

Vecteurs aléatoires

Maximum, minimum

Exercice 14.1 (★)

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi $\mathcal{B}(p)$. Déterminer la loi de $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$.

Exercice 14.2 (★)

Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$, et soit $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que Z suit une loi usuelle dont on précisera les paramètres. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 14.3 (★★)

Un sac contient N boules numérotées de 1 à N . On effectue dans ce sac n tirages d'une boule avec remise et on note Z_n le plus petit numéro obtenu. Déterminer la loi de Z_n .

Exercice 14.4 (★ - Minimum et maximum de lois uniformes)

Soit $a > 0$ et soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme $\mathcal{U}([0, a])$. On pose

$$Y = \max(X_1, \dots, X_n) \text{ et } Z = \min(X_1, \dots, X_n).$$

Montrer que Y et Z sont des variables aléatoires à densité et en déterminer une densité.

Exercice 14.5 (★★ - Lois uniformes et loi de Pareto)

Soit $n \geq 3$ et soient Z_1, \dots, Z_n des variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) suivant toutes la loi uniforme sur $]0, a]$, $a > 0$. On pose alors $X_i = \frac{1}{Z_i}$.

1. Montrer que X_1 est une variable aléatoire à densité, et qu'une densité de X_1 est :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{ax^2} & \text{si } x \geq \frac{1}{a} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que Y_n est une variable à densité, et qu'une densité de Y_n est :

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{n}{a^n x^{n+1}} & \text{si } x \geq \frac{1}{a} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Montrer que Y_n admet une espérance et une variance, et les calculer.
4. Python. Écrire une fonction `pareto` qui simule la loi de X_n pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14.6 (★★★)

Soit N une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$).

Soit X_0, X_1, \dots, X_n $n + 1$ variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On suppose que X_0, X_1, \dots, X_n, N sont mutuellement indépendantes.

1. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $T_k = \min(X_0, X_1, \dots, X_k)$.
2. On pose $T = \min(X_0, X_1, \dots, X_N)$.
 - (a) Montrer que T est une variable aléatoire.

- (b) Montrer que T est une variable à densité et déterminer une densité de T .
- (c) Python. Écrire une fonction `simulation` qui simule la loi de T pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$.

Exercice 14.7 (★★★★ - QSP HEC 2015)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) de même loi exponentielle de paramètre $a > 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la variable aléatoire N_x par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad N_x(\omega) = \begin{cases} \min(k \in \mathbb{N}^*, X_k(\omega) > x) & \text{si cet ensemble n'est pas vide} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

- 1. Déterminer la loi de N_x et préciser son espérance $E(N_x)$.
- 2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(N_x > E(N_x))$.

Vecteurs aléatoires, fonction d'un vecteur

Exercice 14.8 (★★)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \geq 3$). On tire simultanément trois boules dans l'urne, et on note X_1 le plus petit des trois numéros, X_3 le plus grand et X_2 le numéro intermédiaire.

- 1. Déterminer la loi de (X_1, X_2, X_3) .
- 2. En déduire la loi de X_2 , puis son espérance.

Exercice 14.9 (★★)

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $\frac{X + Y}{1 + Z}$ admet une espérance, et la déterminer.

Exercice 14.10 (★★★★ - QSP HEC 2008)

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On considère n variables aléatoires à densité, de même loi et indépendantes X_1, \dots, X_n . On note F la fonction de répartition et f une densité des X_i .

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $(Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_n(\omega))$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leq i \leq n$ réordonnés par ordre croissant. On a donc $Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega) \leq \dots \leq Y_n(\omega)$ pour tout ω de Ω .

- 1. Si $1 \leq k \leq n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$P([Y_k \leq x]) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j} .$$

- 2. En déduire que Y_k admet une densité qu'on explicitera sans le signe \sum .

Somme de variables aléatoires

Exercice 14.11 (★)

Soient X_1, X_2, X_3 des variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, et soit $T = X_1 + X_2 + X_3$. Calculer $P(T > 1)$.

Exercice 14.12 (★★)

On désigne par p un réel de $]0, 1[$. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, indépendantes, dont la loi commune est donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par : $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = 1 - p$.

