TD2

Sommes et séries

Calcul de sommes et de produits

Exercice 2.1 (★)

Soit n un entier naturel. Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2^k+4k+n-3)$;

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$;

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k$;

d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$;

e) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{2k-1}$;

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$, on posera $i=2n+1-k$.

Sommes doubles

Exercice 2.2 (★)

Soit n un entier naturel non nul. Calculer :

a) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n}(i+j)^2$;

b) $\displaystyle\sum_{0\leq i<j\leq n} ij$;

c) $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} x^{i+j}$ avec $x\in\mathbb{R}$;

d) $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}\frac{3^i4^j}{5^{i+j}}$;

e) $\displaystyle\sum_{1\leq j<i\leq n}\frac{j}{i}$;

f) $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n}\frac{i}{j+1}$.

Exercice 2.3 (★)

Soit n un entier naturel. On considère la somme double $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}2^j$.

1. Calculer de deux manières différentes la somme double S_n. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}=(n-1)2^n+1$.
2. Déterminer alors la valeur de la somme double $T_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i+1}k2^{k-1}$.

Séries

Exercice 2.4 (★)

Justifier la convergence et déterminer la somme des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n(n+1)}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq2}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq1}\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$

Exercice 2.5 (★)

Déterminer si les séries suivantes convergent, et le cas échéant, calculer leur somme :

$$\sum_{n\geq0}\frac{3^{2n+1}}{n!}\qquad\sum_{n\geq1}n2^{n-1}\qquad\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n!}\qquad\sum_{n\geq1}n\frac{3^n}{4^{n+1}}\qquad\sum_{n\geq2}\frac{n(n-1)}{2^{n+1}}$$

Exercice 2.6 (★★)

Déterminer la nature des séries suivantes :

a) $\sum \frac{n^3+2n}{n^4+n^3+1}$	d) $\sum n \times \sin \frac{1}{n^2}$	g) $\sum \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2$	j) $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$
b) $\sum \frac{1}{n^2 - \ln n}$	e) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$	h) $\sum \frac{\sqrt{n+1}}{\ln(n)^3 n^2}$	k) $\sum \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) (\ln n)^{1000}$
c) $\sum \left(n - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$	f) $\sum \frac{n^2 \ln n}{e^n}$	i) $\sum \frac{\arctan n}{n^2}$	l) $\sum_{n\geq 1} \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n}{n-1}\right)$

Exercice 2.7 (★★)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n$.

1. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la limite de la suite (u_n).
2. Déterminer suivant la valeur du paramètre α la nature de la série $\sum(u_n - 1)$.

Exercice 2.8 (★)
Étudier la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

a) $u_n = \frac{\sin n}{n^2}$	b) $u_n = \frac{(-1)^n(n+2)}{(n^3+1)}$	c) $u_n = \frac{(1+n)\sin n}{n^2\sqrt{n}}$	d) $u_n = \cos(n)\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$

Exercice 2.9 (★★ - Développement en série entière du cosinus)

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$.
2. En déduire que $\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ (-1)^p & \text{si } k = 2p \text{ est pair} \end{cases}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \cos^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_k \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ est convergente et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$.

Exercice 2.10 (★★★ - QSP HEC 2014)
Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la série de terme général u_n soit convergente.
2. Calculer alors la somme de cette série.

Exercice 2.11 (★★★ - QSP HEC 2008)
Représenter dans le plan l'ensemble des points de coordonnées $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{1+b^n}$ soit convergente.

Exercice 2.12 (★★★★ - Oral HEC 2021)

1. Soit x un réel. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$ converge. On note $f(x)$ sa somme.
2. Soient x et y deux réels positifs. Notons $z = \max(x, y)$. Montrer que : $|f(x) - f(y)| \leq e^z|x - y|$.
   En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) > 1$ et que $f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

4. On pose pour tout $x > 0$, $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(f(t))^2}$.

   Après avoir justifié que g est bien définie sur $]0, +\infty[$, montrer que $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$.

Exercice 2.13 (★★★★ - Oral HEC 2013)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{x^n}{n}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers 0.
   (b) Déterminer l'ensemble des réels x pour lesquels la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est absolument convergente.

