TD11

Produit scalaire et espaces euclidiens

Produit scalaire et norme euclidienne

Exercice 11.1 (★)

On considère le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ et on pose pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$:

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

1. Montrer que pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle x, x\rangle = 2(x_1 + \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3}{2}x_2^2$.
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que les vecteurs $(1, 0)$ et $(1, -2)$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire et calculer leur norme. Les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 11.2 (★ - EML 2007)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'on définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$ en posant

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1 - t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 11.3 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Étudier le cas d'égalité.

Commençons par un rappel.

Rappel. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors :

$$\forall\, x, y \in E, \quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \,.\, \|y\|\,.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne dans $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique :

$$\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

En essayant de coller avec la formule à obtenir, on devrait finir par appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $x = (\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n})$ et $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$ pour obtenir :

$$n = \left|\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i}\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \sqrt{1}\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} =$$

D'où en élevant au carré :

$$n^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

Il y a de plus égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires. Comme $x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha x$, ce qui donne :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \frac{1}{\sqrt{x_i}} = \alpha \sqrt{x_i} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \alpha x_i.$$

Comme de plus $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, il suit que :

$$n = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i = \alpha$$

et donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i = \frac{1}{n}.$$

Ainsi, il y a l'égalité si, et seulement si, $x_1 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$.

Exercice 11.4 (★)

On considère l'espace $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et on pose :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Établir que $\forall f \in E, \quad \left(f(1) + \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t \right)^2 \leq 2 \left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t \right).$

1. Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E :
   - **Linéarité à gauche.** Soient $f_1, f_2, g \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(1)g(1) + \int_0^1 (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda_1 f_1(1)g(1) + \lambda_2 f_2(1)g(1) + \int_0^1 (\lambda_1 f_1'(t) + \lambda_2 f_2'(t))g'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(lin. de la dérivatio} \\
&= \lambda_1 f_1(1)g(1) + \lambda_2 f_2(1)g(1) + \lambda_1 \int_0^1 f_1'(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_0^1 f_2'(t))g'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(lin. de l'i} \\
&= \lambda_1 \left(f_1(1)g(1) + \int_0^1 f_1'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \right) + \lambda_2 \left(f_2(1)g(1) + \int_0^1 f_2'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle
\end{aligned}$$

     D'où la linéarité à gauche.
   - **Symétrie.** Pour tout $f, g \in E$:

$$\begin{aligned}
\langle g, f \rangle &= g(1)f(1) + \int_0^1 g'(t)f'(t)dt \\
&= f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt = \langle f, g \rangle.
\end{aligned}$$

     D'où la symétrie, et donc également la linéarité à droite.

- **Positif.** Pour tout $f \in E$:

$$\langle f, f\rangle = f(1)^2 + \int_0^1 \underbrace{f'(t)^2}_{\geq 0}\,\mathrm{d}t \geq 0$$

par positivité de l'intégrale.

- **Défini positif.** Soit $f \in E$. Alors :

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle = 0 &\Rightarrow \underbrace{f(1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}_{\geq 0} = 0\\ &\Rightarrow f(1)^2 = 0 \text{ et } \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

Or c'est l'intégrale d'une fonction continue et positive. Elle est nulle si, et seulement si, $f'(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi, f est constante sur $[0,1]$ égale à $f(1) = 0$, de sorte que $f = 0_E$.

2. On reconnait ici la norme $\|f\|^2$ à droite de l'inégalité. Cela devrait nous faire penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Rappelons là.

