

Exercice 12.6 (★★ - Produit d'uniformes)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) suivant toutes les deux la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$.

1. Déterminer la loi de $Z = -\ln(X)$.
2. Posons $T = -\ln(Y)$. Déterminer la loi de $Z + T$, puis la fonction de répartition de XY , et enfin une densité de XY .

Exercice 12.7 (★★★ - Quotient de deux lois exponentielles)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Soit $t > 0$. Déterminer une densité de $-tY$.
2. Montrer qu'une densité de $X - tY$ est donnée par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{e^{x/t}}{t+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

3. Déterminer la fonction de répartition de $U = \frac{X}{Y}$.

En déduire que U est une variable à densité et en déterminer une densité.

4. Déterminer la loi de $\frac{X}{X+Y}$.

1. Y est une variable à densité, de densité :

$$f_Y : u \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-u} & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u \leq 0 \end{cases}.$$

$Z = -tY$ l'est donc aussi par transformation affine, et une densité de Z est donnée par :

$$f_Z : u \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{t} f_Y\left(\frac{u}{-t}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \geq 0 \\ \frac{1}{t} e^{u/t} & \text{si } u < 0 \end{cases}.$$

2. On procède en trois étapes.

Étape 1. Les variables X et Y sont indépendantes, donc X et $-tY$ le sont aussi (par lemme de coalition). De plus, une densité de X est donnée par :

$$f_X : u \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-u} & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u \leq 0 \end{cases}.$$

Elle est bornée. Donc $X + Z$ est une variable à densité, et une densité de $X + Z$ est donnée par :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Z(x-u) du.$$

Étape 2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Réduisons le domaine d'intégration :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} f_Z(x-u) du.$$

On effectue à présent le changement de variables $v = x - u$, affine donc licite. On a $v : x \rightarrow -\infty$ lorsque $u : 0 \rightarrow +\infty$, et $dv = -du$. On obtient (toutes les intégrales convergent) :

$$f(x) = \int_x^{-\infty} e^{-(x-v)} f_Z(v) (-dv) = \int_{-\infty}^x e^{-x+v} f_Z(v) dv = e^{-x} \int_{-\infty}^x e^v f_Z(v) dv.$$

On détermine alors $\int_{-\infty, x} [\cap Z(\Omega) =] - \infty, x[\cap] - \infty, 0[= \begin{cases}] - \infty, x[& \text{si } x \leq 0 \\] - \infty, 0[& \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Étape 3. On distingue alors deux cas pour terminer le calcul :

- Cas $x < 0$. On a :

$$f(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x e^v \frac{1}{t} e^{v/t} dv = \frac{e^{-x}}{t} \int_{-\infty}^x e^{v(1+\frac{1}{t})} dv.$$

La fonction intégrée étant continue sur $] - \infty, x]$, l'intégrale est généralisée en $-\infty$. Prenons alors $B < 0$:

$$\int_B^x e^{v(1+\frac{1}{t})} dv = \frac{1}{1+\frac{1}{t}} \left[e^{v(1+\frac{1}{t})} \right]_B^x = \frac{1}{1+\frac{1}{t}} \left(e^{x(1+\frac{1}{t})} - e^{B(1+\frac{1}{t})} \right) \xrightarrow{B \rightarrow -\infty} \frac{e^{x(1+\frac{1}{t})}}{1+\frac{1}{t}}$$

Finalement, on a donc :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{t} \frac{e^{x(1+\frac{1}{t})}}{1+\frac{1}{t}} = \frac{e^{\frac{x}{t}}}{1+t}.$$

- Cas $x \geq 0$. On a :

$$f(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^0 e^v \frac{1}{t} e^{v/t} dv = \frac{e^{-x}}{t} \int_{-\infty}^0 e^{v(1+\frac{1}{t})} dv.$$

En reprenant les calculs précédents, on obtient donc :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{t} \frac{1}{1+\frac{1}{t}} = \frac{e^{-x}}{1+t}.$$

Une densité de $X - tY$ est donc donnée par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{e^{x/t}}{t+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

3. On procède par étapes.

Étape 1. Notons que $U(\Omega) \subset]0, +\infty[$ car $X(\Omega) = Y(\Omega) =]0, +\infty[$. Pour tout $t \leq 0$, il suit que $F_U(t) = 0$.