2. (a) Soit $x \in [-1, 1[$. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t$, et en déduire que si $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$
   (b) Montrer que si $x \in [-1, 1[$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.
   (c) En déduire que $\forall x \in [-1, 1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est convergente et donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

3. (a) Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n^2-1}$ est convergente et calculer sa somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$.
   (c) L'application f de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$ est-elle continue ?

Autour de la série harmonique

Exercice 2.14 (★★ - Étude de la série harmonique - ✍)
On s'intéresse au problème suivant :

> On suppose avoir une infinité de kaplas (petits pavés en bois de 12 cm de long et de 8mm d'épaisseur) à notre disposition. En partant d'une tour bien droite, et en poussant intelligemment les kaplas, jusqu'où peut-on faire pencher cette pile avant qu'elle ne tombe ?

La réponse à ce problème est à découvrir dans cette vidéo. On cherche ici à retrouver les résultats qui y sont exposés. Considérons pour cela la série harmonique $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **Divergence de la série harmonique.**

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \dfrac{1}{2}$. En déduire que la série harmonique diverge.

2. **Équivalent de H_n lorsque $n \to +\infty$.**
   (a) Justifier l'inégalité suivante pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq H_n - \frac{1}{n}$.
   (c) Donner un équivalent de H_n lorsque $n \to +\infty$.

3. **Recherche d'un développement asymptotique de H_n.**
Posons $\gamma_n = H_n - \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, γ_n appartient à l'intervalle $[0, 1]$.
   (b) Montrer que $\ln(1 + x) \leq x$ pour tout $x > -1$. En déduire que $\gamma_n - \gamma_{n-1} \leq 0$ pour tout $n \geq 2$. Conclure que (γ_n) converge vers un réel $\gamma \in \mathbb{R}$. Le réel γ est appelé la *constante d'Euler* ($\gamma \simeq 0,577$).
   (c) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.
4. **Programmation.**
   (a) Écrire à l'aide de `Python` une fonction d'en-tête `def kaplas(n)` qui à n le nombre de kaplas à disposition, renvoie le réel p égal au maximum de l'inclinaison de la pile de n kaplas.
   (b) Vérifier le résultat pour une tour de kaplas haute comme la tour Eiffel (324 m) ? Et pour une tour de kaplas de votre taille ?

Exercice 2.15 (★★ - Série harmonique alternée - ✍)
Considérons la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles.

1. **Étude de la convergence.**
   (a) La série harmonique alternée est-elle absolument convergente ?
   (b) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée S.
   (c) En déduire que la série harmonique alternée converge et que l'on a $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

   Remarque. La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est un exemple de séries dîtes *alternées*. L'étude de ces séries est fréquente dans les sujets de concours (EDHEC 2008, EML 2016, ECRICOME 2016), et repose, comme pour la série harmonique alternée, sur l'étude des suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}). Pour plus de détails :

   ☞ **Complément de cours 1. Autour des séries alternées.**

2. **Calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.**
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.
   (b) En déduire que $S_{2n} = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$, et déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
   (c) Retrouver ce résultat en utilisant le développement asymptotique de la série harmonique.

Séries doubles

Exercice 2.16 (★★)
La famille $(u_{i,j})$ est-elle sommable ? Le cas échéant, préciser sa somme.

a) $(u_{i,j}) = \left(\dfrac{\lambda^{i+j}}{i!j!}\right)_{i,j\geq 0}$;

b) $(u_{i,j}) = \left(\dfrac{(-1)^i j^i}{i!}\right)_{i,j\geq 0}$;

c) $(u_{i,j}) = \left(\dfrac{1}{i^j}\right)_{i\geq 2, j\geq 2}$;

d) $(u_{i,j}) = \left(\dfrac{x^i y^j}{(i+j)!}\right)_{i,j\geq 0}$;

e) $(u_{i,j}) = \left(\dfrac{i+j-1}{2^{i+j-2}}\right)_{i\geq 1, j\geq 0}$;

f) $(u_{i,j}) = \left(\dfrac{(-1)^{i+j}2^j}{i \times j!}\right)_{i\geq 1, j\geq 0}$.

Exercice 2.17 (★★)
Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^p$ et de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!}$.
