TD1

Calcul matriciel

Opérations matricielles

Exercice 1.1 (★ - Matrices stochastiques - ✍)

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *stochastique* si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geq 0$ est un réel positif et si $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. On note $\mathcal{ST}$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

1. Donner des exemples de matrices stochastiques.
2. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{ST}$, alors $\lambda \cdot A + (1-\lambda) \cdot B$ est dans $\mathcal{ST}$ également.
   Un ensemble satisfaisant une telle propriété est dit convexe.
3. (a) Notons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in \mathcal{ST} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i,j, a_{i,j} \geq 0 \\ AX = X \end{cases}$.
   (b) En déduire que si A et B sont stochastiques, alors $A \times B$ est stochastique.
4. (★) Déterminer les matrices A de $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ qui sont inversibles et telles que $A^{-1} \in \mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$.

4. Soit $A = (a_{i,j})$ une telle matrice, et $B = A^{-1} = (b_{i,j})$ sa matrice inverse, supposée stochastique aussi. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i \neq j$. En identifiant le coefficient en position (i,j) dans l'égalité $B \times A = I_n$, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j} = [B \times A]_{i,j} = [I_n]_{i,j} = 0.$$
Or par hypothèse, les coefficients des matrices A et B sont tous positifs. L'égalité précédente implique donc :
$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad b_{i,k} a_{k,j} = 0. \qquad (*)$$
Fixons alors $k \in [\![1,n]\!]$. Comme la matrice B est inversible, la k-ème colonne de B n'est pas nulle (nous y reviendrons si besoin à la fin de l'exercice), et il existe donc un indice de ligne qu'on notera $i_k \in [\![1,n]\!]$ tel que $b_{i_k,k} \neq 0$. Mais alors en reprenant $(*)$, on obtient que pour tout $j \neq i_k$:
$$b_{i_k,k} a_{k,j} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{k,j} = 0.$$
Ainsi, la k-ème ligne de A ne contient que des 0, sauf éventuellement le coefficient a_{k,i_k}. Et comme la matrice A est stochastique par lignes, on a nécessairement $a_{k,i_k} = 1$.

Résumons : on vient de montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la k-ème ligne de A ne contient que des coefficients nuls sauf celui en position (k, i_k) qui lui vaut 1.

Reste alors une dernière remarque à faire : prenons $1 \leq k < \ell \leq n$ et comparons les lignes k et ℓ de A. Elles ont un seul coefficient non nul (qui vaut 1) respectivement en position (k, i_k) et (ℓ, i_ℓ). Si $i_k = i_\ell$, alors les lignes k et ℓ de A seraient égales, ce qui est impossible puisque A est inversible (voir là-aussi si besoin la remarque ci-dessous).

Finalement, chaque ligne de A contient un et un seul coefficient non nul, qui vaut 1, et ces 1 sont sur des colonnes toutes distinctes. Prenons quelques exemples de telles matrices en dimension 3×3 pour visualiser mieux les choses :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_n$$
sont de ce type.

Réciproquement, on vérifie qu'une telle matrice est bien stochastique par lignes, qu'elle est inversible, et que son inverse est une matrice de même « forme » qui est elle aussi stochastique.

Remarque. Deux affirmations ont pu vous déranger :

- « une matrice ayant une colonne nulle n'est pas inversible »,
- « une matrice ayant deux lignes identiques n'est pas inversible ».

Pour le démontrer, on peut appliquer l'algorithme de Gauss à de telles matrices et s'apercevoir qu'elles auront strictement moins de n pivots, et donc que leur rang sera $< n$. Mais ce n'est pas le plus simple. Rappelons (on le reverra au chapitre 4) que le rang d'une matrice est aussi la dimension de l'espace engendré par ses lignes, ou bien encore la dimension de l'espace engendré par ses colonnes. Si l'une des deux affirmations est satisfaite, cette dimension est $< n$, et la matrice n'est pas inversible.