- On pose $Y_n = aX_n + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Déterminer a et b pour que Y_n suive une loi de Bernoulli de paramètre p .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Déterminer la loi de S_n .
- Application.* Un supporter de foot sort d'un bar après une longue soirée. À chaque seconde, il avance d'un mètre en se déplaçant d'un mètre vers la gauche avec la probabilité p , et d'un mètre vers la droite avec la probabilité $1 - p$. En $t = 0$, il se trouve à la sortie du bar, à l'ordonnée $y = 0$.
 - Donner la loi de son ordonnée à l'instant $t = n$ secondes.
 - En moyenne, où se trouve-t-il à $t = 10$ secondes ?
 - Python.** Proposer une fonction d'entête `def marche(n,p)` simulant la marche de ce supporter pendant n secondes. Cette fonction renverra un vecteur de longueur $n + 1$, dont la k -ème coordonnée contient l'ordonnée du supporter à l'instant $t = k + 1$.
 - Python.** Proposer un script qui représente la trajectoire de ce supporter pendant 1000 secondes.

Exercice 14.13 (★★ - Loi du χ^2)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et X_1, \dots, X_n n variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi normale centrée réduite. On note $Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2$.

- Montrer que $\frac{1}{2}X_1^2$ suit une loi usuelle que l'on déterminera.
- En déduire la loi de Z .

Exercice 14.14 (★★ - Loi binomiale négative)

On considère une expérience ayant probabilité p de réussite, et $1 - p$ d'échouer.
On répète l'expérience jusqu'à obtenir m succès, et on note X le nombre d'essais nécessaires.
On note également X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'expérience i a été un succès, et 0 sinon.

- Reconnaitre la loi de X lorsque $m = 1$.
- Déterminer la loi de X_i .
- Écrire l'évènement $[X = k]$ en fonction d'évènements formés à partir des variables aléatoires $X_1 + \dots + X_{k-1}$ et X_k .
- En déduire la loi de X dans le cas général.
- En écrivant X comme somme de m variables aléatoires suivant une loi usuelle, déterminer l'espérance de X .

Exercice 14.15 (★★ - Loi Γ à deux paramètres - )

Soient b et ν deux réels strictement positifs. On définit la fonction

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t^{\nu-1} e^{-\frac{t}{b}}}{b^\nu \Gamma(\nu)} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

- Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X admettant pour densité f , et on dit que X suit la loi Γ de paramètres b et ν , et on écrit $X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)$.

- Quelle est la loi de $\frac{1}{b}X$? Quelle est la loi de X si $\nu = 1$?

3. Reconnaître la loi $\Gamma(1, \nu)$.
4. Montrer que X admet une espérance et une variance, et qu'on a $E(X) = b\nu$ et $V(X) = b^2\nu$.
5. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) telles que $X_1 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_2)$. Montrer que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \nu_2)$.
On pourra commencer par considérer la loi de $\frac{X_1}{b} + \frac{X_2}{b}$.
6. Plus généralement, si X_1, \dots, X_n sont n variables mutuellement indépendantes telles que $X_i \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_i)$, montrer que $X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \dots + \nu_n)$.
7. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, n)$.
8. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que Y^2 suit une loi Γ dont on précisera les paramètres.

Exercice 14.16 (★★★★ - Oral ESCP 2014)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $U_n = \min_{1 \leq k \leq n} X_k$

1. Soit n un entier naturel non nul.
 - (a) Déterminer la loi de U_n .
 - (b) Donner une densité de S_n . Montrer que pour tout $x > 0$,

$$P(S_n > x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k x^k}{k!}.$$

2. Soit N une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendante des (X_i) et qui suit la loi géométrique de paramètre p , avec $0 < p < 1$. On définit S et U par :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, S(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega) \text{ et } U(\omega) = U_{N(\omega)}(\omega).$$

On admet que S et U sont des variables aléatoires.

- (a) Montrer que U est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de U .
- (b) Déterminer la loi de S .

Exercice 14.17 (★★★★ - QSP ESCP 2014)

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la variable aléatoire $\frac{1}{S_n}$ admet une espérance, que l'on notera par la suite m_n .
2. Soient $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Déterminer l'espérance de $\frac{S_k}{S_n}$ en fonction de m_n .