> **Rappel. Inégalité de Cauchy-Schwarz.**
> Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Alors :
>
> $$\forall\, x, y \in E, \quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \,.\, \|y\| \,.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (élevée au carré) donne ici que pour tout $f, g \in E$:

$$\left(f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt\right)^2 \leq \left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right) \times \left(g(1)^2 + \int_0^1 g'(t)^2\,\mathrm{d}t\right).$$

On doit donc identifier $g \in E$ tel que pour tout $f \in E$, on ait :

$$f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt = \langle f, g\rangle = f(1) + \int_0^1 f'(t)dt.$$

Remarquons que la fonction $g : x \in [0,1] \mapsto x$ convient. Calculons sa norme :

$$\|g\|^2 = g(1)^2 + \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1 + 1 = 2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée à f pris dans E et à $g : x \in [0,1] \mapsto x$ donne le résultat souhaité :

$$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leq 2\left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 11.5 (★★ - Produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ - ✍)
On considère l'espace $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose : $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

1. Montrer que pour tout $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$: $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{i,j}$

2. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

3. Déterminer la norme du vecteur $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

4. Établir que pour tout $A \in E$: $\displaystyle \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$.

5. Montrer que les sous-espaces $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques réelles sont orthogonaux.

Exercice 11.6 (★)

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Montrer l'égalité suivante (appelée *identité du parallélogramme*) :
$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$
Interpréter géométriquement ce résultat.

2. En déduire l'égalité suivante (appelée *égalité de la médiane*) :
$$\forall x, y \in E, \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x-y\|^2}.$$
Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 11.7 (★★★ - QSP HEC 2007)

Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :
$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \langle x, y \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle f(x), f(y) \rangle = 0.$$
Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\,\|x\|$.

Indication. On pourra utiliser, après l'avoir justifié, que si x et y sont deux vecteurs de même norme, alors $(x-y)$ et $(x+y)$ sont orthogonaux.

> Suivons l'indication. Prenons pour cela x et y deux vecteurs de même norme, et calculons :
> $$\langle x-y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0.$$
> Ainsi $(x-y)$ et $(x+y)$ sont bien des vecteurs orthogonaux.
> Soit alors $x \in E$ unitaire, et notons $k = \|f(x)\|$. Montrons que pour tout $y \in E$ unitaire, $\|f(y)\| = k$. D'après la remarque précédente, $x-y$ et $x+y$ sont orthogonaux. D'où par hypothèse :
> $$\langle f(x-y), f(x+y) \rangle = 0.$$
> En utilisant que f est linéaire, et par bilinéarité du produit scalaire :
> $$0 = \langle f(x) - f(y), f(x) + f(y) \rangle = \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2.$$
> Ainsi, $\|f(y)\|^2 = \|f(x)\|^2 = k^2$, et donc $\|f(y)\| = k$.
> Soit enfin $y \in E$ quelconque. Si $y = 0_E$, alors $f(y) = 0_E$ et donc $\|f(y)\| = 0 = k\,\|y\|$. Si $y \neq 0_E$, alors $z = \dfrac{y}{\|y\|}$ est un vecteur unitaire. Par ce qu'on a fait, il suit que $\|f(z)\| = k$. Or, par

linéarité de f toujours :

$$k = \|f(z)\| = \left\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| = \left\|\frac{1}{\|y\|} f(y)\right\| = \frac{1}{\|y\|}\|f(y)\|.$$

On obtient donc $\|f(y)\| = k\|y\|$.

D'où l'existence d'un réel $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Exercice 11.8 (★★★★ - Famille obtusangle - QSP ESCP 2010)

Soit E un espace euclidien de dimension n et soient $e_1, \ldots, e_{n+1}$ des vecteurs tels que pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $i \neq j$, $\langle e_i, e_j\rangle < 0$.

1. En utilisant la norme de $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, montrer que si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$, alors $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0_E$.
2. Montrer que n quelconques de ces vecteurs forment une base de E.