Étape 2. Supposons $t > 0$, et calculons :

$$F_U(t) = P\left(\frac{X}{Y} \leq t\right) \underset{Y>0 \text{ p.s.}}{=} P(X \leq tY) = P((X-tY) \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{x/t}}{t+1} dx.$$

Pour tout $B < 0$:

$$\int_B^0 e^{x/t} dx = \left[t e^{x/t} \right]_B^0 = t - t e^{B/t} \xrightarrow{B \rightarrow -\infty} t$$

Ainsi, $F_U(t) = \frac{t}{t+1}$. Finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{t}{t+1} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Étape 3. La fonction F_U est continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$. Elle est également continue en 0 puisque :

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} F_U(t) = F_U(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} F_U(t)$$

Elle est également de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Donc U est une variable à densité.

Étape 4. Pour tout $t \neq 0$:

$$F'_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t+1-t}{(t+1)^2} = \frac{1}{(t+1)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Une densité de U est donc :

$$f_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{(t+1)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

avec un choix arbitraire de la valeur en 0.

4. On procède encore une fois par étapes.

Étape 1. Puisque $0 < X < X + Y$ presque sûrement, $T(\Omega) \subset]0, 1[$. Ainsi, $F_T(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F_T(x) = 1$ si $x \geq 1$.

Étape 2. Soit à présent $x \in]0, 1[$. Alors :

$$\begin{aligned} F_T(x) &= P\left(\frac{X}{X+Y} \leq x\right) = P\left(\frac{X+Y}{X} \geq \frac{1}{x}\right) = P\left(1 + \frac{Y}{X} \geq \frac{1}{x}\right) \\ &= P\left(\frac{Y}{X} \geq \frac{1-x}{x}\right) = P\left(\frac{X}{Y} \leq \frac{x}{1-x}\right) = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{x}{1-x} + 1} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} = x. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Donc T suit une loi uniforme continue sur $[0, 1]$.

Exercice 12.8 (★★★ - QSP HEC 2013)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\nu, \sigma^2)$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur μ et ν pour que $P(X \leq Y) \geq \frac{1}{2}$.

Remarquons pour commencer que $P(X \leq Y) = P(X - Y \leq 0)$.

Par transformation affine, $-Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(-\nu, \sigma^2)$. Et par stabilité de la loi normale (les variables X et $-Y$ étant indépendantes par lemme de coalition), $Z = X - Y$ suit une loi

normale $\mathcal{N}(\mu - \nu, 2\sigma^2)$.

En centrant et en réduisant la variable Z , on obtient :

$$P(X \leq Y) = P(Z \leq 0) = P\left(\frac{Z - (\mu - \nu)}{\sqrt{2}\sigma} \leq \frac{\nu - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\nu - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

On se retrouve à résoudre l'inéquation $\Phi\left(\frac{\nu - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) \geq \frac{1}{2} = \Phi(0)$. La fonction Φ étant strictement croissante sur \mathbb{R} , cette inéquation est satisfaite si, et seulement si, $\frac{\nu - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \geq 0$, soit $\nu \geq \mu$.

Exercice 12.9 (★★★★ - Oral HEC 2016)

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

- (a) Montrer que f est une densité de probabilité.
- (b) Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle de densité f .
- (c) Trouver la loi de $Y = \sqrt{X}$ lorsque X est une variable aléatoire positive admettant f pour densité.

2. (a) Pour quelles valeurs réelles de s l'intégrale $\int_s^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-s)}}$ est-elle convergente ?

(b) Calculer alors $\int_s^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-s)}}$ en utilisant le changement de variables $t = \sqrt{\frac{x-s}{x}}$.

3. On considère deux variables aléatoires X et Y , indépendantes, admettant chacune f pour densité.

- (a) Proposer une méthode de simulation en Python de la variable aléatoire $S = X - Y$.
- (b) Démontrer que S est une variable aléatoire à densité et en donner une densité continue sur \mathbb{R}^* .

1. (a) La fonction f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et en 1, et est bien positive sur \mathbb{R} . Étudions l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1]$, donc l'intégrale est généralisée en 0. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$:

$$\int_{\varepsilon}^1 f(t) dt = \left[\sqrt{t}\right]_{\varepsilon}^1 = 1 - \sqrt{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1.$$

Donc l'intégrale converge et vaut 1. Ainsi f est bien une densité de probabilité.

(b) Calculons la fonction de répartition de X de densité f :

- Si $x \leq 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.
- Si $0 < x < 1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Fixons pour le calcul $\varepsilon \in]0, 1]$. Alors :

$$\int_{\varepsilon}^x f(t) dt = \left[\sqrt{t}\right]_{\varepsilon}^x = \sqrt{x} - \sqrt{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{x}.$$

- Si $x \geq 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = 1$.

Ainsi, $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
 dont je vous laisse le soin de faire une représentation graphique.

(c) Posons $Y = \sqrt{X}$. Puisque $X(\Omega) =]0, 1[$, il suit que $Y(\Omega) =]0, 1[$, d'où $F_Y(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F_Y(x) = 1$ si $x > 1$. Soit à présent $x \in]0, 1[$. Alors :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

Ainsi, $F_Y : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Donc Y suit une loi $\mathcal{U}([0, 1])$.

