TD0b

Analyse asymptotique, fonctions convexes

Analyse asymptotique

Exercice 0.7 (★)

Calculer les développements limités suivants en 0 :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$ à l'ordre 4 ;
2. $x \mapsto \ln(e+x)$ à l'ordre 4 ;
3. $x \mapsto a^x + b^x$ à l'ordre 3 ;
4. $x \mapsto \cos(x) - \dfrac{\sin(x^2)}{2}$ à l'ordre 4 ;
5. $x \mapsto (1+\exp(x))^2$ à l'ordre 3.
6. $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$ à l'ordre 4.
7. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1-x^2}$ à l'ordre 4.
8. $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ à l'ordre 3.

Exercice 0.8 (★★)

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos x$ à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$.
2. $f : x \mapsto e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 1.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 0.9 (★)

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos(x) - x}{(\ln(1+x))^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\ln(1+x)+1-e^x)}{\sin(x)-x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)}$.

Exercice 0.10 (★)

1. À l'aide de la formule de Taylor-Young, montrer que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x) - x}{2x - 2\ln(1+x) - (\sin(x))^2}$.

> 1. Rappelons pour commencer le résultat suivant :
>
> > **Rappel. Existence d'un développement limité d'ordre n.**
> > Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. **Si** f est classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, **alors** f admet un développement limité d'ordre n en a, donné par la formule de Taylor-Young :
> >
> > $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n).$$
>
> La fonction $f = \arctan$ étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité à

l'ordre 3 en 0 qui est d'après la formule de Taylor Young :

$$\arctan(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

Comme *arctan* est impaire, il n'y a que des termes impairs dans son DL, de sorte qu'on peut préciser :

$$\arctan(x) = f'(0)x + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

Reste donc à calculer les valeurs manquantes :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}$$

soit $f'(0) = 1$ et $f^{(3)}(0) = -2$. On en déduit en remplaçant dans le développement limité que :

$$\arctan(x) = x + \frac{-2}{3!}x^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

2. On obtient donc que $\arctan(x) - x \sim_0 -\frac{x^3}{3}$. D'autre part on a :

$$\begin{aligned} 2x - 2\ln(1+x) - (\sin(x))^2 &= 2x - 2(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - (x + o(x^2))^2 \\ &= 2x - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + o(x^3) = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \sim_0 -\frac{2}{3}x^3 \end{aligned}$$

Ainsi on a $\dfrac{\arctan(x) - x}{2x - 2\ln(1+x) - (\sin(x))^2} \sim_0 \dfrac{-\frac{x^3}{3}}{-\frac{2x^3}{3}} = \dfrac{1}{2}$, et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - x}{2x - 2\ln(1+x) - (\sin(x))^2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 0.11 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0. En déduire la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ en 0 et leurs positions relatives.
2. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} x + 1 + \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Que dire de $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$?

1. On a les DL en 0 suivants :

$$x\sqrt{x^2+1} \underset{x\to 0}{=} x \times (1 + o(x)) = x + o(x^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{x-1} \underset{x\to 0}{=} -1 - x - x^2 + o(x^2).$$

D'où par produit :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} (x + o(x^2)) \times (-1 - x - x^2 + o(x^2)) = -x - x^2 + o(x^2).$$

On obtient alors la tangente en 0 en conservant les termes de degrés 0 et 1. La tangente à

f en 0 est donc $y = -x$. De plus, on a :

$$f(x) + x \underset{x\to 0}{=} -x^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2.$$

$f(x) + x$ est donc du signe de $-x^2$ au voisinage de 0, donc négatif. On peut donc conclure que T_0 est au dessus de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.

2. On a :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{1-\frac{1}{x}} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

On a :

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'où par produit :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \times \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x+1+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

En particulier, on a :

$$f(x) - (x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2x}.$$

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = 0$, et $f(x) - (x+1)$ est du signe de $\dfrac{3}{2x}$, donc positif, au voisinage de $+\infty$. On peut interpréter ce résultat graphiquement en disant que la courbe $\mathscr{C}_f$ « tend » en $+\infty$ vers la droite d'équation $y = x+1$, et qu'elle est au dessus de cette droite au voisinage de $+\infty$. On parle d'asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.

On retiendra de cet exercice les points suivants :

✍ À retenir. Étude locale d'une fonction.

- Pour déterminer la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point a, on peut effectuer un $DL_1(a)$ de f : l'équation de la tangente est alors donnée par les termes de degrés 0 et 1 de ce développement limité.

- Pour déterminer la position relative de la courbe représentative d'une fonction f par rapport à sa tangente, on cherche un équivalent de $x \mapsto f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$ en a en effectuant un DL de f :

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \underset{a}{\sim} a_p(x-a)^p \quad \text{avec} \quad a_p \in \mathbb{R}^* \text{ et } p \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}.$$

  Alors $x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est du signe de $a_p(x-a)^p$ au voisinage de a :

  - si p est pair, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est de signe constant au voisinage de a. La courbe est au-dessus ou en-dessous de sa tangente en a (suivant le signe de a_p).
  - si p est impair, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ change de signe en a. La courbe traverse sa tangente en a. On parle de *point d'inflexion*.

