TD20

Fonctions de plusieurs variables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Éléments de topologie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 20.1 (★)

Les ensembles suivants sont-ils ouverts ?

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ xyz \neq 0\}\ ;\ B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x^2y - 5z < 3 \text{ ou } |z| > 2\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \neq 1 \text{ et } y \neq 1\}\ ;\ D = \mathbb{R}^n \setminus \{(a_1, \ldots, a_n)\}.$$

Fonctions $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Exercice 20.2 (★)

On considère la fonction f définie par $f(x, y) = \ln(1 + xy)$.

1. Déterminer son ensemble de définition Ω et montrer que c'est un ouvert.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω et déterminer son gradient et sa hessienne en tout point de Ω.
3. Justifier l'existence et déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f en $a = (1, 1)$.

Exercice 20.3 (★★★)

Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer ses dérivées partielles premières.
2. Calculer $\partial^2_{1,2} f(0, 0)$ et $\partial^2_{2,1} f(0, 0)$. f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$?

Recherche d'extrema sur un ouvert

Exercice 20.4 (★)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, et $a \in \mathbb{R}^n$ un point critique de f. Notons $A = \nabla^2 f(a)$. Conclure si possible sur la nature local de a dans les cas suivants :

- $\mathrm{Spec}(A) = \{1, 2\}$
- $\mathrm{Spec}(A) = \{2, -2\}$
- $\mathrm{Spec}(A) = \{0, -2, -6\}$
- $\mathrm{Spec}(A) = \{-2, 0, 2\}$

Exercice 20.5 (★)

Considérons la fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + xy + y^3$.

1. Représenter graphiquement cette fonction à l'aide de `Python`.
2. Déterminer les points critiques de la fonction f.

3. Déterminer graphiquement la nature de ces points critiques. Vérifier ces résultats par le calcul.

4. Déterminer les vecteurs propres de la hessienne de f en le point col. Pouvez vous retrouver graphiquement ces vecteurs ?

Exercice 20.6 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ par $f(x,y) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1-y} + \dfrac{1}{x+y}$.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert Ω, et calculer ses dérivées partielles premières et secondes.

2. Déterminer les points critiques de f.

3. Montrer que f admet un extremum local sur Ω.

Exercice 20.7 (★★)

Étudier les extrema locaux des fonctions suivantes et préciser s'il s'agit d'extrema globaux. On pourra s'aider de `Python` (représentation graphique de la fonction, valeurs propres de la hessienne).

$$f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \;\; ; \;\; f : (x,y) \mapsto x\left((\ln x)^2 + y^2\right)$$

$$f : (x,y,z) \mapsto 2x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2xz \;\; ; \;\; f : (x,y,z) \mapsto xy + yz + zx - xyz$$

Exercice 20.8 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$, et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

2. Montrer que f admet exactement cinq points critiques, dont le point $(0,0,0)$.

3. Déterminer la matrice hessienne de f en $(0,0,0)$, et en déduire que f possède un minimum local en $(0,0,0)$. Est-ce un minimum global de f ?

4. Pour chacun des autres points critiques, vérifier que 4 est valeur propre de la matrice hessienne, et déterminer si f admet ou non un extremum local en ce point.

Exercice 20.9 (★★ - EML ECE 2014)

On note $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = e^t - te^{\frac{1}{t}}$. On note $U = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et f la fonction définie sur U par

$$f(x,y) = xy - e^x \ln(y).$$

1. Montrer l'équivalence : $\quad \varphi(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t - \ln(t) - \dfrac{1}{t} = 0.$

   En déduire que l'équation $\varphi(t) = 0$ possède une unique solution que l'on déterminera.

2. Montrer que f est $\mathscr{C}^2$ sur U et déterminer ses dérivées partielles premières et secondes.

3. Montrer que (x,y) est un point critique de f si et seulement si :

$$x > 0,\; y = e^{\frac{1}{x}} \;\text{ et }\; \varphi(x) = 0.$$

4. En déduire que f admet un unique point critique sur U.

5. f admet-elle un extremum local sur U ?

Exercice 20.10 (★)

Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 2xy + xy^3$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique.
2. Déterminer les valeurs propres de la hessienne en ce point critique. Peut-on conclure quant à la nature de ce point critique ?
3. Étudier les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$, et conclure.

Exercice 20.11 (★★)

Soit la fonction f définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$ par $f(x, y, z) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$.

