x-e}{e}\right)^4 + o((x-e)^4).$$

(b) Faisons le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \cos(x)e^{-x}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right) \times \left(1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + o(x^3)\right) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} + o(x^3) \\ &= 1 - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

(c) On cherche le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{(\sin(x))^2}{x^2}$. Puisqu'on divise par x^2, cela va faire tomber l'ordre du DL de 2. Il faut donc chercher un $DL_6(0)$ de $(\sin(x))^2$:

$$\begin{aligned} (\sin(x))^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) \times \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{(3!)^2} + \frac{x^6}{5!} + o(x^6) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{36}\right)x^6 + o(x^6) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{8}{180}x^6 + o(x^6) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

Reste à diviser par x^2 :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{45}x^4 + o(x^4).$$

(d) On cherche le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$. Là aussi, on divise par x^2. Il faut donc chercher un $DL_5(0)$ du numérateur.

$$\begin{aligned}
e^x - \sqrt{1+2x} &= e^x - (1+2x)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - \Bigg(1 + \frac{1}{2}(2x) + \frac{1/2(1/2-1)}{2!}(2x)^2 \\
&+ \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)}{3!}(2x)^3 + \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)(1/2-3)}{4!}(2x)^4 \\
&+ \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)(1/2-3)(1/2-4)}{5!}(2x)^5\Bigg) + o(x^5) \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{6}x^3 + \frac{15}{24}x^4 - \frac{3\times 5\times 7}{5!}x^5 + o(x^5) \\
&= x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{16}{24}x^4 + \frac{106}{120}x^5 + o(x^5) \\
&= x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{53}{60}x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

Reste enfin à diviser par x^2 :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{53}{60}x^3 + o(x^3)$$

2. (a) On cherche la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{=:f(x)}$. Pour cela, le premier réflexe à avoir est de passer sous forme exponentielle :

$$f(x) = \exp\left(x \times \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

On a un équivalent en $+\infty$ de $x \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$:

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

On obtient :

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} = 1.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$. D'où en composant **les limites** par la fonction exponentielle qui est une fonction continue, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = e^1 = e.$$

Mise en garde.

Attention à ne pas dire :

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$$

d'où en composant par l'exponentielle :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^1 = e.$$

Même si cela donne le même résultat, ça repose sur une démarche fausse en général : un équivalent n'est pas compatible avec la composition par l'exponentielle (ici ça fonctionne car c'est équivalent à la constante 1...). Ce serait donc sanctionné dans une copie de concours.

(b) On cherche la limite suivante $\lim_{x\to 1}\dfrac{\cos(2\pi x)-1}{\ln(x)+1-x}$. C'est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$. Pour lever cette indétermination, on se ramène déjà en 0 en posant $h=x-1$, soit $x=h+1$. On a :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos(2\pi x)-1}{\ln(x)+1-x}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(2\pi(h+1))-1}{\ln(1+h)+1-(1+h)}.$$

On cherche un équivalent du dénominateur et du numérateur.

- On a :

$$\cos(2\pi(h+1))-1=\cos(2\pi h+2\pi)-1=\cos(2\pi h)-1\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{(2\pi h)^2}{2}=-2\pi^2h^2.$$

- On a :

$$\ln(1+h)+1-(1+h)=\ln(1+h)+1-1-h=\ln(1+h)-h.$$

  Pour obtenir un équivalent, on effectue un développement limité en 0 (à l'ordre 2 pour obtenir un terme non nul) :

$$\ln(1+h)-h\underset{h\to 0}{=}h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)-h=-\frac{h^2}{2}+o(h^2).$$

  On en déduit que :

$$\ln(1+h)-h\underset{h\to 0}{\sim}-\frac{h^2}{2}.$$

Par quotient d'équivalents, on obtient finalement :

$$\frac{\cos(2\pi h)-1}{\ln(1+h)-h}\underset{h\to 0}{\sim}\frac{-2\pi^2h^2}{-\dfrac{h^2}{2}}=4\pi^2.$$

On en déduit finalement :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos(2\pi x)-1}{\ln(x)+1-x}=4\pi^2.$$

3. (a) f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

(b) On a $\lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=0$ par croissances comparées. La fonction exponentielle étant continue, on a par composition :

$$\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln(x)}=e^0=1.$$

La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=1$.