À retenir. Asymptotes obliques.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une *asymptote oblique* en $\pm\infty$ s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) - ax - b$ tende vers 0 en $\pm\infty$.

Exercice 0.12 (★)

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n = (2n-1)^3$, alors :

   ☐ $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^3$ ☐ $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n^4)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$ ☐ $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{n^4}{2}\right)$

2. Si $u_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}$, alors :

   ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ ☐ $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ ☐ $\frac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$ ☐ $u_n = \frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

   ☐ $u_n = \frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

3. Soit (u_n) une suite réelle. Alors on a $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

4. Soient (u_n), (v_n), (a_n), (b_n) des suites telles que $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$ et $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$, alors :

   ☐ $2u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n)$ ☐ $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n^2)$ ☐ $u_n + v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(a_n + b_n)$

   ☐ si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $u_n + v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$ ☐ si $a_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$, alors $u_n + v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(b_n)$.

5. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors :

   ☐ $u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + 1$ ☐ $2u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ☐ $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$ ☐ $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$ ☐ $u_n - v_n = o(v_n)$

   ☐ $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$ ☐ $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$

1. Fait en cours.

2. Fait en cours.

3. On a $u_{n+1} \sim u_n$ si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. En écrivant cela, on se doute (?) qu'on peut trouver une suite réelle ne satisfaisant pas ce point. Cette affirmation est effectivement fausse, et un contre-exemple est donné par une suite géométrique de raison $q \neq 1$. En effet, si (u_n) est définie par $u_n = q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q \neq 1.$$

4. On suppose que $u_n = o(a_n)$ et que $v_n = o(b_n)$, ce qui s'écrit encore $\lim \dfrac{u_n}{a_n} = 0$ et $\lim \dfrac{v_n}{b_n} = 0$.

   ☐ On a bien $\lim \dfrac{2u_n}{a_n} = 0$, donc l'affirmation $2u_n = o(a_n)$ est vraie.

   ☐ Difficile de prédire que $\lim \dfrac{u_n}{a_n^2} = 0$ avec la seule hypothèse de l'énoncé. Et cette affirmation est effectivement fausse, un contre-exemple étant (vérifiez-le) les suites de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

- ☐ Cette affirmation est fausse, mais le contre-exemple est bien difficile à trouver. Je vous laisse vérifier que les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1/n, a_n = 1 + 1/n, v_n = 1/n, b_n = -1 + 1/n$ conviennent.
- ☐ Tentons de le vérifier en revenant à la définition :

$$\frac{u_n + v_n}{b_n} = \frac{u_n}{b_n} + \frac{v_n}{b_n} = \frac{u_n}{a_n} \times \frac{a_n}{b_n} + \frac{v_n}{b_n} \longrightarrow 0 \times 1 + 0 = 0.$$

Ainsi, l'affirmation $u_n + v_n = o(b_n)$ est vraie.

- ☐ Là aussi, tentons de le vérifier :

$$\frac{u_n + v_n}{b_n} = \frac{u_n}{b_n} + \frac{v_n}{b_n} = \frac{u_n}{a_n} \times \frac{a_n}{b_n} + \frac{v_n}{b_n} \longrightarrow 0 \times 0 + 0 = 0.$$

Donc l'affirmation $u_n + v_n = o(b_n)$ est vraie.

5. On suppose que $u_n \sim v_n$, soit $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$.

- ☐ Il est peu probable que cette affirmation soit vraie, puisqu'on somme ici des équivalents. Il faut donc déterminer un contre-exemple. Je vous laisse vérifier que $u_n = -1 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = -1 + \dfrac{1}{n^2}$ conviennent.
- ☐ Cette affirmation est fausse puisque :

$$\frac{2u_n}{v_n} = 2\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 2 \times 1 = 2 \neq 1.$$

Donc l'affirmation $2u_n \sim v_n$ est fausse.

- ☐ Cette affirmation est vraie, ce qu'on vérifie aisément en revenant à la définition :

$$\frac{-u_n}{-v_n} = \frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1.$$

- ☐ En se souvenant que les équivalents sont compatibles avec le produit, on obtient :

$$u_n \times v_n \sim u_n \times u_n = u_n^2.$$

L'affirmation est donc vraie.

- ☐ Cette affirmation est vraie. En effet, et on l'avait établi au chapitre 0, on a :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n - v_n}{v_n} \right) = 0 \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n).$$

Et cette affirmation peut-être bien utile en exercice.

À retenir. Équivalence de deux suites.