1. (a) Vérifier que f possède une infinité de points critiques, et que ceux-ci sont les points de la forme $A_a = (a, a, a)$, où a est un réel strictement positif quelconque.
   (b) Déterminer la matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\nabla^2(f)(A_a) = \dfrac{1}{a^2}M$, puis déterminer les valeurs propres de M. En déduire alors celles de $\nabla^2(f)(A_a)$.
   (c) Cela permet-il de conclure quant à l'existence d'un extremum local de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$?
2. (a) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que pour tout réel z strictement positif, on a :
   $$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x}{y} + 2\sqrt{\frac{y}{x}}.$$
   (b) En étudiant la fonction $t \mapsto t + \dfrac{2}{\sqrt{t}}$ sur $]0, +\infty[$, montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :
   $$\frac{x}{y} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} \geq 3.$$
   (c) Que peut-on alors conclure ?

Exercice 20.12 (★★)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \left(1 + y + xy - \dfrac{x^2}{2}\right) e^y$.

1. Montrer que f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, déterminer ses dérivées partielles premières et secondes.
2. Montrer que f admet un unique point critique (α, β).
3. Vérifier que la détermination des valeurs propres de $\nabla^2 f(\alpha, \beta)$ ne suffit pas à déterminer la nature de ce point critique.
4. Déterminer un vecteur propre u de $\nabla^2 f(\alpha, \beta)$ associé à la valeur propre 0.
5. En étudiant la fonction $t \mapsto f((\alpha, \beta) + tu)$, déterminer la nature du point critique (α, β).

Exercice 20.13 (★★ - Position du graphe par rapport à l'hyperplan tangent - ✍)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in U$.
On note q_a la forme quadratique associée à la matrice hessienne $\nabla^2(f)(a)$.
On considère la fonction g définie pour tout $x \in U$ par :

$$g(x) = f(x) - f(a) - \langle \nabla(f)(a), x - a \rangle .$$

1. Montrer que $g(a) = 0$, que a est un point critique de g et que $\nabla^2(g)(a) = \nabla^2(f)(a)$.
2. En déduire les résultats suivants :
   - Si $\mathrm{Sp}(\nabla^2(f)(a)) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors le graphe de f se situe localement au-dessus de l'hyperplan tangent en a.
   - Si $\mathrm{Sp}(\nabla^2(f)(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$, alors le graphe de f se situe localement au-dessous de l'hyperplan tangent en a.
   - Si $\nabla^2(f)(a)$ possède des valeurs propres non nulles de signes contraires, alors le graphe de f traverse l'hyperplan tangent au voisinage de a.
3. On suppose que U est un ouvert convexe et que pour tout $x \in U$, $\mathrm{Sp}(\nabla^2(f)(x)) \subset \mathbb{R}_+$. Que peut-on en déduire ? Quel résultat sur les fonctions convexes d'une variable réelle généralise-t-on ?
4. **Application.** Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$.
   (a) Étudier localement la position relative du graphe de f par rapport à son hyperplan tangent en $(1, 1)$, $(-1, -1)$ et $(-1, 1)$.
   (b) `Python.` Représenter le graphe de f ainsi que les plans tangents en ces trois points. Vérifier graphiquement les résultats de la question précédente.

1. On a $g(a) = f(a) - f(a) - \langle \nabla f(a), a - a\rangle = 0$. De plus on a pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \langle \nabla f(a), x - a\rangle = f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(a)(x_k - a_k)$$

La fonction f est supposée de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, et $x \in U \mapsto f(a) + \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(a)(x_k - a_k)$ est polynomiale donc $\mathscr{C}^2$. Par différence de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, g est $\mathscr{C}^2$ sur U. De plus on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $x \in U$:

$$\partial_i g(x) = \partial_i f(x) - \partial_i f(a).$$

En particulier, on a $\partial_i g(a) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Donc g admet un point critique en a.

Enfin, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et pour tout $x \in U$, on a :

$$\partial_{i,j} g(x) = \partial_{i,j} f(x).$$

Ainsi on a $\nabla^2 g(x) = \nabla^2 f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en particulier $\nabla^2 g(a) = \nabla^2 f(a)$.

