

Calcul matriciel

Opérations matricielles

Exercice 1.1 (★★ - Matrices stochastiques -)

Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j}$ est un réel positif ou nul, et si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. On note $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Donner des exemples de matrices stochastiques.
2. Soit $\lambda \in [0, 1]$. Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$, alors $\lambda \cdot A + (1 - \lambda) \cdot B$ est dans $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ également.

Un ensemble satisfaisant une telle propriété est dit convexe.

3. (a) Notons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que : $A \in \mathcal{ST}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i, j, a_{i,j} \geq 0 \\ AX = X \end{cases}$.

(b) En déduire que si A et B sont stochastiques, alors $A \times B$ est stochastique.

4. (★) Déterminer les matrices A de $\mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$ qui sont inversibles et telles que $A^{-1} \in \mathcal{ST}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.2 (★★ - Produit de matrices élémentaires -)

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit pour tout $1 \leq i, j \leq n$ la matrice $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ où l'unique coefficient

non nul égal à 1 est en position (i, j) . Les $n \times p$ matrices $E_{i,j}$ sont appelées *matrices élémentaires*.

Montrer la formule suivante :

$$E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} \cdot E_{i,l}$$

où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker : $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$, 0 si $j \neq k$.

Exercice 1.3 (★★★ - Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ -)

On considère l'ensemble suivant (appelé le *centre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) :

$$\mathcal{Z}_n = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \times M = M \times A\}.$$

1. Proposer deux matrices appartenant à \mathcal{Z}_n .
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ appartient-elle à \mathcal{Z}_2 ?
3. On souhaite déterminer l'ensemble \mathcal{Z}_n . Considérons pour cela une matrice M appartenant à \mathcal{Z}_n .
 - (i) Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, calculer $E_{i,j} \times M$ et $M \times E_{i,j}$.
 - (ii) En déduire que M est une matrice scalaire, c'est à dire de la forme $\lambda \cdot I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - (iii) Conclure.

Exercice 1.4 (★★★ - Matrices triangulaires supérieures strictes - 📌)

Le but de cet exercice est de montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente d'ordre $\leq n$.

1. Soit $k \geq 0$ et notons $\mathcal{T}_k^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de matrices $A = (a_{i,j})$ telles que :

$$a_{i,j} = 0 \text{ si } i + k > j.$$

- (i) Identifier $\mathcal{T}_0^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}_1^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$
 - (ii) Soient $k, l \geq 1$. Montrer que si $A \in \mathcal{T}_k^+(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{T}_l^+(\mathbb{R})$, alors $A \times B \in \mathcal{T}_{k+l}^+(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente, d'ordre de nilpotence $\leq n$.
 3. La réciproque est-elle vraie, c'est-à-dire une matrice nilpotente est-elle nécessairement triangulaire supérieure stricte ?

Méthode du pivot, rang et inverse

Exercice 1.5 (★)

Résoudre dans \mathbb{R} les systèmes linéaires homogènes suivants :

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \left| \quad (\mathcal{S}_2) : \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 11y - z = 0 \end{cases} \quad \left| \quad (\mathcal{S}_3) : \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 0 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 0 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.6 (★)

1. Résoudre le système $(\mathcal{S}_0) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

2. On considère le système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + 2z = 5 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$

Vérifier que $(1, 1, 1)$ est solution de (\mathcal{S}) et en déduire toutes les solutions de (\mathcal{S}) .

Exercice 1.7 (★)

Calculer le rang et l'inverse s'il existe des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.8 (★★)

Déterminer le rang des matrices suivantes, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel α :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 + \alpha \\ 1 & 1 & -\alpha^2 \end{pmatrix} \quad \left| \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \left| \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha & 2 \\ 2 & \alpha & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.9 (★★★ - Matrices à diagonale strictement dominante - 📌)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$, et soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i|$.

Montrer que $x_{i_0} = 0$, et en déduire que A est inversible.

Trace d'une matrice carrée

Exercice 1.10 (★)

Montrer qu'il n'existe pas deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \times B - B \times A = I_n$.

Exercice 1.11 (★★★★ - 📖)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr}({}^tAA) = 0$ si et seulement si $A = 0_n$.

Matrices semblables

Exercice 1.12 (★ - Matrices semblables - 📖)

1. Montrer les propriétés suivantes pour des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- *Réflexivité* : A est semblable à A
- *Symétrie* : $[A \text{ est semblable à } B] \Leftrightarrow [B \text{ est semblable à } A]$
- *Transitivité* : $[A \text{ est semblable à } B] \text{ et } [B \text{ est semblable à } C] \Rightarrow [A \text{ est semblable à } C]$

On dit que « être semblable à » est une *relation d'équivalence*.

2. Montrer que si A et B sont inversibles et semblables, alors A^{-1} et B^{-1} sont aussi semblables.

Polynômes d'une matrice

Exercice 1.13 (★)

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ avec :

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;
 - $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$;
 - $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
-

Exercice 1.14 (★)

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P : x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est un polynôme annulateur de A .
 2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} comme un polynôme en A .
-

Exercice 1.15 (★★)

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. **Première méthode : calcul des puissances de A à l'aide d'un polynôme annulateur.**
 - (a) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de A .
 - (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que $A^p = \alpha_p A + \beta_p I_3$.
 - (c) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par α_p et β_p . En déduire α_p et β_p en fonction de p .
 - (d) En déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. **Deuxième méthode : calcul des puissances de A par la formule du binôme.**

- (a) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer J^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.16 (★★)

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P : x \mapsto x^3 - 2x^2 + x$ est un polynôme annulateur de B .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[x]$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = P(x)Q_n(x) + a_n x^2 + b_n x + c_n.$$

3. Déterminer a_n, b_n, c_n en fonction de n .
4. En déduire l'expression de B^n en fonction de n .

Exercice 1.17 (★)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ ainsi que D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Mêmes questions avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.18 (★★★★ - Polynôme annulateur d'une matrice diagonale - )

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ ($r \leq n$) des réels distincts deux à deux et $(m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que :

$$m_1 + \dots + m_r = n$$

On pose $D = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ termes}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_2 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{m_r \text{ termes}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que :

$$\forall P \in \mathbb{R}[x], \quad P(D) = \text{diag}(\underbrace{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_1)}_{m_1 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{P(\lambda_r), \dots, P(\lambda_r)}_{m_r \text{ termes}})$$

2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que P soit un polynôme annulateur de D .
3. On suppose que A est semblable à D . Déterminer un polynôme annulateur de A .

4. À l'aide de l'exercice précédent, déterminer un polynôme annulateur de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Exercice 1.19 (★★★★ - QSP ESCP 2016)

Soit N une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) nilpotente, i.e. telle qu'il existe $p \geq 1$ tel que $N^p = 0$.

1. Montrer que la matrice $A = I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que $I_n - A^{-1}$ est nilpotente.