TD13

Diagonalisation

Diagonalisation

Exercice 13.1 (★)

À l'aide des commandes `al.eig(A)[0]` et `al.matrix_rank(A)` de la librairie `numpy.linalg` donnant le spectre et le rang d'une matrice A, déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.2 (★)

Déterminer par le moins de calcul possible si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.3 (★)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$? Si oui, les diagonaliser et expliciter la matrice de passage. Afin de vérifier ses calculs sur `Python`, on pourra utiliser la commande `al.eig(A)` qui à A associe deux valeurs, un vecteur contenant les valeurs propres d'une part, une base des sous-espaces propres associés d'autre part.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.4 (★★)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une matrice Δ diagonale et une matrice P inversible telle que $J = P\Delta P^{-1}$. On explicitera Δ et P.

2. Écrire M comme combinaison linéaire de I_n et J. En déduire que M est diagonalisable, et déterminer une matrice diagonale semblable à M.

Exercice 13.5 (★★)

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathscr{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ où $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F. En déduire la dimension de F.

2. Soit D l'application définie sur F par :

   $$\forall f \in F, \quad D(f) = f'$$

   où f' désigne la dérivée première de f.

   Montrer que D est un endomorphisme de F et écrire sa matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

3. M est-elle inversible ? diagonalisable ?

Exercice 13.6 (★★)

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $f(P)(x) = xP'(x+1)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 13.7 (★★)

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 13.8 (★★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Soit $\mathscr{B}$ une base de E et $A = M_{\mathscr{B}}(f)$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$.
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\alpha_n \neq 0$.
3. En déduire que f est diagonalisable si et seulement si $Tr(A) \neq 0$.

Exercice 13.9 (★★★ - QSP HEC 2016 - ✍)

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n, diagonalisables et ayant chacune n valeurs propres distinctes.

Montrer que les matrices A et B commutent si et seulement si elles sont diagonalisables avec la même matrice de passage.

Exercice 13.10 (★★★)

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, $p \in]0,1[$. Déterminer la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 13.11 (★★★★ - Oral ESCP 2007)

Soit n un entier naturel non nul et Q un polynôme à coefficients réels de degré $d \leq n$.
On définit l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x] \\ P \mapsto (PQ)^{(n)} \end{cases}$$

où $(PQ)^{(n)}$ indique que l'on prend la dérivée n^{ieme} du produit de P par Q.

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Donner une CNS sur le polynôme Q pour que φ soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Montrer que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est triangulaire supérieure. Que dire de plus dans le cas particulier où $d < n$?
4. Déterminer une CNS sur le polynôme Q pour que φ soit diagonalisable.

Utilisation de polynômes annulateurs

Exercice 13.12 (★)
Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une relation entre A^2, A et I_3.
2. Montrer que A admet une seule valeur propre λ. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 13.13 (★★)
Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'endomorphisme défini par $f(A) = {}^tA$.

1. Calculer f^2. En déduire un polynôme annulateur de f et les valeurs propres de f.
2. f est-il diagonalisable ?

Exercice 13.14 (★★)
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{i,j} = \dfrac{i}{j}$.

1. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A, puis que $Sp(A) \subset \{0, n\}$.
2. Déterminer $\text{rg}(A)$. En déduire que 0 est valeur propre de A, et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
3. Résoudre le système $AX = nX$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 13.15 (★★ - QSP HEC 2005)
Une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe une puissance $p \in \mathbb{N}^*$ telle que $N^p = 0_n$.
À quelle condition une matrice nilpotente est-elle diagonalisable ?

Exercice 13.16 (★★★ - QSP ESCP 2015)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$, et a, b deux scalaires distincts. On suppose que :

$$(f - aId_E)^3 \circ (f - bId_E) = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad (f - aId_E)^2 \circ (f - bId_E) \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Étudier la diagonalisabilité de f.

Exercice 13.17 (★★★★ - Oral ESCP 2011 - ✍)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit u un endomorphisme de E. On note id l'endomorphisme identité de E.

On souhaite montrer le résultat suivant :

$$u \text{ diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ annule un polynôme scindé à racines simples dans } \mathbb{K}.$$

1. On suppose dans cette question que u est diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ l'ensemble de ses valeurs propres. Montrer que le polynôme $m(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_k)$ est annulateur de u.
2. Soit f et g deux endomorphismes de E. En considérant la restriction de f à $Ker(g \circ f)$, montrer que :
$$\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Ker}(g).$$

On suppose dans la suite de l'exercice qu'il existe un polynôme :

$$P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_k)$$

annulateur de u, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ sont des scalaires distincts.

3. (a) Montrer que $n \leq \sum_{j=1}^{k} \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_j id)$.

   (b) En déduire que l'endomorphisme u est diagonalisable.

4. **Applications.**

   (a) Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit F un sous-espace stable par u. Montrer que l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur F est diagonalisable.

   (b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 est diagonalisable à valeurs propres strictement positives. Montrer que A est diagonalisable.

Applications de la diagonalisation

Exercice 13.18 (★)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 4,\ u_1 = 2,\ u_2 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. Calculer $A^3 - 2A^2 - A$. En déduire un polynôme annulateur de A, puis montrer que A est diagonalisable.
4. En déduire qu'il existe trois réels λ, μ, ν tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda + \mu(-1)^n + \nu 2^n$.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13.19 (★★ - Racine carrée d'une matrice)
Soit $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec C, alors M est diagonale.
2. On cherche à résoudre l'équation matricielle $D^2 = C$ d'inconnue $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que si $D^2 = C$, alors D est diagonale.

   (b) Déterminer l'ensemble des matrices $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D^2 = C$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des matrices B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

Exercice 13.20 (★★)
Les matrices suivantes sont-elles semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