2. Cela résulte directement du cours. En effet :
   - Si $\mathrm{Sp}(\nabla^2(g)(a)) = \mathrm{Sp}(\nabla^2(f)(a)) \subset \mathbb{R}_+^a st$, alors g admet un minimum local en a, et donc pour tout x au voisinage de a :

$$g(x) \geq g(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(a) + \langle \nabla f(a), x - a\rangle.$$

   Ainsi le graphe de f se situe localement au-dessus de l'hyperplan tangent en a.
   - Si $\mathrm{Sp}(\nabla^2(g)(a)) = \mathrm{Sp}(\nabla^2(f)(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$, alors cette fois g admet un maximum local en a, et on conclut de même que le graphe de f se situe localement au-dessous de l'hyperplan tangent en a.

- Si $\mathrm{Sp}(\nabla^2(g)(a)) = \nabla^2(f)(a)$ possède des valeurs propres non nulles de signes contraires, alors g n'admet pas d'extremum local en a, de sorte qu'il existe x et y au voisinage de a tels que :

$$g(x) < g(a) = 0 \quad \text{et} \quad g(y) > g(a) = 0,$$

ce qui se réécrit :

$$f(x) < f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle \quad \text{et} \quad f(y) > f(a) + \langle \nabla f(a), y-a \rangle.$$

Ainsi le graphe de f traverse l'hyperplan tangent au voisinage de a.

3. Supposons que f soit une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur U ouvert convexe et que $\mathrm{Sp}(\nabla^2 f(x)) \subset \mathbb{R}_+$ pour tout $x \in U$. Pour tout $a \in U$, g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, satisfait également $\mathrm{Sp}(\nabla^2 g(x)) \subset \mathbb{R}_+$, et admet a pour point critique. Par le cours, on sait que g admet un minimum global en a sur U. Ainsi le graphe de f est au dessus de son plan tangent en a sur U.

   Ce résultat est à rapprocher du suivant, bien connu de tous : si $f : I \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^2$ et convexe sur un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$, son graphe est au dessus de toutes ces tangentes.

4. (a) Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + y^3$. Pour connaitre la position du graphe de f par rapport à son plan tangent en un point a, il suffit de regarder le signe des valeurs propres de $\nabla^2 f(a)$. Ici, f est polynomiale donc $\mathscr{C}^2$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla f(x) = (3x^2, 3y^2) \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

   En particulier, on a :
   - pour $a_1 = (1,1)$, $\nabla^2 f(a_1) = 6I_2$ dont le spectre est $\{6\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Le graphe de f est au voisinage de a_1 au dessus de son plan tangent en a_1.
   - pour $a_2 = (-1,-1)$, on a $\nabla^2 f(a_2) = -6I_2$ de spectre $\{-6\} \subset \mathbb{R}_-^*$. Le graphe de f est au voisinage de a_2 en dessous de son plan tangent en a_2.
   - enfin pour $a_3 = (-1,1)$, on a $\nabla^2 f(a_3) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ de spectre $\{-6, 6\}$. Le graphe de f traverse l'hyperplan tangent au voisinage de a_3.

   (b) Déterminons pour commencer les équations des plans tangents :
   - en $a_1 = (1,1)$, on a $\nabla f(a_1) = (3,3)$ et l'équation du plan tangent (P_1) en a_1 est :

$$f(a_1) + \langle \nabla f(a_1), (x-1, y-1) \rangle = z \quad \Rightarrow \quad 2 + 3(x-1) + 3(y-1) = z.$$

   - en $a_2 = (-1,-1)$, l'équation du plan tangent (P_2) est :

$$f(a_2) + \langle \nabla f(a_2), (x+1, y+1) \rangle = z \quad \Rightarrow \quad -2 + 3(x+1) + 3(y+1) = z.$$

   - en $a_3 = (-1,1)$, l'équation du plan tangent (P_3) est :

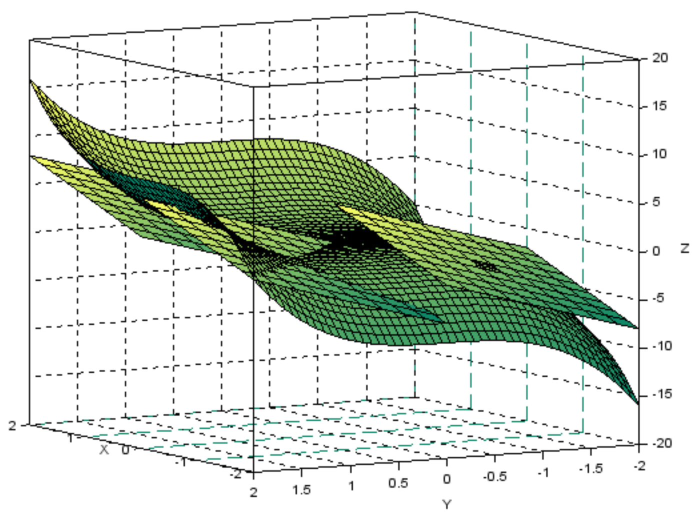
$$f(a_3) + \langle \nabla f(a_3), (x+1, y-1) \rangle = z \quad \Rightarrow \quad 3(x+1) + 3(y-1) = z.$$