Pour aller plus loin.

Les matrices que nous avons mis en évidence dans cette question sont appelées matrices de permutations. Et pour cause, elles sont liées à une permutation qu'on a mise en évidence dans l'exercice : l'application $\sigma : k \in [\![1, n]\!] \mapsto i_k \in [\![1, n]\!]$ (qui est bien bijective car injective comme vu dans l'exercice, avec des ensembles de départ et d'arrivée de même cardinaux). On note alors conventionnellement $A = P_\sigma$, appelée *matrice de permutation associée à* σ. Elle se définit aisément avec le symbole de Kronecker en posant :

$$P_\sigma = (\delta_{\sigma(i),j})_{i,j}.$$

Par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de permutation associée à la permutation σ de $[\![1, 3]\!]$ définie par $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 3$. Inversement, si τ est la permutation de $[\![1, 3]\!]$ définie par $\tau(1) = 3$, $\tau(2) = 1$, $\tau(3) = 2$, alors on a $P_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut enfin montrer que si σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$, alors P_σ est inversible, et que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$ (c'est un bon exercice !). L'inverse d'une matrice de permutation est donc aussi une matrice de permutation.

Les matrices de permutations sont abordées notamment dans le sujet d'ESSEC 2017.

Exercice 1.2 (★★ - Produit de matrices élémentaires - ✍)
Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit pour tout $1 \leq i, j \leq n$ la matrice $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ où l'unique coefficient non nul égal à 1 est en position (i, j). Les $n \times p$ matrices $E_{i,j}$ sont appelées *matrices élémentaires*.

Montrer la formule suivante :

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} \cdot E_{i,l}$$

où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker : $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$, 0 si $j \neq k$.

Exercice 1.3 (★★★ - Centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ - ✍)
On considère l'ensemble suivant (appelé le *centre de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) :

$$\mathscr{Z}_n = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ A \times M = M \times A\}.$$

1. Proposer deux matrices appartenant à $\mathscr{Z}_n$.

2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ appartient-elle à $\mathscr{Z}_2$?
3. On souhaite déterminer l'ensemble $\mathscr{Z}_n$. Considérons pour cela une matrice M appartenant à $\mathscr{Z}_n$.
   (a) Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.
   (b) En déduire que M est une matrice scalaire, c'est à dire de la forme $\lambda \cdot I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (c) Conclure.

1. On peut proposer 0_n ou I_n. Plus globalement, toute matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme λI_n pour $\lambda \in \mathbb{K}$, est dans $\mathscr{Z}_n$. Le but de la suite de l'exercice est de montrer qu'il n'y en a pas d'autres.
2. On a :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times E_{1,2} = E_{1,2} \neq E_{1,2} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E_{1,2}.$$
   Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas dans le centre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
3. (a) On utilise pour cela le résultat de l'exercice précédent :
$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   On a ici pour tout $1 \leq i, j \leq n$:
$$\begin{aligned} E_{i,j} \times M = E_{i,j} \times \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} m_{k,\ell} E_{k,\ell} \right) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} m_{k,\ell} \underbrace{E_{i,j} \times E_{k,\ell}}_{=0 \text{ si } k \neq j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} m_{j,\ell} E_{i,\ell} \end{aligned}$$
   D'autre part, on a :
$$\begin{aligned} M \times E_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} m_{k,\ell} E_{k,\ell} \right) \times E_{i,j} &= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{k,\ell} \underbrace{E_{k,\ell} E_{i,j}}_{=0 \text{ si } \ell \neq i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} E_{k,j} \end{aligned}$$
   (b) Puisque $M \in \mathscr{Z}_n$, on a $M \times E_{i,j} = E_{i,j} \times M$, d'où :
$$\sum_{\ell=1}^{n} m_{j,\ell} E_{i,\ell} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} E_{k,j}.$$
   En identifiant alors les coefficients de chacune de ces matrices (on utilise ici la liberté de la famille $(E_{i,j})$ qui est la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$), on a :
$$\begin{cases} m_{j,\ell} = 0 & \text{pour tout } \ell \neq j, \\ m_{k,i} = 0 & \text{pour tout } k \neq i, \\ m_{j,j} = m_{i,i} & (\text{cas } \ell = j \text{ et } k = i). \end{cases}$$
   Ceci étant vrai pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on en déduit que :
$$\begin{cases} m_{i,j} = 0 & \text{pour tout } i \neq j \\ m_{i,i} = m_{j,j} & \text{pour tout } i, j \in [\![1, n]\!]. \end{cases}$$
   La matrice M est donc égale à $M = m_{1,1} I_n$. C'est donc bien une matrice scalaire.