(c) On cherche la limite du taux d'accroissement en 0^+ :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{e^{x\ln(x)}-1}{x}$$

Pour cela, on peut utiliser l'astuce suivante :

$$\frac{e^{x\ln(x)}-1}{x}=\frac{e^{x\ln(x)}-1}{x\ln(x)}\ln(x).$$

On a $\lim_{x\to 0^+}x\ln(x)=0$ et $\lim_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}=1$, d'où par composition :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(x)}-1}{x\ln(x)}=1.$$

On en déduit finalement par produit que :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0, et sa courbe représentative admet une demi-tangente verticale à l'origine. f est donc continue sur $[0, +\infty[$, mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

4. (a) Montrons l'inégalité suivante : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x.$

Pour cela, on commence par noter que $f = \exp$ est convexe : elle est en effet de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = e^x \geq 0.$$

La courbe de exp est donc au dessus de ses tangentes, notamment celle en 0 d'équation :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1.$$

On conclut donc que $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque. Une autre méthode consiste à étudier $g : x \mapsto e^x - x - 1$, d'en dresser le tableau de variation, et de conclure que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) On montre cette fois que ln est concave sur $I =]0, +\infty[$. $f = \ln$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, et on a :

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0 \quad \forall x \in I.$$

Donc ln est bien concave sur I. Sa courbe représentative est donc en dessous de ses tangentes, notamment celle en 1 d'équation :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = x - 1.$$

On en conclut que $\forall x \in]0, +\infty[$, $\ln(x) \leq x - 1$.

(c) Montrons que cos est concave sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $f = \cos$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et on a :

$$f'(x) = -\cos(x) \leq 0 \quad \forall x \in I.$$

Ainsi cos est bien concave. Sa courbe représentative est donc en dessous de ses tangentes, notamment celle en 0 d'équation :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1.$$

Sa courbe représentative est aussi au dessus de ses cordes, notamment celle entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ d'équation :

$$y = ax + b$$

avec $b = f(0) = 1$ et $a = \dfrac{f(\pi/2) - f(0)}{\pi/2 - 0} = -\dfrac{2}{\pi}$. On peut donc conclure que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 1 - \frac{2x}{\pi} \leq \cos(x) \leq 1.$$

Exercice 0.4 (Ecricome 2004)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

Partie 1. Étude de la bijection réciproque de f.

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans l'intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.

2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.

3. Justifier que pour tout $x \in J$, $\begin{cases} \cos(f^{-1}(x)) = \dfrac{1}{x} \\ \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} \end{cases}$.

4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et montrer que :
$$\forall x \in J \setminus \{1\},\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$
5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

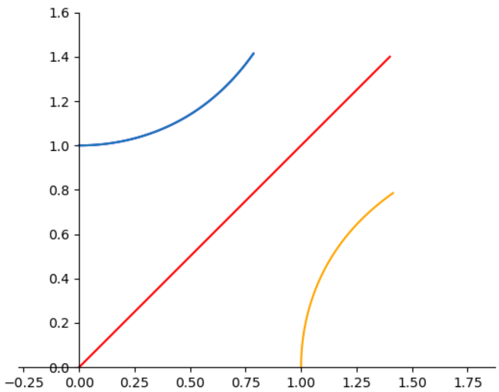
Partie 2. Étude des dérivées successives de f.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :
$$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$
3. Déterminer les polynômes P_1 et P_2.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P_{n+1}(x) = (1-x^2)P_n'(x) + (n+1)xP_n(x)$.
En déduire le polynôme P_3.
5. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

Partie 1. Étude de la bijection réciproque de f.

1. On applique ici le théorème de la bijection à f.
   - f est une fonction **continue sur** I comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
   - f est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a pour tout $x \in I$:
   $$f'(x) = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$$
   Pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, on a $f'(x) > 0$, et $f'(0) = 0$. La fonction f est donc **strictement croissante sur** I.