   Reste à représenter les graphes de toutes ces fonctions à l'aide de `Python`.

```
def z = f(x,y);
    return x^3+y^3

x = np.linspace(-2,2,50)
```

```python
y = np.linspace(-2,2,50)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
ax.plot_surface(X,Y,f(X,Y), cmap='summer')

def P1(x,y):
    return 2+3*(x-1)+3*(y-1)

x = np.linspace(0,2,10)
y = np.linspace(0,2,10)

X,Y = np.meshgrid(x,y)
ax.plot_surface(X,Y,P1(X,Y), cmap='summer')

def P2(x,y):
    return -2+3*(x+1)+3*(y+1)

x = np.linspace(-2,0,10)
y = np.linspace(-2,0,10)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
ax.plot_surface(X,Y,P2(X,Y), cmap='summer')

def P3(x,y):
    return 3*(x+1)+3*(y-1)

x = np.linspace(-2,0,10)
y = np.linspace(0,2,10)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
ax.plot_surface(X,Y,P3(X,Y), cmap='summer')
```

On obtient en exécutant ce script le graphe suivant.



Exercice 20.14 (★★★ - Notations de Monge - ✍)

On suppose que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur U, un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $a \in U$ un point critique de f.

On note : $r = \partial^2_{1,1}(f)(a)$, $t = \partial^2_{2,2}(f)(a)$ et $s = \partial^2_{1,2}(f)(a)$ de sorte que $\nabla^2(f)(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$.

1. On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $\nabla^2(f)(a)$ (non nécessairement distinctes). Montrer que $rt - s^2 = \lambda_1\lambda_2$ et $r + t = \lambda_1 + \lambda_2$.
2. En déduire le résultat suivant :
   - Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors f admet un minimum local en a.
   - Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors f admet un maximum local en a.
   - Si $rt - s^2 < 0$ alors a est un point selle de f.
3. `Python.` Écrire une fonction qui prend en entrée une matrice symétrique 2×2 et qui renvoie la nature du point critique correspondant.
4. **Application.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
   (a) Montrer que f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles premières et secondes.
   (b) Montrer que f admet quatre points critiques et les déterminer.
   (c) Sans calculer de valeurs propres, déterminer les extrema locaux de f.

Exercice 20.15 (★★★★ - Équation des ondes en dimension 1 - Oral HEC 2017)

1. Soient a et b deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$f(x, y) = \frac{1}{2}\left[a(x + y) + a(x - y) + \int_{x-y}^{x+y} b(s)\,\mathrm{d}s\right].$$
   Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et montrer que $\partial^2_{1,1}(f) - \partial^2_{2,2}(f)$ est l'application nulle.
   Pour $x \in \mathbb{R}$, préciser les valeurs de $f(x, 0)$ et de $\partial_2(f)(x, 0)$.
2. Dans cette question, f désigne une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$f(x, y) = g(x + y, x - y).$$
   Dans la suite, on admettra que l'application g ainsi définie est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Si g désigne l'application définie au a), montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$\partial^2_{1,1}(f)(x, y) - \partial^2_{2,2}(f)(x, y) = 4\partial^2_{1,2}(g)(x + y, x - y).$$
   (c) En déduire que si $\partial^2_{1,1}(f) - \partial^2_{2,2}(f)$ est l'application nulle et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, 0) = \partial_2(f)(x, 0) = 0$, alors f est l'application nulle.
3. (a) Montrer qu'il existe une unique application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\partial^2_{1,1}(f) - \partial^2_{2,2}(f)$ soit l'application nulle et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, 0) = x^2$ et $\partial_2(f)(x, 0) = x$, et déterminer cette application.
   (b) Étudier les extremums de f.