1. Supposons que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$. Alors $0 = \|u\|^2 = \langle u, u\rangle$, d'où par bilinéarité :

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_i\lambda_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} \lambda_i\lambda_j\langle e_i, e_j\rangle + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|e_i\|^2,$$

ce qui ce récrit encore :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\|e_i\|^2 = -\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} \lambda_i\lambda_j\langle e_i, e_j\rangle.$$

Posons $v = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i$ et calculons (en utilisant la bilinéarité également) :

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} |\lambda_i||\lambda_j|\langle e_i, e_j\rangle + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\|e_i\|^2\\ &= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} |\lambda_i||\lambda_j|\langle e_i, e_j\rangle - \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} \lambda_i\lambda_j\langle e_i, e_j\rangle\\ &= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n\\ i\neq j}} \underbrace{(|\lambda_i||\lambda_j| - \lambda_i\lambda_j)}_{\geq 0}\underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{<0} \leq 0.\end{aligned}$$

Et puisque $\|v\|^2 \geq 0$, il suit que $\|v\|^2 = 0$, et donc que $v = 0_E$.

2. Faisons le pour les n premiers vecteurs de cette famille (on procèderait de même pour n vecteurs quelconques). La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ étant de cardinal $n = \dim(E)$, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient pour cela $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E.$$

Montrons que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Par la première question, il suit que $v = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0_E$. Effectuons le produit scalaire de

v avec e_{n+1} :

$$0 = \langle v, e_{n+1} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|\lambda_i|}_{\geq 0} \underbrace{\langle e_i, e_{n+1} \rangle}_{<0}$$

par linéarité à gauche. Or, une somme de réels négatifs est nulle si, et seulement si, tous ces réels sont eux-mêmes nuls, d'où pour tout $\forall i \in [\![1, n]\!]$:

$$|\lambda_i| \langle e_i, e_{n+1} \rangle = 0 \underset{\langle e_i, e_{n+1} \rangle \neq 0}{\Rightarrow} |\lambda_i| = 0.$$

Ainsi, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre. C'est donc une base de E.

Bases orthonormées

Exercice 11.9 ($\bigstar$)

Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. On pose $v_1 = (3, 4, 0, 0), v_2 = (-4, 3, 0, 0), v_3 = (0, 0, 5, 12), v_4 = (0, 0, -12, 5)$. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle orthogonale ? En déduire une base orthonormée $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer $P_{\mathscr{C}, \mathscr{B}}$.

Exercice 11.10 ($\bigstar$)

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On considère le sous-espace $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y = -z\}$. On note $e_1 = \dfrac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$, $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$ et $e_3 = \dfrac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$.

1. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E.

2. Justifier que $u = (2, 3, -3, 7) \in E$ et déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

Exercice 11.11 ($\bigstar\bigstar$ - ✍)

On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle M, N \rangle = \mathrm{Tr}({}^t MN)$. Soit $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de E.

1. Montrer que pour tout $1 \leq i, j, k, l \leq n$, $E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.

2. Montrer que $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base orthonormale de E.

1. Cette formule a été établie au TD1.

2. Pour tout $1 \leq i, j, k, l \leq n$:

$$\begin{aligned} \langle E_{i,j}, E_{k,l} \rangle &= \mathrm{Tr}({}^t E_{i,j} E_{k,l}) = \mathrm{Tr}(E_{j,i} E_{k,l}) \\ &= \mathrm{Tr}(\delta_{i,k} E_{j,l}) = \delta_{i,k} \mathrm{Tr}(E_{j,l}) \\ &= \delta_{i,k} \delta_{j,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ainsi, $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une famille orthonormale et une base de E. C'est donc une base orthonormée de E.

Exercice 11.12 (★★ - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)
Dans chacun des cas suivants, donner une base orthonormée du sous espace vectoriel F de E, muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

1. $E=\mathbb{R}^3$, $F=\text{Vect}((1,0,-2),(1,1,1))$, produit scalaire canonique ;
2. $E=F=\mathbb{R}_2[x]$, $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$;
3. $E=\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), F=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}\right)$, $\langle M,N\rangle=\text{Tr}({}^tMN)$;
4. $E=\mathbb{R}^4$, $F=\text{Vect}((1,0,1,0),(1,1,0,1),(2,0,1,1))$, produit scalaire canonique ;
5. $E=\mathbb{R}[x]$, $F=\text{Vect}(x^2+1,x^3+1)$, $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

