TD18

Endomorphismes symétriques

Endomorphismes symétriques

Exercice 18.1 (★)

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini, pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x) = (3x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 3x_3).$$

Montrer que l'endomorphisme f est symétrique.

Exercice 18.2 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est la projection orthogonale sur un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.

Exercice 18.3 (★★ - Structure des endomorphismes symétriques - ✍)

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

1. Montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Soit (f, g) un couple d'éléments de $\mathscr{S}$.

   Montrer que $f \circ g \in \mathscr{S}$ si et seulement si f et g commutent.
3. Soit $f \in \mathscr{S}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathscr{S}$ puis que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(f) \in \mathscr{S}$.

Exercice 18.4 (★★)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f est symétrique. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Réduction des endomorphismes symétriques

Exercice 18.5 (★)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de $A - I_3$. En déduire que 1 est valeur propre de A et déterminer $\dim(E_1(A))$. En déduire les autres valeurs propres de A.
3. Déterminer une base des sous-espaces propres de A.
4. Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PD{}^tP$.

Exercice 18.6 (★)

Pour chacune des matrices symétriques suivantes, déterminer D diagonale et P orthogonale telles que $A = PD\,{}^tP$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18.7 (★★)

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $E = \mathbb{R}_3[X]$ en posant :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. On définit $f : P \in E \mapsto 2XP' + (X^2-1)P''$. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$.

3. Montrer que : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$, $\langle f(P), Q \rangle = -\displaystyle\int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)(t^2-1)\,\mathrm{d}t$.

   En déduire que f est symétrique. f est-il diagonalisable ?

4. Déterminer le spectre de f. f est-il un automorphisme ?

5. Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de f.

Exercice 18.8 (★★ - D'après EM Lyon 2013)

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\|X\| = 1$, et soit $S = X\,{}^tX$. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle M, N \rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN)$.

1. Montrer que S est symétrique et vérifie $S^2 = S$.

2. Soit $\Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi(M) = SM$. Vérifier que Φ est un endomorphisme symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que $\Phi^2 = \Phi$. Que dire des valeurs propres de Φ ?

4. Montrer que $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18.9 (★★)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice 18.10 (★★)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \dim(E_{\lambda_i}(A)).$$

Exercice 18.11 (★★ - ✍)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $B = {}^tAA$. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que B est symétrique et que $B = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(B)$ et X un vecteur propre de B associé à λ. En calculant de deux façons $\langle BX, X\rangle$, montrer que $\lambda \geq 0$.

3. Montrer que $E_0(A) = E_0(B)$ et en déduire que $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice 18.12 (★★★)

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, et on considère $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$, avec $p \leq n$. On définit une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i\rangle u_i$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique, et déterminer son noyau et son image.

2. On suppose à présent que $p = n$.
   (a) Montrer que les valeurs propres de f sont toutes strictement positives.
   (b) Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique g, dont toutes les valeurs propres sont strictement positives, et tel que $g^2 = f^{-1}$.
   (c) Établir que $(g(u_1), \dots, g(u_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 18.13 (★★★ - QSP ESCP 2015)

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A\,{}^tA$.
On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 18.14 (★★★★ - Endomorphismes antisymétriques - HEC 2017 - ✍)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Dans tout l'exercice, on considère un endomorphisme φ de E antisymétrique, c'est-à-dire tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, \varphi(y)\rangle = -\langle \varphi(x), y\rangle.$$

1. Établir les propriétés suivantes :
   (a) Pour tout $x \in E$, on a : $\langle x, \varphi(x)\rangle = 0$.
   (b) $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)^{\perp}$.
   (c) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est stable par φ, alors $F^{\perp}$ est stable par φ.
   (d) $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$, où $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.
   (e) Le spectre de φ est soit vide, soit réduit à $\{0\}$.

2. Montrer que toutes les valeurs propres de φ^2 sont négatives ou nulles.

3. Soit :
   - F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \geq 2$,
   - α un réel strictement positif,
   - u un endomorphisme antisymétrique de F tel que $u^2 = -\alpha^2 \mathrm{Id}_F$, où Id_F est l'endomorphisme identité de F.

   (a) On suppose que $p = 2$. Établir l'existence d'une base orthonormale de F dans laquelle la matrice A_α de u est donnée par : $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

(b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur p, montrer qu'il existe une base orthonormale de F dans laquelle la matrice B_α de u est de la forme :

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha & (0) & \dots & (0) \\ (0) & A_\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \dots & (0) & A_\alpha \end{pmatrix}.$$

Formes quadratiques

Exercice 18.15 (★)

1. Déterminer les formes quadratiques q_1 et q_2 associées aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la matrice dont proviennent les formes quadratiques suivantes :

$$q_3((x,y,z)) = 2xy + 2xz + 2yz \; ; \; q_4((x,y,z)) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - yz.$$

3. Déterminer le signe des 4 formes quadratiques précédentes.

Exercice 18.16 (★★ - Quotients de Rayleigh - ✍)

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E. Soit λ la plus petite valeur propre de f et μ la plus grande valeur propre.

1. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a : $\lambda \leq \dfrac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} \leq \mu$.

2. En déduire que :

$$\lambda = \min_{x \neq 0} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} \text{ et que } \mu = \max_{x \neq 0} \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2}.$$

3. Dans le cas où f est l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à une matrice symétrique $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, quel résultat de cours retrouve-t-on ?

Exercice 18.17 (★★★ - Matrices symétriques définies positives - ✍)

On dit qu'une matrice symétrique M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si sa forme quadratique q_M est strictement positive, soit si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a $q_M(X) = {}^tXMX > 0$.

1. Soit $L \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer que $M = {}^tLL$ est une matrice symétrique définie positive.

2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) M est définie positive ;

   (ii) les valeurs propres de M sont strictement positives ;

   (iii) il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $M = {}^tPDP$;

   (iv) il existe une matrice symétrique et inversible $L \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = L^2$.