> 1. Notons B une primitive de b, qui sera nécessairement de classe $\mathscr{C}^\infty$. Alors
> $$f(x, y) = \frac{1}{2}[a(x + y) + a(x - y) + B(x + y) - B(x - y)]$$
> Les fonctions $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto x - y$ étant polynomiales sur $\mathbb{R}^2$, elles y sont de classe $\mathscr{C}^2$, et donc par somme de composées de fonctions $\mathscr{C}^2$, f est également $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\partial_1(f)(x,y) &= \frac{1}{2}\left[a'(x+y)+a'(x-y)+b(x+y)-b(x-y)\right] \\
\partial_2(f)(x,y) &= \frac{1}{2}\left[a'(x+y)-a'(x-y)+b(x+y)+b(x-y)\right]
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1}(f)(x,y) &= \frac{1}{2}\left[a''(x+y)+a''(x-y)+b'(x+y)-b'(x-y)\right] \\
\partial^2_{2,2}(f)(x,y) &= \frac{1}{2}\left[a''(x+y)+a''(x-y)+b'(x+y)-b'(x-y)\right].
\end{aligned}$$

Et puisque $\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = \partial^2_{2,2}(f)(x,y)$, alors leur différence est nulle.
Notons qu'on a $f(x,0) = a(x)$ et $\partial_2(f)(x,0) = b(x)$.

2. (a) L'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Sa matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, dont le déterminant est non nul, donc h est un isomorphisme [1] de $\mathbb{R}^2$.
[1] Et en particulier, h est une bijection.

$$f = g \circ h \Leftrightarrow f \circ h^{-1} = g.$$

Ainsi, $g = f \circ h^{-1}$ est l'unique application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition demandée.

Remarque. Notons au passage que $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, de sorte que $h^{-1}(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$. Et donc on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = f\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$.

(b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par définition, $\partial_1 f(x,y)$ est la dérivée en $t = x$ de $t \mapsto f(t,y)$.
Or, $f(t,y) = g((y,-y) + t(1,1))$.
Un résultat du cours nous assure alors que cette dérivée vaut

$$\partial_1(f)(x,y) = \langle \nabla g((y,-y)+x(1,1)), (1,1)\rangle = \partial_1(g)(x+y,x-y) + \partial_2(g)(x+y,x-y).$$

Le même raisonnement, appliqué aux fonctions $\partial_1(g)(x+y,x-y)$ et $\partial_2(g)(x+y,x-y)$ peut s'appliquer pour re-dériver par rapport à x :

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = \partial^2_{1,1}(g)(x+y,x-y) &+ \partial^2_{2,1}(g)(x+y,x-y) + \partial^2_{1,2}(g)(x+y,x-y) \\
&+ \partial^2_{2,2}(g)(x+y,x-y).
\end{aligned}$$

De même, puisque $f(x,y) = g((x,x) + y(1,-1))$:

$$\partial_2(f)(x,y) = \langle \nabla g((x,x)+y(1,-1)), (1,1)\rangle = \partial_1(g)(x+y,x-y) - \partial_2(g)(x+y,x-y).$$

Et alors

$$\begin{aligned}
\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = \partial^2_{1,1}(g)(x+y,x-y) &- \partial^2_{1,2}(g)(x+y,x-y) - \partial^2_{2,1}(g)(x+y,x-y) \\
&+ \partial^2_{2,2}(g)(x+y,x-y).
\end{aligned}$$

Puisque g est $\mathscr{C}^2$, par le théorème de Schwarz, $\partial^2_{1,2}(g) = \partial^2_{2,1}(g)$ et donc

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) - \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 4\partial^2_{1,2}(g)(x+y, x-y).$$

(c) Si $\partial^2_{1,1}(f) - \partial^2_{2,2}(f)$ est l'application nulle, alors, par la question précédente,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \partial^2_{1,2}(g)(x+y, x-y) = 0$$

Et puisque $(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, cela signifie que $\partial^2_{1,2}(g)$ est nulle.
Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}, x \mapsto \partial_2(g)(x,y)$ est une application constante. Notons $u(y)$ sa valeur, de sorte que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_2(g)(x,y) = u(y)$.
La fonction u est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car $\partial_2(g)$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et que

$$u(y) = \partial_2(g)(0,y) = \partial_2 g((0,0) + y(0,1)).$$

Si U est une primitive de u, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $y \mapsto g(x,y)$ et U ont mêmes dérivées, donc elles diffèrent d'une constante : il existe $v(x) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) = U(y) + v(x)$$