Solutions.
1. $\left(\frac{1}{\sqrt5}(1,0,-2),\frac{1}{\sqrt{70}}(6,5,3)\right)$ 2. $\left(\frac12,\sqrt{\frac32}x,\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac13\right)\right)$ 3. $\left(\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$
4. $\left(\frac{1}{\sqrt2}(1,0,1,0),\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-1,2),\frac{1}{\sqrt{15}}(1,-3,-1,2)\right)$ 5. $\left(\sqrt{\frac{15}{28}}(x^2+1),\frac{\sqrt7}{2}(16x^3-15x^2+1)\right)$

Exercice 11.13 (★★★ - Oral HEC 2021)
On considère une famille de vecteurs unitaires $(e_1,\dots,e_p)$ de E espace euclidien de dimension n, vérifiant la relation suivante :

$$\forall v\in E,\quad ||v||^2=\sum_{k=1}^{p}\langle e_k,v\rangle^2.$$

Montrer que la famille $(e_1,\dots,e_p)$ est orthonormale, puis que c'est une base orthonormale de E. En déduire que $n=p$.

Montrons que $(e_1,\dots,e_p)$ est orthonormale. Prenons pour cela $v=e_i$ pour $1\le i\le n$:

$$\|e_i\|^2=\sum_{k=1}^{p}\langle e_k,e_i\rangle^2=\|e_i\|^2+\sum_{k\neq i}\langle e_k,e_i\rangle^2$$

D'où :

$$0=\sum_{k\neq i}\underbrace{\langle e_k,e_i\rangle^2}_{\geq 0}.$$

Ainsi on obtient que pour tout $k\neq i$, $\langle e_k,e_i\rangle=0$. Comme les vecteurs sont de plus unitaires par hypothèse, on en déduit que la famille $(e_1,\dots,e_p)$ est orthonormée.

Supposons à présent que $p<n$. La famille $(e_1,\dots,e_p)$ n'est donc pas une base. Puisque c'est une famille orthonormée, on peut la compléter en une base orthonormée $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$. Mais alors en prenant $v=e_n$:

$$1=\|e_n\|^2=\sum_{k=1}^{p}\underbrace{\langle e_k,e_n\rangle^2}_{=0 \text{ car } k\neq n}=0.$$

D'où une contradiction. Donc $p=n$ et la famille $(e_1,\dots,e_p)$ est bien une base orthonormée.

Exercice 11.14 (★★★★ - Endomorphismes orthogonaux - Oral ESCP 2013 - ✍)
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On dit qu'un endomorphisme f de E est *orthogonal* si sa matrice dans une base orthonormale est une matrice orthogonale.

1. Montrer que f est orthogonale si, et seulement si : $\forall x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
2. Soit f un endomorphisme de E.
   (a) Montrer que si f est orthogonale, alors pour tout $x \in E$: $\|f(x)\| = \|x\|$.
   (b) Montrer réciproquement que, si pour tout x de E, on a $\|f(x)\| = \|x\|$, alors f est orthogonal.

1. On procède par double implication.

   $\Rightarrow$ Supposons que f est un endomorphisme orthogonal. Il existe donc une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que $A = M_{\mathscr{B}}(f)$ est orthogonale. Pour tout $x, y \in E$, notons $X = M_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = M_{\mathscr{B}}(y)$. Par les formules donnant le produit scalaire **dans une base orthonormée** :
   $$\langle f(x), f(y)\rangle = {}^t(MX)(MY) = {}^tX\,{}^tMMY = {}^tXY = \langle x, y\rangle.$$

   $\Leftarrow$ Supposons que pour tout $x, y \in E$:
   $$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$
   Montrons que f est orthogonale. Fixons pour cela une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, et notons $M_{\mathscr{B}}(f) = A = (a_{i,j})$. On souhaite montrer que A est orthogonale. Par définition d'une matrice d'un endomorphisme dans une base donnée, on a :
   $$\forall j = 1, \dots, n, \quad f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} e_k.$$
   On obtient :
   $$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} e_k, \sum_{l=1}^{n} a_{l,j} e_l\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{k,i} a_{l,j} \langle e_k, e_l\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j}.$$
   Mais nous reconnaissons là le coefficient situé à la i-ème ligne et j-ème colonne de ${}^tMM$.
   D'autre part, on a $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$, et donc :
   $$[\,{}^tMM]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   On obtient ${}^tMM = I_n$, et donc que f est orthogonale.