   Par le théorème de la bijection, la fonction f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$ qui est $[f(0), f(\pi/4)] = \left[1, 2/\sqrt{2}\right]$.
2. On trace l'allure de la courbe de f en utilisant que $f'(0) = 0$. La courbe de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la droite $y = x$.



Courbes de f et de f^{-1}.

Script Python.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# droite  y = x
t = np.arange(0,1.5,0.1)
plt.plot(t,t,'red')

# courbe  de  f
x = np.linspace(0,np.pi/4,100)
y = 1/np.cos(x)
plt.plot(x,y,'blue')

# courbe  de  f^{-1}
plt.plot(y,x,'orange')
```

3. On a pour tout $x \in J$:
$$f \circ f^{-1}(x) = x.$$

D'où en remplaçant :

$$\frac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)} = x$$

On en déduit en passant à l'inverse (possible car $x \neq 0$ sur J) :

$$\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x}.$$

Pour la deuxième égalité, on utilise que pour tout $y \in I$, on a :

$$\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2(y) = 1 - \cos^2(y).$$

En prenant la racine carrée, on obtient :

$$\sin(y) = \pm\sqrt{1-\cos^2(y)}.$$

Et comme la fonction sin est positive sur $[0, \pi/4]$, on en déduit que :

$$\sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)}.$$

Enfin, avec $y = f^{-1}(x)$, on a bien l'égalité :

$$\sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1-\cos^2(f^{-1}(x))} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}.$$

4. Rappelons le théorème de dérivation de f^{-1} :

> **Rappel. Dérivabilité de la fonction réciproque.**
> Soit f une fonction bijective d'un intervalle I sur un intervalle J. Alors f^{-1} est dérivable sur J si et seulement si f est dérivable sur I et f' **ne s'annule pas** sur I. Et on a alors
>
> $$\forall x \in J, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Ici f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur $I\backslash\{0\}$, donc f^{-1} est dérivable sur $J\backslash\{f(0)\} = J\backslash\{1\}$ et on a pour tout $x \in J \setminus \{1\}$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{\cos^2(f^{-1}(x))}{\sin(f^{-1}(x))} = \frac{1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

5. Puisque f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2} \in J$, on sait alors que f^{-1} admet un $DL_1(\sqrt{2})$ et que celui-ci est :

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(\sqrt{2}) + (f^{-1})'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) + o((x-\sqrt{2})).$$

Or $f^{-1}(\sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{4}$ et $(f^{-1})'(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On a donc le DL :

$$f^{-1}(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\sqrt{2}) + o((x-\sqrt{2})).$$

Partie 2. Étude des dérivées successives de f.

1. f est le quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. On montre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

Init. On a $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$ en prenant $P_0 = 1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n, et montrons cette propriété au rang $n+1$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}.$$

On dérive (f est $\mathscr{C}^\infty$, on peut donc le faire) :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\cos(x)P_n'(\sin(x))\cos^{n+1}(x) - (n+1)\sin(x)\cos^n(x)P_n(\sin(x))}{\cos(x)^{2n+2}} \\ &= \frac{\cos^2(x)P_n'(\sin(x)) - (n+1)\sin(x)P_n(\sin(x))}{\cos(x)^{n+2}} \\ &= \frac{(1-\sin^2(x))P_n'(\sin(x)) - (n+1)\sin(x)P_n(\sin(x))}{\cos(x)^{n+2}}. \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$ en posant $P_{n+1} : x \mapsto (1-x^2)P_n'(x) + (n+1)xP_n(x)$.

Concl. Par principe de récurrence, on a donc montré la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On dérive f :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}.$$