La fonction v est alors de classe $\mathscr{C}^2$ car

$$v(t) = g(t,0) - U(0) = g((0,0) + t(1,0)) - U(0).$$

On a alors $f(x,0) = g(x,x) = U(x) + v(x)$ et $\partial_2 f(x,0) = \partial_1(g)(x,x) - \partial_2 g(x,x)$.
Mais $\partial_1(g)(x,y) = v'(x)$ et $\partial_2(g)(x,y) = U'(y) = u(y)$ et donc

$$\partial_2(f)(x,0) = v'(x) - u(x).$$

Ainsi, si $f(x,0) = 0$, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}, U(x)+v(x) = 0$ et donc $u(x)+v'(x) = 0$.
De même, si $\partial_2 f(x,0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}, u(x) - v'(x) = 0$.
Et donc $\begin{cases} u(x) + v'(x) = 0 \\ u(x) - v'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u(x) = v'(x) = 0$
On en déduit que U et v sont constantes : il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, U(x) = \lambda$ et $v(x) = \mu$.
Et puisque $f(x,0) = U(x) + v(x) = 0$, on en déduit que $\lambda + \mu = 0$ et donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}, f(x,y) = U(y) + v(x) = \lambda + \mu = 0.$$

3. (a) D'après la première question, en posant $a(t) = t^2$ et $b(t) = t$, qui sont bien de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors la fonction

$$f : (x,y) \mapsto \frac{1}{2}\left[a(x+y) + a(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} b(t)dt\right]$$

vérifie bien les conditions requises.

Notons qu'on a alors

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2}\left[(x+y)^2+(x-y)^2+\int_{x-y}^{x+y} t dt\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2x^2+2y^2+\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-(x-y)^2\right]\right] \\ &= x^2+xy+y^2. \end{aligned}$$

Il existe donc bien une fonction f vérifiant les conditions demandées.

Passons à l'unicité, et supposons qu'il existe une autre application f_1 vérifiant ces mêmes conditions, et soit alors $h = f - f_1$.

La fonction h est alors $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et vérifie

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,1}(h)-\partial^2_{2,2}(h) &= \partial^2_{1,1}(f)-\partial^2_{1,1}(f_1)-\left(\partial^2_{2,2}(f)-\partial^2_{2,2}(f_1)\right) \\ &= \left(\partial^2_{1,1}(f)-\partial^2_{2,2}(f)\right)-\left(\partial^2_{1,1}(f_1)-\partial^2_{2,2}(f_1)\right) = 0 \end{aligned}$$

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$:

$h(x,0) = f(x,0) - f_1(x,0) = x^2 - x^2 = 0$ et $\partial_2(h)(x,0) = \partial_2(f)(x,0) - \partial_2(f_1)(x,0) = x - x = 0$.

D'après la question 2.(c), h est donc la fonction nulle, de sorte que $f = f_1$.

Ceci prouve bien l'unicité de f, et donc il existe une et une seule fonction f vérifiant les conditions requises, et il s'agit de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$.

(b) Notons que $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\left[(x+y)^2+x^2+y^2\right]$, et donc $f(x,y) \geq 0$, avec égalité si, et seulement si, $x = y = 0$.

Et donc f possède un minimum global en $(0,0)$, et ce minimum vaut 0.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, et donc f ne possède pas de maximum.

Extrema des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 20.16 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(1 - \sum_{k=1}^n x_k\right)^2.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. Montrer que f admet un unique point critique $a = (a_1,\ldots,a_n)$. On note $A = \nabla^2 f(a) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer les valeurs propres de A. En déduire que f admet un extremum local en a.
4. Montrer que f admet en fait un extremum global en a.

Exercice 20.17 (★★★ - QSP HEC 2016)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace euclidien et $(u_1,\ldots,u_p) \in E^p$.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^p \|x-u_k\|^2$ admet un minimum global sur E et le calculer.

Exercice 20.18 (★★★★ - Méthode du gradient (Oral ESCP 2012))
Soit n un entier, tel que $n \geq 2$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, de la norme associée notée $\|\cdot\|$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes strictement positives. On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne canoniquement associée et on pose, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(X) = {}^tXAX$.

1. Soit B un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^n$ admet une unique solution qu'on notera R.
2. Montrer qu'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que pour tout X de $\mathbb{R}^n$:
$$\alpha\|X\|^2 \leq \Phi(X) \leq \beta\|X\|^2.$$

Dans la suite de l'exercice, on pose pour $X \in \mathbb{R}^n$: $F(X) = \Phi(X) - 2{}^tBX$.