(c) Réciproquement, les matrices scalaires appartiennent bien à $\mathscr{Z}_n$. On a donc bien montré (par double inclusion) que :
$$\mathscr{Z}_n = \{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{R}\}\ (= \mathrm{Vect}(I_n).)$$

Exercice 1.4 (★★★ - Matrices triangulaires supérieures strictes - ✍)
Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'ordre $\leq n$.

1. Soient $k \geq 0$ et notons $\mathscr{T}_k^+(\mathbb{K})$ l'ensemble de matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j.$$
   (i) Identifier $\mathscr{T}_0^+(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_1^+(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^+(K)$
   (ii) Soient $k, l \geq 1$. Montrer que si $A \in \mathscr{T}_k^+(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{I}_l^+(\mathbb{K})$, alors $A \times B \in \mathscr{T}_{k+l}^+(\mathbb{K})$.
2. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente, d'ordre de nilpotence $\leq n$.
3. La réciproque est-elle vraie, c'est-à-dire une matrice nilpotente est-elle nécessairement triangulaire supérieure stricte ?

1. Soient $k \geq 0$ et notons $\mathscr{T}_k^+(\mathbb{K})$ l'ensemble de matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j.$$
   (i) Par définition, $\mathscr{T}_0^+(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j$$
   ce qui correspond aux matrices triangulaires supérieures :
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$
   De même, $\mathscr{T}_1^+(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j - 1$$
   ce qui correspond aux matrices triangulaires supérieures strictes :
$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Enfin, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j - n$$
   ce qui est toujours satisfait. Donc $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ est l'ensemble réduit à la matrice nulle.
   (ii) Soient $k, l \geq 1$ et $A \in \mathscr{T}_k^+(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{I}_l^+(\mathbb{K})$. Alors on a :
$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j \quad \text{ et } b_{i,j} = 0 \text{ si } i > j - l.$$
   On souhaite montrer que $A \times B \in \mathscr{T}_{k+l}^+(\mathbb{K})$, c'est à dire que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :
$$[A \times B]_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j - l.$$

Or on a pour un tel couple (i,j) :

$$[A\times B]_{i,j}=\sum_{r=1}^{n}a_{i,r}b_{r,j}=\sum_{r=1}^{i+k-1}\underbrace{a_{i,r}}_{=0}b_{r,j}+\sum_{r=i+k}^{n}a_{i,r}\underbrace{b_{r,j}}_{=0 \text{ car } r\geq i+k>j-l}=0$$

D'où le résultat.

2. Soit A une matrice triangulaire supérieure stricte. On a donc $A\in\mathscr{T}_1^+(\mathbb{K})$. En utilisant le résultat de la question précédente, on en déduit par une récurrence immédiate que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad A^k\in\mathscr{T}_k^+(\mathbb{K}).$$

En particulier, on a donc $A^n\in\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})=\{0_n\}$. Donc on a bien A nilpotente, d'ordre de nilpotence $\leq n$.

3. C'est bien sûr faux, la matrice nilpotente $\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ avait par exemple été donnée en cours.

