TD21

Intervalles de confiance

Exercice 21.1 (★)

Soit (X_i) une suite de variables i.i.d. d'espérance μ inconnue et de variance σ^2 connue. Déterminer un intervalle de confiance de μ au niveau de confiance $1-\alpha$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis à l'aide du théorème limite central.

Exercice 21.2 (★)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi normale d'espérance θ inconnue et de variance σ^2 connue. On pose $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Quelle est la loi de $\overline{X_n}$?
2. Soit $\alpha \in]0,1[$, et soit t_α l'unique réel tel que $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Montrer que $\left[\overline{X_n} - \frac{t_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{t_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1-\alpha$.

Exercice 21.3 (★★)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. (a) Déterminer un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0.95 à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   (b) Lors d'un sondage, on suppose que sur les $n = 2500$ personnes interrogées, 1300 se sont prononcées pour A et 1200 pour son adversaire. Peut-on raisonnablement conclure que le candidat A sera élu ?
2. (a) Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de p au niveau de confiance 0.95 à l'aide du théorème limite central.
   (b) Peut-on maintenant conclure sur l'élection du candidat A ?

Exercice 21.4 (★★)

Soient $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ inconnu.
On pose alors $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$, et on considère $\alpha \in]0,1[$.

1. Montrer que M_n suit une loi exponentielle dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer deux réels a_n et b_n tels que $P(n\lambda M_n \leq a_n) = \frac{\alpha}{2} = P(n\lambda M_n \geq b_n)$.
3. En déduire que $\left[\frac{nM_n}{b_n}; \frac{nM_n}{a_n}\right]$ est un intervalle de confiance de $\frac{1}{\lambda}$ au niveau de confiance $1-\alpha$.

Exercice 21.5 (★★)

On suppose que les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre λ, et on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que $\left[\frac{n-t_\alpha\sqrt{n}}{S_n}, \frac{n+t_\alpha\sqrt{n}}{S_n},\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de λ au niveau de risque α.
2. Prenons $\alpha = 0.05$. À l'aide de la méthode de Monte Carlo, écrire une fonction `def confiance(n,lambda)` qui calcule le niveau de confiance réel de l'intervalle de confiance asymptotique obtenu à la question précédente.

   Tester ce programme pour différentes valeurs de n et de λ.

Exercice 21.6 (★★★)
Soit (X_i) une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme $\mathscr{U}([0,\theta])$, θ inconnu.
On pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que $\left(n\left(1-\frac{M_n}{\theta}\right)\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$.
2. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de risque α, sous la forme $[M_n, U_n]$.

Exercice 21.7 (★★★★ - QSP HEC 2011)
On désire estimer un paramètre réel θ. Soit n un entier naturel non nul, et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes, et suivant la même loi de fonction de répartition F_θ donnée par

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 1 - e^{\theta - x} & \text{si } x \geqslant \theta \\ 0 & \text{si } x < \theta \end{cases}.$$

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T_n donnée par

$$T_n = n\left(\mu_n - \theta\right) \text{ avec } \mu_n = \min\left(X_1, \ldots, X_n\right)$$

   et reconnaître la loi de T_n.
2. En déduire un intervalle de confiance pour θ au niveau de risque $\alpha \in]0,1[$.

Exercice 21.8 (★★★★ - QSP ESCP 2007)
Soient $n \geq 1$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon identiquement distribué indépendant de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ inconnu. On pose $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.
En utilisant T_n, déterminer un intervalle de confiance asymptotique de λ au niveau de risque α.