   Autre méthode. Toujours en notant $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, on a :
   $$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}.$$

La famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est donc orthonormée. Elle est en particulier libre, de cardinal $n = \dim(E)$. C'est donc une base orthonormée de E. Notons là $\mathscr{B}'$. On sait alors que $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est orthogonale en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormées. Or :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} = M_{\mathscr{B}}(f)$$

Et donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est orthogonale : f est un endomorphisme orthogonal.

2. (a) Supposons f orthogonale. D'après la question précédente, f conserve le produit scalaire, donc pour tout $x \in E$:

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|.$$

Donc f conserve la norme.

(b) Supposons que f conserve la norme. On souhaite montrer que f conserve le produit scalaire. On va se servir de l'identité suivante :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

qui permet de calculer un produit scalaire à l'aide de la norme. On en déduit que pour tout $x, y \in E$:

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \quad \text{car } f \text{ conserve la norme} \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Donc f conserve le produit scalaire.

Polynômes orthogonaux

Exercice 11.15 (★★)

Soit n un entier naturel et a un réel. On note E l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels, de dégré inférieur ou égal à n et φ l'application définie, pour tout couple (P, Q) de vecteurs de E, par :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire. On notera désormais $\varphi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$.
2. Pour tout entier naturel i, on note $P_i = (x-a)^i$.
   (a) Calculer $P_i^{(k)}(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale de E.
   (c) Pour tout entier i de $\{0, \dots, n\}$, calculer $\|P_i\|$. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E.

3. Exprimer les coordonnées d'un polynôme P de E, dans cette base $\mathscr{B}$, à l'aide des dérivées successives de P en a. Retrouver ainsi la formule de Taylor pour les polynômes.

1. On montre facilement que φ est bilinéaire symétrique et positive. Montrons que φ est définie positive. Soit pour cela $P \in E$ tel que :

$$0 = \langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} (P^{(k)}(a))^2.$$

Puisque tous les termes de cette somme sont positifs, on en déduit que :

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(n)}(a) = 0.$$

Ainsi a est racine d'ordre de multiplicité au moins $n+1$ de P. Or $\deg(P) \leq n$, donc ce n'est possible que si $P = 0_E$.

Ainsi φ est bien un produit scalaire.

2. (a) Notons tout d'abord que P_i est un polynôme de degré i. Plusieurs cas sont possibles :
   - si $k > i$, alors $P_i^{(k)} = 0$ et donc $P_i^{(k)}(a) = 0$.
   - si $0 \leq k < i$, alors :

   $$P_i^{(k)} = i(i-1)\dots(i-k+1)(X-a)^{i-k} = \frac{i!}{(i-k)!}(X-a)^{i-k}.$$

   Mais comme $i - k > 0$, a est bien racine de $P_i^{(k)}$ et donc $P_i^{(k)}(a) = 0$.
   - si $k = i$, alors en reprenant le calcul précédent :

   $$P_i^{(i)} = \frac{i!}{(i-i)!}(X-a)^{i-i} = i!.$$

   Dans ce cas, $P_i^{(i)}(a) = i!$.

   Ainsi on a montré que $P_i^{k}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ i! & \text{si } i = k. \end{cases}$

   (b) Pour tout $i \neq j$, pour tout $0 \leq k \leq n$:

   $$P_i^{(k}(a)P_j^{(k)}(a) \begin{cases} 0 \times 0 & \text{si } k \neq i, j, \\ i! \times 0 & \text{si } k = i, \\ 0 \times j! & \text{si } k = j. \end{cases} = 0.$$

   Donc $\langle P_i, P_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, et la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est orthogonale.

