TD0b

Analyse asymptotique

Exercice 0.7 (★)

Calculer les développements limités suivants en 0 :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{2+x}$ à l'ordre 4 ;
2. $x \mapsto \ln(e+x)$ à l'ordre 4 ;
3. $x \mapsto a^x + b^x$ à l'ordre 3 ;
4. $x \mapsto \cos(x) - \dfrac{\sin(x^2)}{2}$ à l'ordre 4 ;
5. $x \mapsto (1+\exp(x))^2$ à l'ordre 3.
6. $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$ à l'ordre 4.
7. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1-x^2}$ à l'ordre 4.
8. $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ à l'ordre 3.

Exercice 0.8 (★★)

Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos x$ à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$.
2. $f : x \mapsto e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 1.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 0.9 (★)

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{(\ln(1+x))^2}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(\ln(1+x) + 1 - e^x)}{\sin(x) - x}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)}$.

Exercice 0.10 (★)

1. À l'aide de la formule de Taylor-Young, montrer que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - x}{2x - 2\ln(1+x) - (\sin(x))^2}$.

Exercice 0.11 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0. En déduire la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ en 0 et leurs positions relatives.
2. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{=} x + 1 + \dfrac{3}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Que dire de $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$?

Exercice 0.12 (★★)

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $u_n = (2n-1)^3$, alors :

   ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^3$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^4)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{n^4}{2}\right)$

2. Si $u_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}$, alors :

   ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ ☐ $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ ☐ $u_n = \frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

   ☐ $u_n = \frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

3. Soit (u_n) une suite réelle. Alors on a $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

4. Soient (u_n), (v_n), (a_n), (b_n) des suites telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(a_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$, alors :

   ☐ $2u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(a_n)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(a_n^2)$ ☐ $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(a_n + b_n)$

   ☐ si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ ☐ si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$.

5. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors :

   ☐ $u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + 1$ ☐ $2u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ☐ $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$ ☐ $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$ ☐ $u_n - v_n = o(v_n)$

   ☐ $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$ ☐ $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$

Exercice 0.13 (★★)

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

1. $u_n = \exp\left(\dfrac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1$
2. $v_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+n}$
3. $w_n = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right)\right)$

Exercice 0.14 (★★)

Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{2^n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$
2. $u_n = \sqrt[n]{n}$
3. $u_n = n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$
4. $u_n = \left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n$
5. $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
6. $u_n = \dfrac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2+2} + \ln(n)}$

Exercice 0.15 (★★★)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ que l'on notera x_n. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
3. Montrer que $x_n - n\pi \sim \frac{\pi}{2}$.
4. Montrer que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$. En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 0.16 (★★ - Pour s'entrainer encore)

1. Étudier les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(\ln(x)))^2 - \cos(x)^5 + \ln(x)}{2^x - 50x}$.
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos(\pi x/2)}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 + x^2 + \sin(x)^3}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$.

2. Déterminer un équivalent simple au point considéré des fonctions suivantes :

- $x \mapsto \dfrac{\sin(x) + \cos(x) - 1}{\tan(x - x\cos(x))}$ en 0.
- $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+\tan(x)^2} - 1}{\tan(x)}$ en 0.

3. Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

- $u_n = \dfrac{n - \ln(n) + 4/n}{e^n - n^2}$.
- $u_n = \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)\right]^n$.