D'où $P_1 : x \mapsto x$. En dérivant à nouveau (f est deux fois dérivable !), on a pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\cos(x)\cos(x)^2 + 2\sin(x)\cos(x)\sin(x)}{\cos(x)^4} \\ &= \frac{\cos(x)^2 + 2\sin(x)^2}{\cos(x)^3} = \frac{(1-\sin(x)^2) + 2\sin(x)^2}{\cos(x)^3} \end{aligned}$$

Donc, on a $P_2 : x \mapsto 1 + x^2$.

Pour aller plus loin.

S'il existe, le polynôme P_n satisfaisant :

$$\forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$$

est unique. En effet, si Q_n satisfait la même relation, on aurait alors :

$$\frac{P_n(\sin(x)) - Q_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} = 0, \quad \text{soit} \quad (P_n - Q_n)(\sin(x)) = 0 \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Le polynôme $P_n - Q_n$ admet ainsi une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul, de sorte que $P_n = Q_n$.

4. On a vu dans la récurrence précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P_{n+1} : x \mapsto (1-x^2)P_n'(x) + (n+1)xP_n(x)$. On calcule P_3 grâce à cette formule. On trouve $P_3 : x \mapsto x^3 + 5x$.

5. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et que $CD(P_n) = 1$ (où $CD(P_n)$ désigne le coefficient dominant de P_n).

Init. $P_0 = 1$ donc la propriété est vrai au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n, et montrons la propriété au rang $n+1$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_{n+1}(x) = (1-x^2)P_n'(x) + (n+1)xP_n(x).$$

Par hypothèse de récurrence, on a $\deg(P_n) = n$ et P_n unitaire. Le degré de P_n' est au plus $n-1$, de sorte que $\deg((1-x^2)P_n'(x)) \leq n+1$, et $\deg((n+1)xP_n(x)) = n+1$. Ainsi $\deg(P_{n+1}) \leq n+1$.

On regarde le terme de plus au degré, en x^{n+1} : dans $(1-x^2)P_n'(x)$, il est égal à $-x^2 \times (nx^{n-1}) = -nx^{n+1}$, et dans $(n+1)xP_n(x)$ il vaut $(n+1)x \times x^n$. Ainsi le terme de plus au degré de P_{n+1} est $[-n+(n+1)]x^{n+1} = x^{n+1}$. D'où la propriété au rang $n+1$.

Concl. On conclut par principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire de degré n.

Exercice 0.5 (Polynômes d'interpolation de Lagrange - ✍)

Étant donné $(n+1)$ réels distincts $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ et $(n+1)$ réels $(b_0, b_1, \cdots, b_n)$, on cherche un polynôme P de degré minimal tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad P(a_i) = b_i.$$

Proposition. Un tel polynôme existe. Il est de plus unique si l'on suppose que $\deg(P) \leq n$.

1. On définit $L_i : x \mapsto \prod_{k \neq i} \frac{x - a_k}{a_i - a_k}$.

   Montrer que $L_i \in \mathbb{R}_n[x]$ pour tout i, et calculer $L_i(a_j)$.

   En déduire l'existence du polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $P(a_i) = b_i$.

2. Démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

   Y a-t-il toujours unicité si on ne suppose pas $\deg(P) \leq n$?

1. On pose donc $L_i(x) = \prod_{k \neq i} \frac{x - a_k}{a_i - a_k} = \frac{x - a_1}{a_i - a_1} \cdots \frac{x - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} \frac{x - a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} \cdots \frac{x - a_n}{a_i - a_n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   L_i est le produit de n polynômes de $\mathbb{R}[x]$ de degré 1, donc $L_i \in \mathbb{R}_n[x]$.

   On a pour tout $0 \leq j \leq n$:

   - si $j \neq i$, a_j est racine de L_i par définition, donc $L_i(a_j) = 0$;
   - si $j = i$, alors on a :

   $$L_i(a_i) = \underbrace{\frac{a_i - a_1}{a_i - a_1}}_{=1} \cdots \underbrace{\frac{a_i - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}}}_{=1} \underbrace{\frac{a_i - a_{i+1}}{a_i - a_{i+1}}}_{=1} \cdots \underbrace{\frac{a_i - a_n}{a_i - a_n}}_{=1} = 1.$$

   On retiendra donc que le polynôme L_i satisfait :

   $$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases} =: \delta_{i,j} \quad \text{(appelé } \textit{symbole de Kronecker}\text{)}.$$

   On cherche un polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $P(a_i) = b_i$. Pour cela, on utilise les polynômes L_i introduits précédemment, et on va chercher P comme combinaison linéaire des L_i :