Méthode du pivot

Exercice 1.5 (★)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires homogènes suivants :

$$(\mathscr{S}_1):\begin{cases}x+y+2z=0\\x-y-z=0\\x+z=0\end{cases}\qquad(\mathscr{S}_2):\begin{cases}x-3y+z=0\\2x+y+z=0\\x+11y-z=0\end{cases}\qquad(\mathscr{S}_3):\begin{cases}3x+4y+z+2t=0\\6x+8y+2z+6t=0\\9x+12y+3z+10t=0\end{cases}$$

Exercice 1.6 (★)

1. Résoudre le système $\quad(\mathscr{S}_0):\begin{cases}x+y+z=0\\2x+y+2z=0\\x+2y+z=0\end{cases}$

2. On considère le système $\quad(\mathscr{S}):\begin{cases}x+y+z=3\\2x+y+2z=5\\x+2y+z=4\end{cases}$

   Vérifier que $(1,1,1)$ est solution de $(\mathscr{S})$ et en déduire toutes les solutions de $(\mathscr{S})$.

Exercice 1.7 (★)

Calculer le rang et l'inverse s'il existe des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\ ;\ C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\1&3&2\end{pmatrix}\ ;\ D=\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&-1&1\\2&-2&1\end{pmatrix}\ ;\ E=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 1.8 (★★)

Déterminer le rang des matrices suivantes, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel α :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1+\alpha\\1&1&-\alpha^2\end{pmatrix}.\qquad B=\begin{pmatrix}\alpha&1&1\\1&\alpha&1\\1&1&\alpha\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&2&\alpha&2\\2&\alpha&2&3\end{pmatrix}$$

Exercice 1.9 (★★★ - Matrices à diagonale strictement dominante - ✍)

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i\in[\![1,n]\!],\ |a_{i,i}|>\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$.

Soit $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX=0$, et soit $i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}|=\max_{i\in[\![1,n]\!]}|x_i|$.

Montrer que $x_{i_0}=0$, et en déduire que A est inversible.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$, et soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$.
Montrons que $x_{i_0} = 0$. Puisque $AX = 0$, alors en considérant la i_0-ème ligne, on obtient :

$$a_{i_0,1}x_1 + \cdots + a_{i_0,i_0}x_{i_0} + \cdots + a_{i_0,n}x_n = 0.$$

Ce qui se réécrit :

$$a_{i_0,i_0}x_{i_0} = -\sum_{i \neq i_0} a_{i_0,i}x_i.$$

Prenons la valeur absolue de cette expression, et majorons par l'inégalité triangulaire :

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| = \left| -\sum_{i \neq i_0} a_{i_0,i}x_i \right| \leq \sum_{i \neq i_0} |a_{i_0,i}||x_i| \leq \sum_{i \neq i_0} |a_{i_0,i}||x_{i_0}|$$

Supposons $X \neq 0_{n,1}$, alors $x_{i_0} \neq 0$ et on aurait en divisant par x_{i_0} l'expression précédente :

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{i \neq i_0} |a_{i_0,i}|$$

Ce qui contredirait que A est à diagonale strictement dominante.
On a donc montré que si $AX = 0$, alors $X = 0$. Or c'est l'une des caractérisations de A inversible. Ainsi une matrice à diagonale strictement dominante est toujours inversible.

Trace d'une matrice carrée

Exercice 1.10 (★)

Montrer qu'il n'existe pas deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A \times B - B \times A = I_n$.

Exercice 1.11 (★★★ - ✍)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}({}^tAA) = 0$ si et seulement si $A = 0_n$.

On a :

$$Tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} [{}^tAA]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [{}^tA]_{i,j}[A]_{j,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{j,i}[A]_{j,i}.$$

Ainsi $Tr({}^tAA) = 0$ équivaut à $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{j,i}^2 = 0$. Comme c'est une somme de termes positifs, elle est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, c'est à dire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad [A]_{j,i} = 0,$$

soit encore $A = 0$. D'où le résultat.

