TD12

Couples de variables à densité

Exercice 12.1 (★ - Minimum de deux lois exponentielles)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(\mu)$.
Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 12.2 (★★ - Loi logistique)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X. Déterminer une densité de X.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes possédant F comme fonction de répartition. On pose $Z = \max(X, Y)$.
   (a) Montrer que Z est une variable à densité.
   (b) Déterminer une densité de Z.

Exercice 12.3 (★★)

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(3)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(5)$. Déterminer la loi de $Z = 3X + 5Y$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la loi normale $\mathscr{N}(-1, 2)$. Déterminer la loi de $3X - 2Y$.

Exercice 12.4 (★★)

On suppose X et Y indépendantes. Déterminer la loi de $Z = X + Y$ dans les cas suivants.

1. $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$
2. $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$

Exercice 12.5 (★★ - Loi de Gompertz)

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ayant toutes deux f pour densité.
   (a) Pour tout réel x, vérifier que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} e^{-(1+e^{x})e^{-t}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(1+e^{x})^2}$.
   On pourra à cet effet effectuer le changement de variables $u = e^{-t}$ et reconnaitre l'expression de l'espérance d'une loi usuelle.
   (b) Déterminer une densité de $-Y$.
   (c) Montrer que $Z = X - Y$ possède une densité, et la déterminer.

Exercice 12.6 (★★ - Produit d'uniformes)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant toutes les deux la loi uniforme $\mathscr{U}([0,1])$.

1. Déterminer la loi de $Z = -\ln(X)$.

2. Posons $T = -\ln(Y)$. Déterminer la loi de $Z+T$, puis la fonction de répartition de XY, et enfin une densité de XY.

Exercice 12.7 (★★★ - Quotient de deux lois exponentielles)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Soit $t > 0$. Déterminer une densité de $-tY$.

2. Montrer qu'une densité de $X - tY$ est donnée par :
$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{e^{x/t}}{t+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

3. Déterminer la fonction de répartition de $U = \dfrac{X}{Y}$.

   En déduire que U est une variable à densité et en déterminer une densité.

4. Déterminer la loi de $\dfrac{X}{X+Y}$.

Exercice 12.8 (★★★★ - Oral HEC 2016)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

   (a) Montrer que f est une densité de probabilité.

   (b) Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle de densité f.

   (c) Trouver la loi de $Y = \sqrt{X}$ lorsque X est une variable aléatoire positive admettant f pour densité.

2. (a) Pour quelles valeurs réelles de s l'intégrale $\displaystyle\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}}$ est-elle convergente ?

   (b) Calculer alors $\displaystyle\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}}$ en utilisant le changement de variables $t = \sqrt{\dfrac{x-s}{x}}$.

3. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, admettant chacune f pour densité.

   (a) Proposer une méthode de simulation en `Scilab` de la variable aléatoire $S = X - Y$.

   (b) Démontrer que S est une variable aléatoire à densité et en donner une densité continue sur $\mathbb{R}^*$.