   (c) Pour $i = j$, on obtient pour tout $0 \leq k \leq n$:

   $$P_i^{(k}(a)P_i^{(k)}(a) \begin{cases} 0 \times 0 & \text{si } k \neq i, \\ i! \times i! & \text{si } k = i. \end{cases}$$

   Ainsi, $\|P_i\| = \sqrt{\langle P_i, P_i \rangle} = \sqrt{(i!)^2} = i!$. La famille $\left(\frac{P_0}{\|P_0\|}, \dots, \frac{P_n}{\|P_n\|}\right)$ est donc orthonormée. En particulier, elle est libre, de cardinal $n+1$ dans un espace E de dimension $n+1$. C'est donc une base orthonormée de E, qu'on notera $\mathscr{B}$.

3. Puisque la base est orthonormée, les coordonnées de $P \in E$ dans $\mathscr{B}$ sont connues :

$$P = \langle \frac{P_0}{\|P_0\|}, P\rangle \frac{P_0}{\|P_0\|} + \cdots + \langle \frac{P_n}{\|P_n\|}, P\rangle \frac{P_n}{\|P_n\|} = \langle P_0, P\rangle \frac{P_0}{\|P_0\|^2} + \cdots + \langle P_n, P\rangle \frac{P_n}{\|P_n\|^2}$$

Pour tout $0 \leq i \leq n$:

$$\langle P_i, P\rangle = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{P_i^{(j)}(a)}_{=0 \text{ si } i \neq j} P^{(j)}(a) = P_i^{(i)}(a) P^{(i)}(a) = i! P^{(i)}(a).$$

On obtient donc que :

$$\begin{aligned} P &= \langle P_0, P\rangle \frac{P_0}{\|P_0\|^2} + \cdots + \langle P_n, P\rangle \frac{P_n}{\|P_n\|^2} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{i! P^{(i)}(a)}{(i!)^2} P_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!} (X-a)^i \end{aligned}$$

On retrouve ici la formule de Taylor en a pour les polynômes de degrés $\leq n$.

Exercice 11.16 (★★ - Polynômes de Tchebychev - ✍)

1. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t$ converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[x]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t$.

   Montrer que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

3. (a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(a)\cos(b)$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.

   (b) On définit la suite de polynômes $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ par :

   $$T_0 = 1, \quad T_1 = x \quad \text{et} \quad \forall 2 \leq k \leq n-2,\ T_{k+2} = 2xT_{k+1} - T_k.$$

   Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $T_k(\cos(x)) = \cos(kx)$.

4. Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$.

   On pourra effectuer le changement de variables $t = \cos(x)$ dans l'intégrale définissant $\langle T_i, T_j\rangle$.

5. Calculer $\|T_k\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 11.17 (★★★★ - Polynômes orthogonaux - ✍)

On considère une fonction continue strictement positive $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}$, et on pose :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[x], \quad \langle P, Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

2. Établir l'existence d'une base orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ tels que $\deg(P_k) = k$ pour $0 \leq k \leq n$.

   En déduire que pour tout $1 \leq k \leq n$, P_k est orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[x]$.

3. Montrer, pour $0 \leq k \leq n-1$, qu'il existe a_k, b_k, c_k (avec $c_0 = 0$) tels que :
$$xP_k(x) = a_k P_{k+1}(x) + b_k P_k(x) + c_k P_{k-1}(x).$$
Comparer les deux nombres c_k et a_{k-1}.
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on souhaite montrer que toutes les racines de P_k sont des réels appartenant à l'intervalle $]a, b[$, et qu'elles sont toutes de multiplicité 1.

Notons $x_1, \ldots, x_p$ les racines d'ordre impaires de P_k appartenant à $]a, b[$, et on définit le polynôme $D = \prod_{i=1}^{p}(x - x_i)$ (dans le cas où P_k n'a aucune racine d'ordre impair dans $]a, b[$, on pose $D = 1$).
   (a) Justifier que $P_k D$ garde un signe constant sur $[a, b]$.
   (b) Par l'absurde, on suppose que $p < k$. Obtenir une contradiction en considérant le produit scalaire $\langle P_k, (x - x_1) \ldots (x - x_p) \rangle$. Conclure.