À retenir pour plus tard.
Ce calcul réapparaitra un peu plus tard lorsqu'on définira sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

Matrices semblables

Exercice 1.12 (★ - Matrices semblables - ✍)

1. Montrer les propriétés suivantes pour des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:
   - *Réflexivité :* A est semblable à A
   - *Symétrie :* $[A$ est semblable à $B] \Leftrightarrow [B$ est semblable à $A]$
   - *Transitivité :* $[A$ est semblable à $B]$ et $[B$ est semblable à $C] \Rightarrow [A$ est semblable à $C]$

   On dit que « être semblable à » est une *relation d'équivalence*.
2. Montrer que si A et B sont inversibles et semblables, alors A^{-1} et B^{-1} sont aussi semblables.

Polynômes d'une matrice

Exercice 1.13 (★)

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ avec :

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$;
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.14 (★)

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P = X^2 - 3X + 2$ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} comme un polynôme en A.

Exercice 1.15 (★★)

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. **Première méthode : calcul des puissances de A à l'aide d'un polynôme annulateur.**
   (a) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de A.
   (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$.
   (c) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par α_p et β_p. En déduire α_p et β_p en fonction de p.
   (d) En déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. **Deuxième méthode : calcul des puissances de A par la formule du binôme.**
   (a) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer J^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.16 (★★)

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de B.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
$$X^n = PQ_n + a_n X^2 + b_n X + c_n.$$
3. Déterminer a_n, b_n, c_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de B^n en fonction de n.

Exercice 1.17 (★)
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ ainsi que D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Mêmes questions avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.18 (★★★ - Polynôme annulateur d'une matrice diagonale - ✍)
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ $(r \leqslant n)$ des réels distincts deux à deux et $(m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que :
$$m_1 + \cdots + m_r = n$$
On pose $D = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ termes}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_2 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{m_r \text{ termes}}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que :
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \ P(D) = \mathrm{diag}(\underbrace{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_1)}_{m_1 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{P(\lambda_r), \dots, P(\lambda_r)}_{m_r \text{ termes}})$$
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que P soit un polynôme annulateur de D.
3. On suppose que A est semblable à D. Déterminer un polynôme annulateur de A.
4. À l'aide de l'exercice précédent, déterminer un polynôme annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 1.19 (★★★★ - QSP ESCP 2016)
Soit N une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ nilpotente, i.e. telle qu'il existe $p \geq 1$ tel que $N^p = 0$.

1. Montrer que la matrice $A = I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que $I_n - A^{-1}$ est nilpotente.

> 1. On va se servir de l'identité suivante, valable seulement si A et B commutent :
> $$\forall p \geq 1, \quad A^p - B^p = (A - B)\left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{p-1-k}\right) = (A - B)\left(\sum_{k=0}^{n-1} A^{p-1-k} B^k\right).$$
> On sait ici que $N^p = 0_n$. D'où :
> $$I_n = I_n^p - N^p = (I_n - N)\left(\sum_{k=0}^{p-1} N^k I_n^{p-1-k}\right) = (I_n - N)(I_n + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}).$$
> Ainsi $A = I_n - N$ est bien inversible, d'inverse $A^{-1} = I_n + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}$.

2. Si $p = 1$, alors $N = 0$ et $I_n - A^{-1} = 0_n$ est bien nilpotente. Si $p \geq 2$, on a :
$$I_n - A^{-1} = -N - N^2 - \cdots - N^{p-1} = N(-I_n - N - \cdots - N^{p-2}).$$
Posons $M = -I_n - N - \cdots - N^{p-2}$. M est un polynôme en N, donc commute avec N, de sorte que :
$$(I_n - A^{-1})^p = (N \times M)^p = \underbrace{(N \times M) \times \cdots \times (N \times M)}_{p\text{fois}} \underset{M \text{ et } N \text{ commutent}}{=} N^p M^p = 0_n.$$
Ainsi $I_n - A^{-1}$ est bien nilpotente.