

Produit scalaire et espaces euclidiens

Produit scalaire et norme euclidienne

Exercice 11.1 (★)

On considère le plan vectoriel \mathbb{R}^2 et on pose pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$:

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

1. Montrer que pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle x, x \rangle = 2(x_1 + \frac{x_2}{2})^2 + \frac{3}{2}x_2^2$.
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 .
3. Montrer que les vecteurs $(1, 0)$ et $(1, -2)$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire et calculer leur norme. Les vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 11.2 (★ - EML 2007)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'on définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$ en posant

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1-t^2)dt.$$

Exercice 11.3 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 11.4 (★)

On considère l'espace $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et on pose :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
2. Établir que $\forall f \in E, \quad \left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt \right)^2 \leq 2 \left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \right)$.

Exercice 11.5 (★★ - Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ - )

On considère l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose :

$$\langle A, B \rangle = Tr({}^tAB)$$

1. Montrer que pour tout $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$, on a : $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{i,j}$
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
3. Déterminer la norme du vecteur $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.
4. Établir que $\forall A \in E, \quad \left(\sum_{i=1}^n a_{i,i} \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$.

5. Montrer que les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques réelles sont orthogonaux.

Exercice 11.6 (★)

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Montrer l'égalité suivante (appelée *identité du parallélogramme*) :

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

2. En déduire l'égalité suivante (appelée *égalité de la médiane*) :

$$\forall x, y \in E, \quad \left\| \frac{x + y}{2} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2}.$$

Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 11.7 (★★★ - QSP HEC 2007)

Soit E un espace euclidien de dimension n . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle f(x), f(y) \rangle = 0.$$

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Indication. On pourra utiliser, après l'avoir justifié, que si x et y sont deux vecteurs de même norme, alors $(x - y)$ et $(x + y)$ sont orthogonaux.

Bases orthonormées

Exercice 11.8 (★)

Soit \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire canonique. On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^4 .

- On pose $v_1 = (3, 4, 0, 0)$, $v_2 = (-4, 3, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 5, 12)$, $v_4 = (0, 0, -12, 5)$. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle orthogonale ? En déduire une base orthonormée $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de \mathbb{R}^4 .
- Déterminer $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$.

Exercice 11.9 (★)

On se place dans \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire canonique. On considère le sous-espace vectoriel $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = -z\}$.

On note $e_1 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$ et $e_3 = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$.

- Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E .
- Justifier que $u = (2, 3, -3, 7) \in E$ et déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

Exercice 11.10 (★★ - 📖)

On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t M N)$. Soit $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de E .

- Montrer que pour tout $1 \leq i, j, k, l \leq n$, $E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.
- Montrer que $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base orthonormale de E .

Exercice 11.11 (★★ - Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Dans chacun des cas suivants, donner une base orthonormée du sous espace vectoriel F de E , muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. $E = \mathbb{R}^3, F = Vect((1, 0, -2), (1, 1, 1))$, produit scalaire canonique ;
2. $E = F = \mathbb{R}_2[x], \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$;
3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), F = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right), \langle M, N \rangle = Tr({}^tMN)$;
4. $E = \mathbb{R}^4, F = Vect((1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1))$, produit scalaire canonique ;
5. $E = \mathbb{R}[x], F = Vect(x^2 + 1, x^3 + 1), \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Solutions.

1. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2), \frac{1}{\sqrt{70}}(6, 5, 3)\right)$
2. $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\right)$
3. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$
4. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 2, -1, 2), \frac{1}{\sqrt{15}}(1, -3, -1, 2)\right)$
5. $\left(\sqrt{\frac{15}{28}}(x^2 + 1), \frac{\sqrt{7}}{2}(16x^3 - 15x^2 + 1)\right)$

Exercice 11.12 (★★★ - Oral HEC 2021)

On considère une famille de vecteurs unitaires (e_1, \dots, e_p) de E espace euclidien de dimension n , vérifiant la relation suivante :

$$\forall v \in E, \quad \|v\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle e_k, v \rangle^2.$$

Montrer que la famille (e_1, \dots, e_p) est orthonormale, puis que c'est une base orthonormale de E . En déduire que $n = p$.