2. (a) Déterminer le gradient ∇F_X et la hessienne $\nabla^2 F_X$ de F en X.
   (b) En déduire que F possède un minimum sur $\mathbb{R}^n$. En quel point est-il atteint ?
3. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, $X \neq 0$. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ de façon à ce que $F(X - \alpha\nabla F_X)$ soit minimal. Calculer ce minimum.
4. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit une suite $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par, pour tout $k \in \mathbf{N}$: $X_{k+1} = X_k - \alpha_k \nabla F_{X_k}$, où $\alpha_k = \frac{\|\nabla F_{X_k}\|^2}{2\Phi(\nabla F_{X_k})}$ si $X_k \neq R$ et 0 sinon.
   (a) Montrer que la suite $(F(X_k))_{k\in\mathbf{N}}$ converge.
   (b) Exprimer $F(X_{k+1}) - F(X_k)$ en fonction de α_k et de ∇F_{X_k}.
5. Une suite $(Y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sera dite convergente vers un vecteur $Z \in \mathbb{R}^n$ si $\lim\limits_{k\to+\infty} \|Y_k - Z\| = 0$, ce qui revient à dire que les coordonnées de Y_k convergent vers les coordonnées correspondantes de Z.
   (a) Montrer que la suite $(\nabla F_{X_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (b) En déduire la limite de la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

1. Les valeurs propres de A sont toutes non nulles, donc A est inversible. Et par conséquent, il existe un unique $X \in \mathbb{R}^n, X = A^{-1}B$ tel que $AX = B$.
2. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, comptées autant de fois que la dimension du sous-espace propre associé.

   Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A.

   Alors tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique $X = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

   On a alors $\Phi(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.

   Soit alors α (resp. β) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de A, de sorte que pour tout $i \in [\![1,n]\!], \alpha \leqslant \lambda_i \leqslant \beta$. Alors
$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \alpha\sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant \Phi(X) \leqslant \beta\sum_{i=1}^n x_i^2 \Leftrightarrow \alpha\|X\|^2 \leqslant \Phi(X) \leqslant \beta\|X\|^2$$
3. (a) La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ car polynomiale. En effet, on a
$$F(X) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_ix_j - 2\sum_{i=1}^n b_ix_i = \sum_{i=1}^n a_{i,i}x_i^2 + \sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i} a_{i,j}x_i - \sum_{i=1}^n b_ix_i$$

On a alors

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \partial_k F(X) = 2a_{k,k}x_k + 2\sum_{j\neq k} a_{k,j}x_j - 2b_k = 2\left(\sum_{i=1}^n a_{k,i}x_i - b_k\right).$$

Autrement dit, en notant ∇F_X le gradient de F en X, on a (en confondant vecteur ligne et vecteur colonne, de sorte que ∇F_X est ici vu comme un vecteur colonne) :

$$\nabla F_X = 2(AX - B).$$

(b) On a

$$\begin{aligned} F(X+H) - F(X) &= {}^t(X+H)A(X+H) - 2^tB(X+H) - {}^tXAX + 2^tBX \\ &= {}^tHAX + {}^tXAH + {}^tHAH - 2^tBH = 2^tHAX + \Phi(H) - 2^tBH. \end{aligned}$$

Mais :

$$\langle \nabla F_X, H\rangle = {}^tH\nabla F_X = {}^tH2(AX-B) = -2^tHB + 2^tHAX.$$

Et donc $F(X+H) = F(X) + \langle \nabla F_X, H\rangle + \Phi(H)$.

(c) Le gradient de F s'annule en X si et seulement si $AX = B$, c'est-à-dire uniquement en $X = R$.

De plus, le résultat obtenu à la question précédente prouve que si X est un point critique, alors

$$F(X+H) - F(X) = \Phi(H) \geqslant \alpha\|X\|^2 \geqslant 0$$

Et donc F admet un minimum global en tout point critique.

Et puisque R est le seul point critique, F atteint un minimum global en R.

4. D'après la question 3.(b),

$$F\left(X - \alpha\nabla F_X\right) = F(X) - \alpha\left\langle \nabla F_X, \nabla F_X\right\rangle + \alpha^2\Phi\left(\nabla F_X\right).$$

Si $X \neq R$, alors $\nabla F_X \neq 0$ et cette fonction est un polynôme du second degré en α, de coefficient dominant $\Phi\left(\nabla F_X\right) > 0$.