1. Laissée au lecteur.
2. On considère la base canonique $(1, x, \ldots, x^n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$. C'est en particulier une famille libre, on peut donc lui appliquer l'algorithme de Gram Schmidt. Notons $(P_0, \ldots, P_n)$ la famille orthonormale ainsi obtenue. Rappelons une propriété de cette famille (voir la propriété du cours) :
$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad \text{Vect}(1, x, \ldots, x^k) = \text{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_k).$$
On va montrer par récurrence que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$.

Init. Si $k = 0$, alors :
$$\text{Vect}(1) = \text{Vect}(P_0) \quad \Rightarrow \quad \deg(P_0) = 0.$$
D'où la propriété au rang 0.

Hér. Soit $0 \leq k \leq n-1$, et supposons la propriété vraie au rang k.

Par l'algorithme de Gram Schmidt :
$$\text{Vect}(1, x, \ldots, x^k) = \text{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_k)$$
et
$$\text{Vect}(1, x, \ldots, x^{k+1}) = \text{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_k, P_{k+1}).$$
En particulier, P_{k+1} appartient à $\text{Vect}(1, x, \ldots, x^{k+1})$, et il existe des coefficients $a_0, \ldots, a_{k+1}$ tels que :
$$P_{k+1} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k+1} x^{k+1}.$$
Supposons que $a_{k+1} = 0$, alors on aurait $P_{k+1} \in Vect(1, x, \ldots, x^k)$, mais dans ce cas :
$$\text{Vect}(1, x, \ldots, x^{k+1}) = \text{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_k, P_{k+1}) \subset \text{Vect}(1, x, \ldots, x^k).$$
Ce qui est faux car $\mathbb{R}_{k+1}[x] \not\subseteq \mathbb{R}_k[X]$. Ainsi $a_{k+1} \neq 0$, et P_{k+1} est de degré $k+1$.

Enfin, c'est une famille orthonormée, donc libre, de cardinal $n+1$ égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[x]$. C'est donc une base orthonormée.

Soit $1 \leq k \leq n$, et soit $Q \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$. Montrons que $\langle P_k, Q \rangle = 0$. Comme
$$Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X] = \text{Vect}(1, X, \ldots, X^{k-1}) = \text{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}),$$

il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$Q = \alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_{k-1} P_{k-1}.$$

On obtient par linéarité à droite :

$$\langle P_k, Q\rangle = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \underbrace{\langle P_k, P_i\rangle}_{=0} = 0.$$

Ainsi P_k est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}_{k-1}[x]$. On dit alors que P_k est orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{k-1}[x]$.

3. Soit $0 \leq k \leq n-1$. Puisque $\deg(xP_k) = \deg(P_k) + 1 = k+1$, XP_k appartient à $\mathbb{R}_{k+1}[x] = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_k, P_{k+1})$, et il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$xP_k = \alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_{k+1} P_{k+1}.$$

Or comme la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthonormée, on peut exprimer les coordonnées dans cette base en termes de produits scalaires :

$$\forall 0 \leq i \leq k+1, \quad \langle xP_k, P_i\rangle = \alpha_i.$$

Or :

$$\begin{aligned}\langle xP_k, P_i\rangle &= \int_a^b tP_k(t)P_i(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b P_k(t)tP_i(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \langle P_k, xP_i\rangle.\end{aligned}$$

Si $0 \leq i \leq k-2$, xP_i est de degré $i+1 \leq k-1$ et est donc orthogonal à P_k. Ainsi :

$$\forall 0 \leq i \leq k-1, \quad \alpha_i = \langle xP_k, P_i\rangle = \langle P_k, xP_i\rangle = 0.$$