On a :

$$\boxed{u_n \sim v_n \quad \Longleftrightarrow \quad u_n - v_n = o(v_n) \quad \text{(ou encore } u_n = v_n + o(v_n))}.$$

- ☐ Cette affirmation est probablement fausse en général, puisqu'on compose ici (à gauche) par le logarithme. Cherchons un contre-exemple : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ conviennent (je vous laisse le vérifier).
- ☐ Même chose ici, on compose (à gauche) des équivalents par le logarithme. Cette affirmation est bien fausse : prendre $u_n = n$ et $v_n = n+1$ pour le montrer.

Exercice 0.13 (★★)

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

1. $u_n = \exp\left(\frac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1$
2. $v_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+n}$
3. $w_n = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right)\right)$

1. On a $\frac{1-\sqrt{n}}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\sqrt{n}}{n} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$, de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\sqrt{n}}{1+n} = 0$. Comme de plus $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on a donc :
$$\exp\left(\frac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\sqrt{n}}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$
2. On a ici une différence entre deux termes, ce qui nous pousse à passer par un développement limité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned} v_n &= \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+n} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} \\ &= n\left(1 + \frac{1}{2n^2} - 1 - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{6n}. \end{aligned}$$
3. On sait que $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$, d'où ici pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$w_n = \sin(\sin(\frac{n}{2^n})).$$
Or on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(\frac{n}{2^n}) = 0$ par composition avec la fonction continue sin. D'où en se rappelant que $\sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$:
$$w_n = \sin(\sin(\frac{n}{2^n})) \sim \sin(\frac{n}{2^n}) \sim \frac{n}{2^n}.$$

Exercice 0.14 (★★)

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{2^n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$
2. $u_n = \sqrt[n]{n}$
3. $u_n = n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$
4. $u_n = \left(\frac{n}{n-x}\right)^n$
5. $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
6. $u_n = \frac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2+2} + \ln(n)}$

Exercice 0.15 (★★★)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ que l'on notera x_n. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 0}$.

2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.

3. Montrer que $x_n - n\pi \sim \frac{\pi}{2}$.

4. Montrer que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$. En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ et $g : x \in I_n \mapsto \tan(x) - x$.

   - La fonction g est **continue** sur I_n.
   - La fonction g est dérivable sur I_n, et pour tout $x \in I_n$, $g'(x) = \tan^2(x)$. Ainsi $g'(x) > 0$ pour tout $x \neq n\pi$, et $g'(n\pi) = 0$. g est donc **strictement croissante** sur I_n.
   - On a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + n\pi} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2} + n\pi} g(x) = -\infty$.

   Par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de I_n sur $\mathbb{R}$. L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution sur I_n qu'on note x_n :

   $$\tan(x_n) = x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{\pi}{2} + n\pi \leq x_n \leq \frac{\pi}{2} + n\pi$, soit encore $-\frac{1}{2n} + 1 \leq \frac{x_n}{n\pi} \leq \frac{1}{2n} + 1$. Par le théorème des gendarmes, $\lim \frac{x_n}{n\pi}$ existe et vaut 1. En d'autres termes, $x_n \sim n\pi$.

3. Posons $y_n = x_n - n\pi$. Commençons par noter que d'après la question précédente, on a $y_n = o(n\pi)$. En effet, souvenons nous du point suivant, primordial dans cet exercice.

   > **Rappel. Équivalence de deux suites.**
   > On a :
   >
   > $$\boxed{u_n \sim v_n \quad \Longleftrightarrow \quad u_n - v_n = o(v_n) \quad (\text{ou encore } u_n = v_n + o(v_n))}$$
   >
   > puisque :
   >
   > $$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n - v_n}{v_n}\right) = 0 \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n).$$

   Notons de plus que $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En remplaçant dans l'équation définissant x_n, on obtient :

   $$\tan(y_n) = \tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n.$$

   En appliquant arctan, on en déduit :

   $$y_n = \arctan(x_n) \to \pi/2 \ \text{ car } \lim x_n = +\infty.$$

   D'où $y_n \sim \dfrac{\pi}{2}$, ce qui s'écrit aussi (toujours par le rappel ci-dessus) $y_n - \frac{\pi}{2} = o(1)$.

4. Posons à présent $z_n = y_n - \frac{\pi}{2} = o(1)$. On a :

   $$\tan(z_n) = \tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\cos(y_n)}{\sin(y_n)} = \frac{-1}{\tan(y_n)} = \frac{-1}{x_n} \sim \frac{-1}{n\pi}.$$

Or $z_n = o(1)$, donc $\tan(z_n) \sim z_n$. On conclut ainsi que $z_n \sim \dfrac{-1}{n\pi}$. Cela se réécrit de la manières suivante :

$$x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{-1}{n\pi} + o\left(\frac{-1}{n\pi}\right)$$

soit encore :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$