Alors ce trinôme admet un unique minimum atteint en $\alpha = \frac{\|\nabla F_X\|^2}{2\Phi(\nabla F_X)}$.

Ce minimum vaut alors $F(X) = \frac{\|\nabla F_X\|^4}{4\Phi(\nabla F_X)^2}$.

Enfin, si $X = R$, alors $\alpha \mapsto F\left(X - \alpha\nabla F_X\right)$ est constante égale à $F(X)$.

5. (a) Montrons que la suite $\left(F\left(X_k\right)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

En effet, d'après la question précédente, $F\left(X_{k+1}\right)$ est le minimum de $g_k : \alpha \mapsto F\left(X_k - \alpha\nabla F_{X_k}\right)$.

Ce minimum est alors inférieur ou égal à $g_k(0) = F\left(X_k\right)$. Donc $F\left(X_{k+1}\right) \leqslant F\left(X_k\right)$.

Comme de plus la suite $\left(F\left(X_k\right)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est minorée par $F(R)$, elle est convergente.

(b) Il vient donc :

$$\begin{aligned}
F\left(X_{k+1}\right)-F\left(X_k\right) &= F\left(X_k-\alpha_k \nabla F_{X_k}\right)-F\left(X_k\right) \\
&= \left\langle-\alpha_k \nabla F_{X_k}, \nabla F_{X_k}\right\rangle+\Phi\left(\alpha_k \nabla F_{X_k}\right) \\
&= -\alpha_k\left\langle\nabla F_{X_k}, \nabla F_{X_k}\right\rangle+\alpha_k^2 \Phi\left(\nabla F_{X_k}\right) \\
&= -\frac{\left\|\nabla F_{X_k}\right\|^2}{2 \Phi\left(\nabla F_{X_k}\right)}\left\|\nabla F_{X_k}\right\|^2+\frac{\left\|\nabla F_{X_k}\right\|^4}{4 \Phi\left(\nabla F_{X_k}\right)} \\
&= -\frac{\left\|\nabla F_{X_k}\right\|^4}{2 \Phi\left(\nabla F_{X_k}\right)} .
\end{aligned}$$

6. (a) La suite $\left(F\left(X_k\right)\right)_{k \in \mathbf{N}}$ converge, donc $\lim_{k \rightarrow+\infty} F\left(X_{k+1}\right)-F\left(X_k\right)=0$, et donc

$$\lim_{k \rightarrow+\infty}-\frac{\left\|\nabla F_{X_k}\right\|^4}{2 \Phi\left(\nabla F_{X_k}\right)}=0$$

Or, en utilisant l'inégalité de la question 2, il vient

$$\frac{1}{\beta}\left\|\nabla F_{X_k}\right\|^2 \leqslant \frac{1}{\Phi\left(\nabla F_{X_k}\right)} \leqslant \frac{1}{\alpha\left\|\nabla F_{X_k}\right\|^2}$$

et donc

$$\frac{\left\|\nabla F_{X_k}\right\|^4}{2 \Phi\left(\nabla F_{X_k}\right)} \geqslant \frac{1}{2 \beta}\left\|\nabla F_{X_k}\right\|^2$$

Par conséquent $\lim_{k \rightarrow+\infty}\left\|\nabla F_{X_k}\right\|=0$. Donc la suite $\left(\nabla F_{X_k}\right)$ converge vers 0.

(b) On en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow+\infty} 2(A X-B)=0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow+\infty} A X_k=B$$

et donc par multiplication par A^{-1},

$$\lim_{k \rightarrow+\infty} X_k=A^{-1} B=R .$$

Quelques explications. Nous venons donc de prouver que nous avons un algorithme qui permet de déterminer le minimum de F : il suffit de partir de n'importe quel vecteur $X_0 \in \mathbb{R}^n$, et de construire la suite $\left(X_k\right)$ comme décrit précédemment : elle converge alors automatiquement vers l'unique minimum de F.
Notons que dans ce cas précis, nous avions déjà une expression de R, et donc l'utilisation de cet algorithme n'était pas nécessaire.
En revanche, cette méthode, nommée méthode du gradient, se généralise à d'autres fonctions convexes. Rappelons-nous que le gradient indique la direction de plus forte pente.
Et donc en nous déplaçant dans la direction de $-\nabla F_{X_k}$, nous nous dirigeons vers le minimum de F. Il faut toutefois veiller à ne pas prendre α_k trop grand, car alors on risque de « dépasser » le point critique.