2. (a) Pour $s < 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x(x-s)}}$ n'est pas définie sur $]s, 0]$, et donc l'intégrale n'a pas de sens. De même si $s > 1$ puisqu'alors $x(x-s) < 0$ pour $x \in [1, s[$.

Pour $s = 0$, et $x \in]0, 1[$, on obtient $\frac{1}{\sqrt{x(x-s)}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$ dont l'intégrale diverge entre 0 et 1.

Supposons $s \in]0, 1[$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x(x-s)}}$ est continue sur $]s, 1[$ donc l'intégrale est généralisée en s . Et au voisinage de s :

- $\frac{1}{\sqrt{x(x-s)}} \underset{x \rightarrow s}{\sim} \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{x-s}}$,
- $\frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{x-s}} \geq 0$ sur $]s, 1[$,
- l'intégrale $\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x-s}}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en s d'exposant $\frac{1}{2} < 1$.

Par théorème de comparaison, on peut donc conclure que $\int_s^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-s)}}$ converge lorsque $s \in]0, 1[$.

(b) Posons $t = \sqrt{\frac{x-s}{x}} = \sqrt{1 - \frac{s}{x}}$. Alors $x \mapsto \sqrt{1 - \frac{s}{x}}$ est de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissante sur $]s, 1[$, avec :

$$\lim_{x \rightarrow s} \sqrt{1 - \frac{s}{x}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1 - \frac{s}{x}} = \sqrt{1-s}.$$

Or, $t^2 = 1 - \frac{s}{x}$, soit $x = \frac{s}{1-t^2}$, de sorte que $dx = \frac{2st}{(1-t^2)^2} dt$. Et donc par théorème de changement de variables (tout converge si $s \in]0, 1[$ d'après la question précédente) :

$$\int_s^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-s)}} = \int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{1-t^2} \left(\frac{s}{1-t^2} - s \right)}} \frac{2st}{(1-t^2)^2} dt = 2 \int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{1-t^2}.$$

Or $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right)$, de sorte que :

$$\int_s^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x-s)}} = \int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{1-t} + \int_0^{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{1+t} = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-s}}{1 - \sqrt{1-s}} \right).$$

3. (a) D'après la question 1.(c), si X a pour densité f , alors \sqrt{X} suit une loi $\mathcal{U}([0, 1])$. Donc si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, alors U^2 a pour densité f . Donc on peut simuler S à l'aide de l'instruction suivante :

```
S = rd.random()^2-rd.random()^2
print(S)
```

- (b) En tant que transformation affine d'une variable à densité, on a montré en cours que $-Y$ est encore une variable à densité, et qu'une densité de $-Y$ est donnée par $f_Y : t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-t}} & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Puisque ni la densité de X ni celle de $-Y$ ne sont bornées, il faut prendre des précautions : les variables X et $-Y$ sont bien indépendantes, car X et Y le sont. Le théorème sur le produit de convolution (Théorème 1 du cours) s'applique ici. Il nous dit que si la fonction h définie par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_{-Y}(x-t) dt$$

est bien définie et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors c'est une densité de S .

Puisque $f_X(t) = 0$ lorsque $t \notin]0, 1]$:

$$h(x) = \int_0^1 f_X(t)f_{-Y}(x-t) dt.$$

D'autre part :

$$f_{-Y}(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x-t < 0 \Leftrightarrow x < t \leq x+1.$$

Pour $x \leq -1$ ou $x \geq 1$, on obtient $g(x) = 0$ (faire un schéma si nécessaire).

Pour $0 \leq x < 1$:

$$g(x) = \frac{1}{4} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t(t-x)}} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 - \sqrt{1-x}} \right).$$

Pour $-1 < x < 0$:

$$g(x) = \frac{1}{4} \int_0^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{t(t-x)}}.$$

En posant le changement de variables $u = t - x$ (affine donc licite), il vient :

$$g(x) = \frac{1}{4} \int_{-x}^1 \frac{du}{\sqrt{u(u-(-x))}} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1+x}}{1 - \sqrt{1+x}} \right).$$

Puisque l'intégrale définissant g est bien définie, et que la fonction g ainsi obtenue est continue sur \mathbb{R} , sauf éventuellement en $-1, 0, 1$, nous pouvons affirmer que S est bien une variable à densité, et que g en est une densité.

Enfin, puisque l'énoncé nous demandait une densité continue sur \mathbb{R}^* , il nous reste juste à remarquer que g est continue en -1 et en 1 puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 0 = g(-1) = g(1)$.