TD10

Variables aléatoires à densité

Loi d'une variable aléatoire à densité

Exercice 10.1 (★)

On suppose que X est une variable aléatoire suivant la loi $\gamma(3)$. Déterminer sa fonction de répartition.

Exercice 10.2 (★★ - D'après Ecricome 2015)

1. Déterminer un réel a tel que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{a}{x \ln^2(x)} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ soit une densité.

   Dans toute la suite, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.

3. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

4. Calculer les probabilités $P(0 \leq X \leq 4)$ et $P(X \geq 5/2)$.

Exercice 10.3 (★★)

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suit une loi normale centrée réduite. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace, indépendante de X et telle que $P(Y = 1) = p$ et $P(Y = -1) = 1 - p$. Montrer que $Z = XY$ a la même loi que X.

Exercice 10.4 (★★★ - QSP ESCP 2006)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$, de densité f. On définit une fonction G sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq xt) f(t) \, \mathrm{d}t.$$

1. Déterminer la fonction G.

2. Montrer que G est la fonction de répartition d'une variable à densité Y, et donner une densité g de Y.

Exercice 10.5 (★★★★ - QSP HEC 2008)

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Montrer que la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = F(x+1) - F(x)$$

est une densité de probabilité.

Lois à densité usuelles

Exercice 10.6 (★★ - ✍)

Calculer les espérances et variances de toutes les lois à densité usuelles.
On pourra pour la loi normale commencer par une variable suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$, puis passer au cas général à l'aide d'une transformation affine.

Exercice 10.7 (★★ - Utilisation de la table de la loi normale)

1. On suppose que X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   À l'aide de la table de valeurs de Φ, déterminer une valeur approchée des probabilités suivantes :
$$P(X \leq 0,23)\ ,\ P(X \geq 0,82)\ ,\ P(-3 \leq X \leq 1)\ ,\ P(X^2 > 0,82^2).$$
2. Reprendre la question précédente en supposant cette fois que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(-1,4)$.
3. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer $x \in \mathbb{R}$ pour que :
$$P(X \leq x) = 0,95\ ;\ P(X \geq x) = 0,10\ ;\ P(|X| \leq x) = 0,90\ ;\ P(5+3X > x) = 0,01.$$
4. On suppose maintenant que X suit une loi normale.
   Déterminer l'espérance et la variance de X sachant $P(X < -1) = 0,05$ et $P(X > 3) = 0,12$.

Exercice 10.8 (★★ - Calcul d'intégrales gaussiennes à l'aide de lois normales)

En utilisant des lois normales bien choisies, calculer les valeurs des intégrales suivantes :
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2-8t)}\,\mathrm{d}t, \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-4t-8}\,\mathrm{d}t, \quad K = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2-4t-8}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 10.9 (★★★ - Caractérisation de la loi exponentielle par l'absence de mémoire - ✍)

On dit qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est *sans mémoire* si elle vérifie, pour tous $s,t > 0$:
$$P(T > t+s) = P(T > t)P(T > s).$$

1. Vérifier qu'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est une variable aléatoire sans mémoire.
2. Réciproquement, soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ sans mémoire et vérifiant $P(T > 0) > 0$.
   (a) On suppose qu'il existe $t > 0$ tel que $P(T > t) = 0$. Calculer $P(T > \frac{t}{2^n})$ en fonction de $P(T > t)$. En déduire que $P(T > 0) = 0$. Conclusion ?
   (b) Soit $\alpha = P(T > 1)$. On souhaite démontrer que $P(T > t) = \alpha^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
      i. Démontrer ce résultat si $t \in \mathbb{N}^*$.
      ii. On suppose $t \in \mathbb{Q}_+^*$ et on note $t = \frac{p}{q}$. Démontrer que :
$$P(T > p) = (P(T > p/q))^q.$$
      En déduire que le résultat est vrai pour $t \in \mathbb{Q}_+^*$.
      iii. En utilisant la décroissance de $x \mapsto P(T > x)$, démontrer que le résultat est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.
   (c) Conclure.
3. Justifier le terme « sans mémoire ». On pourra calculer $P_{[T>s]}(T > s+t)$.

Fonction d'une variable aléatoire à densité

Exercice 10.10 (★★)

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X.
2. Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.
3. Montrer que X n'admet pas d'espérance. X admet-elle une variance ?
4. (a) On pose $Y = -3X + 2$. Justifier que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y. Y admet-elle une espérance ?

   (b) On pose $Z = 1 + \sqrt{X}$. Montrer que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z. Montrer que Z admet une espérance et la déterminer. Z admet-elle une variance ?

Exercice 10.11 (★★)

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

1. Soit $\lambda > 0$. On pose $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$. Déterminer la loi de X.
2. Soient n et m deux entiers tels que $n \leq m$. On pose $Y = n + \lfloor (m - n + 1)U \rfloor$. Montrer que $Y \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket n, m \rrbracket)$.
3. On rappelle que la fonction `rd.random()` (de la bibliothèque `Python` `numpy.random`) renvoie une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{U}([0, 1])$. Écrire des fonctions `exponentielle(lambda)` et `uniforme(n,m)` simulant respectivement une loi $\mathscr{E}(\lambda)$ et une loi $\mathscr{U}(\llbracket n, m \rrbracket)$ à partir de la fonction `rand()`.

Exercice 10.12 (★★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

1. On pose $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. Montrer que Y suit une loi usuelle que l'on précisera.
2. On pose $Z = \frac{1}{X}$. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

Exercice 10.13 (★★)

Pour tout réel t, on pose $f(t) = e^{-2|t|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f, et $Y = X^2$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité.

Exercice 10.14 (★★★★ - QSP HEC 2013)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]-1, 1[$.

1. Trouver toutes les fonctions ϕ définies, continues et strictement monotones sur $]-1, 1[$ telles que la variable aléatoire $Y = \phi(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.
2. En déduire une fonction paire ψ définie sur $]-1, 1[$, telle que la variable aléatoire $\psi(X)$ suive aussi la loi exponentielle de paramètre 1.

Moments d'une variable à densité

Exercice 10.15 (★)

1. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}(]0,1[)$. Justifier l'existence de $E(\ln(X))$ et la calculer.

2. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$. On note Φ la fonction de répartition de X. Justifier l'existence de $E(\Phi(X))$ et la calculer.

Exercice 10.16 (★)

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que X admet des moments de tout ordre et les calculer.

Exercice 10.17 (★★)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi γ de paramètre ν.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X admet un moment d'ordre n, et calculer ce moment.

2. On pose $Y = e^X$. Montrer que Y est une variable à densité, et donner une de ses densités.

3. Montrer que Y n'admet pas d'espérance.

Exercice 10.18 (★★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la loi de $-X$ puis de $\pi(X+1)$.

2. On pose $Y = \frac{X^2}{2}$.

   (a) Montrer que Y admet une espérance et une variance et les déterminer.

   (b) Montrer que Y suit une loi usuelle que l'on précisera. Retrouver alors son espérance et sa variance.

Exercice 10.19 (★★ - Loi de Pareto et loi exponentielle)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(a)$, $a > 0$. On pose alors $Y = e^X$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y. En déduire que Y est une variable à densité et en donner une densité.

2. À quelle condition sur a la variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Calculer alors $E(Y)$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Y admette une variance, et lorsque cette condition est vérifiée, calculer $V(Y)$.