   $$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i.$$

   En évaluant en $x = a_j$, on obtient :

   $$P(a_j) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \underbrace{L_i(a_j)}_{=\delta_{i,j}} = \lambda_j.$$

   On en déduit que $P = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i$ convient : il est bien de degré $\leq n$ comme combinaison linéaire de polynômes de degré n, et on a bien $P(a_i) = b_i$ pour tout $0 \leq i \leq n$.

Exemple. Prenons $n = 2$, $a_0 = 0, a_1 = 1$ et $a_2 = 2$. Les polynômes de Lagrange associés sont :

$$L_0 : x \mapsto \frac{x-1}{0-1}\frac{x-2}{0-2} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2),$$

$$L_1 : x \mapsto \frac{x-0}{1-0}\frac{x-2}{1-2} = -x(x-2),$$

$$L_2 : x \mapsto \frac{x-0}{2-0}\frac{x-1}{2-1} = \frac{1}{2}x(x-1).$$

Si $b_0 = 3$, $b_1 = 2$, $b_2 = -2$, le polynôme P construit précédemment est donné dans notre cas par :

$$P(x) = 3L_0(x) + 2L_1(x) - 2L_2(x) = \frac{3}{2}(x-1)(x-2) - 2x(x-2) - x(x-1).$$

On vérifiera qu'on a bien alors $P(0) = 3$, $P(1) = 2$ et $P(2) = -2$, ce qu'on voulait.

2. Supposons qu'il existe deux polynômes P_1 et P_2 de degré $\leq n$ et tels que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad P_1(a_i) = b_i = P_2(a_i).$$

Posons $Q = P_1 - P_2$. Q est un polynôme de degré $\leq n$ ayant $n+1$ racines distinctes $a_0, \ldots, a_n$. C'est donc le polynôme nul :

$$Q = 0_{\mathbb{R}[x]} \quad \Rightarrow \quad P_1 = P_2.$$

Il n'y a plus unicité si on ne suppose pas $\deg(P) \leq n$: en effet, si P est le polynôme ci-dessus, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme $Q_\lambda : x \mapsto P(x) + \lambda \prod_{0 \leq i \leq n} (x - a_i)$ satisfait aussi :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad Q_\lambda(a_i) = b_i.$$

Exercice 0.6 (Polynômes de Tchebychev - ✍)

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \text{ et } P_1(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x) \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la parité, le degré ainsi que le coefficient dominant de P_n.
2. (a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.
   (b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $[0, \pi]$ l'équation $\cos(n\theta) = 0$.
   (b) En déduire que P_n est scindé dans $\mathbb{R}$ et déterminer ses racines.
   (c) Donner alors une expression factorisée de $P_n(x)$.
   (d) En calculant $P_n(0)$ de deux manières différentes, montrer que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrons par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: « P_n est de même parité que n ».

Init. Comme $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$, $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont bien satisfaites.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies. Montrons $\mathscr{P}(n+2)$ vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_{n+1}(-x) = (-1)^{n+1}P_{n+1}(x)$ et $P_n(x) = (-1)^n P_n(x)$ car P_n a même parité que n. D'où en substituant dans la relation définissant P_{n+2} :

$$P_{n+2}(-x) = 2(-x)(-1)^{n+1}P_{n+1}(x) - (-1)^n P_n(x) = (-1)^{n+2}(2xP_{n+1}(x) - P_n(x)) = (-1)^{n+2}P_{n+2}(x).$$

Ainsi P_{n+2} est de même parité que $n+2$ ce qui prouve $\mathscr{P}(n+2)$.

Concl. Par principe de récurrence on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Montrons par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété : $\mathscr{Q}(n)$: « $\deg(P_n) = n$ et que le coefficient dominant $CD(P_n) = 2^{n-1}$ ».

Init. Pour $n=1$, $P_1(x) = x$ donc $\deg(T_1) = 1$ et $CD(T_1) = 1 = 2^0$.
Pour $n=2$, $P_2(x) = 2x^2 - 1$ donc $\deg(T_2) = 2$ et $CD(T_2) = 2 = 2^{2-1}$. Ainsi $\mathscr{Q}(1)$ et $\mathscr{Q}(2)$ sont vraies.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathscr{Q}(n)$ et $\mathscr{Q}(n+1)$ sont vraies. Montrons $\mathscr{Q}(n+2)$ vraie aussi.

On a $P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x)$. Par hypothèse de récurrence, on a $\deg(P_n) = n$ et $\deg(2xP_n) = \deg(x) + \deg(P_{n+1}) = n+2$. Ainsi $\deg(P_n) < \deg(2xP_{n+1}))$, et donc $\deg(P_{n+2})$ est égal à $\deg(2xP_n) = n+2$.