D'où :

$$xP_k = \alpha_{k-1}P_{k-1} + \alpha_k P_k + \alpha_{k+1}P_{k+1}.$$

Quitte à renommer ces coefficients, on obtient l'existence pour $0 \leq k \leq n-1$, de a_k, b_k, c_k tels que :

$$xP_k(x) = a_k P_{k+1}(x) + b_k P_k(x) + c_k P_{k-1}(x).$$

Enfin, remarquons que :

$$\begin{aligned}c_k &= \langle xP_k, P_{k-1}\rangle = \langle P_k, xP_{k-1}\rangle \\ &= \langle P_k, a_{k-1}P_k + b_{k-1}P_{k-1} + c_{k-1}P_{k-2}\rangle \\ &= a_{k-1}\langle P_k, P_k\rangle + b_{k-1}\langle P_k, P_{k-1}\rangle + c_{k-1}\langle P_k, P_{k-2}\rangle = a_{k-1}\end{aligned}$$

4. (a) Avec les notations introduites dans l'énoncé, P_k peut s'écrire :

$$P_k = \prod_{i=1}^{p} (x - x_i)^{2\alpha_i+1} \times Q(x) \times R(x)$$

où :

- $Q(x)$ est le produit $\prod_{j=1}^{q}(x-y_j)^{2\beta_j}$ où $y_1,\dots,y_q$ sont les racines de multiplicité paire de P_k qui appartiennent à $]a,b[$. Notons que par définition, $Q(x)$ est positif pour tout $x\in\,]a,b[$.
- $R(x)$ est un polynôme sans racine dans $]a,b[$. Notons là aussi que la fonction $x\in\,]a,b[\,\mapsto R(x)$ étant continue et ne s'annulant pas sur $]a,b[$, elle reste de signe constant sur $]a,b[$.

Pour tout $x\in\,]a,b[$:

$$P_k(x)D(x)=\prod_{i=1}^{p}(x-x_i)^{2\alpha_i+2}\times Q(x)\times R(x).$$

Regardons le signe de cette expression :

- $x\mapsto\prod_{i=1}^{p}(x-x_i)^{2\alpha_i+2}$ est clairement positif sur $]a,b[$.
- Comme noté plus haut, $x\mapsto Q(x)\times R(x)$ est de signe constant sur $]a,b[$.

Par produit, la fonction polynomiale $x\mapsto P_k(x)D(x)$ est donc de signe constant sur $]a,b[$, et donc aussi sur $[a,b]$ (en utilisant la continuité, si $P(x)\geq 0$ sur $]a,b[$, alors $P(a)=\lim_{x\to a^+}P(x)\geq 0$, et de même en b).

(b) Supposons $p<k$. Alors $D=\prod_{i=1}^{p}(X-x_i)$ appartient à $\mathbb{R}_{k-1}[x]$, donc est orthogonal à P_k. Ainsi :

$$\langle P_k,D\rangle=0.$$

Or :

$$\langle P_k,D\rangle=\int_a^b P_k(t)D(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t,$$

et la fonction $t\mapsto P_k(t)D(t)\omega(t)$ est **continue** sur $[a,b]$, **de signe constant** d'après la question précédente et son intégrale est nulle. Par théorème de nullité de l'intégrale :

$$\forall t\in[a,b],\quad P_k(t)D(t)\omega(t)=0\quad\underbrace{\Rightarrow}_{w(t)\neq 0\text{ sur }[a,b]}\quad\forall t\in[a,b],\ t\neq x_1,\dots,x_p,\quad P_k(t)=0.$$

Ainsi, P_k admet une infinité de racines, et serait donc le polynôme nulle. Ce qui contredit $\deg(P_k)=k$.

Concluons : $p=k$, et P_k admet k racines d'ordre impaires dans $]a,b[$. Puisque $k=\deg(P_k)$, P_k ne peut pas admettre plus de k racines comptées avec leurs multiplicités. Ainsi P_k est en fait scindé à racines simples, et toutes ses racines appartiennent à l'intervalle $]a,b[$.