Exercice 11.13 (★★★★ - Endomorphismes orthogonaux - Oral ESCP 2013 - )

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit E un espace euclidien de dimension n .

On note $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E , et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

On dit qu'un endomorphisme f de E est *orthogonal* si sa matrice dans une base orthonormale est une matrice orthogonale.

1. Montrer que f est orthogonale si et seulement si : $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
2. Soit f un endomorphisme de E .
 - (a) Montrer que si f est orthogonale, alors pour tout $x \in E : \|f(x)\| = \|x\|$.
 - (b) Montrer réciproquement que, si pour tout x de E , on a $\|f(x)\| = \|x\|$, alors f est orthogonale.

Polynômes orthogonaux

Exercice 11.14 (★★)

Soit n un entier naturel et a un réel. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n et φ l'application définie, pour tout couple (P, Q) de vecteurs de E , par :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire. On notera désormais $\varphi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$.
2. Pour tout entier naturel i , on note $P_i = (x - a)^i$.
 - (a) Calculer $P_i^{(k)}(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 - (b) Montrer que la famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille orthogonale de E .

- (c) Pour tout entier i de $\{0, \dots, n\}$, calculer $\|P_i\|$. En déduire une base orthonormée \mathcal{B} de E .
3. Exprimer les coordonnées d'un polynôme P de E , dans cette base \mathcal{B} , à l'aide des dérivées successives de P en a . Retrouver ainsi la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 11.15 (★★ - Polynômes de Tchebychev - 🐞)

1. (a) Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- (b) Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. En déduire que l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[x]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
- Montrer que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
3. (a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(a)\cos(b)$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.
- (b) On définit la suite de polynômes $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x \quad \text{et} \quad \forall 2 \leq k \leq n-2, \quad T_{k+2} = 2xT_{k+1} - T_k.$$

- Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $T_k(\cos(x)) = \cos(kx)$.
4. Montrer que la famille (T_0, T_1, \dots, T_n) est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$.
- On pourra effectuer le changement de variables $t = \cos(x)$ dans l'intégrale définissant $\langle T_i, T_j \rangle$.*
5. Calculer $\|T_k\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 11.16 (★★★★ - Polynômes orthogonaux - 🐞)

On considère une fonction continue strictement positive $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, et on pose :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[x], \quad \langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t) dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Établir l'existence d'une base orthonormée de polynômes (P_0, P_1, \dots, P_n) tels que $\deg(P_k) = k$ pour $0 \leq k \leq n$.
- En déduire que pour tout $1 \leq k \leq n$, P_k est orthogonale à $\mathbb{R}_{k-1}[x]$.
3. Montrer, pour $0 \leq k \leq n-1$, qu'il existe a_k, b_k, c_k (avec $c_0 = 0$) tels que :

$$xP_k(x) = a_k P_{k+1}(x) + b_k P_k(x) + c_k P_{k-1}(x).$$

Comparer les deux nombres c_k et a_{k-1} .

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on souhaite montrer que toutes les racines de P_k sont des réels appartenant à l'intervalle $]a, b[$, et qu'elles sont toutes de multiplicité 1.

Notons x_1, \dots, x_p les racines d'ordre impaires de P_k appartenant à $]a, b[$, et on définit le polynôme $D = \prod_{i=1}^p (x - x_i)$ (dans le cas où P_k n'a aucune racine d'ordre impair dans $]a, b[$, on pose $D = 1$).

- (a) Justifier que $P_k D$ garde un signe constant sur $]a, b[$.
- (b) Par l'absurde, on suppose que $p < k$. Obtenir une contradiction en considérant le produit scalaire $\langle P_k, (x - x_1) \dots (x - x_p) \rangle$. Conclure.