De plus, comme $\deg(P_n) < \deg(2xP_{n+1}))$, le coefficient dominant de P_{n+2} est celui du polynôme $2xP_{n+1}$. Or, on a :

$$CD(P_{n+2}) = CD(2xP_{n+1}) = 2CD(xP_{n+1}) = 2CD(P_{n+1}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

D'où la propriété au rang $(n+2)$.

Concl. Par principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n$ et $CD(P_n) = 2^{n-1}$.

C'est de plus vrai pour $n = 0$ car $\deg(P_0) = 0$ et $CD(P_0) = 1$.

2. (a) On a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

D'où en sommant ces deux expressions :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

(b) Montrons par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{S}(n)$: « pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ ».

Init. $P_0(\cos(x)) = 1 = \cos(0 \times x)$ et $P_1(\cos(x)) = \cos(x) = \cos(1 \times x)$. Donc $\mathscr{S}(0)$ et $\mathscr{S}(1)$ sont vraies.

Hér. Soit $n \geq 0$ tel que $\mathscr{S}(n)$ et $\mathscr{S}(n+1)$ sont vraies. Montrons que $\mathscr{S}(n+2)$ est également vraie.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos(x)) &= 2\cos(x)P_{n+1}(\cos(x)) - P_n(\cos(x)) && \text{par définition des polynômes de T.} \\ &= 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx) && \text{par hyp. de réc.} \\ &= \cos(x + (n+1)x) + \cos(x - (n+1)x) - \cos(nx) && \text{par la formule précédente.} \\ &= \cos((n+2)x) + \cos(-nx) - \cos(nx) = \cos((n+2)x) \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n+2$.

Concl. Par principe de récurrence, on a $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. (a) On résout l'équation $\cos(nx) = 0$ pour $x \in [0, \pi]$. On a :

$$\begin{aligned} \cos(nx) = 0 &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ nx = \frac{\pi}{2} + k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{n} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \underset{x \in [0,\pi]}{\iff} \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ x = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$\left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2n},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

(b) Pour tout $x \in [0,\pi]$, on a $P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$. D'après la question précédente, on a pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$:

$$P_n\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0.$$

Ainsi, $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ est racine de P_n pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$. Or, pour $k \in [\![0,n]\!]$, les éléments $\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont deux à deux distincts de $[0,\pi]$, intervalle sur lequel cos est injective (car strictement décroissante), donc on a trouvé $n = \deg(P_n)$ racines distinctes pour P_n. On les a donc toutes et P_n est scindé sur $\mathbb{R}$.

(c) Comme le coefficient dominant de P_n est 2^{n-1} (par la question précédente), sa forme factorisée est :

$$P_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$$

(d) Prenons $x=0$ dans l'expression factorisée précédente. On obtient :

$$P_n(0) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(0 - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = (-1)^n 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).$$

D'autre part, on a :

$$P_n(0) = P_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases}(-1)^{n/2} \text{ si } n \text{ est pair,}\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}.$$

Avec ces deux égalités, on obtient donc :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases}\dfrac{(-1)^{n/2}}{(-1)^n 2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair,}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} = \begin{cases}\dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair,}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$