TD22

Extrema sous contrainte

23 Optimisation sous contrainte d'inégalités

Exercice 23.1 (★★ - ✍)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, et soit $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée. Notons $\mathscr{S} = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$.

1. Montrer qu'il existe $x_0, x_1 \in \mathscr{S}$ tels que :
$$\forall x \in \mathscr{S}, \quad q_A(x_0) \leq q_A(x) \leq q_A(x_1).$$
2. En déduire qu'il existe deux réels α, β tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha\|x\|^2 \leq q_A(x) \leq \beta\|x\|^2.$$
Montrer de plus que si q_A est strictement positive (resp. négative), alors $\alpha > 0$ (resp. $\beta < 0$).

Exercice 23.2 (★★)

Considérons la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$f(x,y) = xy(1-x-y).$$
On pose $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$ et $\mathscr{D}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ y > 0,\ x+y < 1\}$.

1. (a) Représenter $\mathscr{D}$.
   (b) Montrer que $\mathscr{D}$ est un fermé borné, et que $\mathscr{D}_0$ est un ouvert.
2. (a) Montrer que f admet un minimum global m et un maximum global M sur $\mathscr{D}$.
   (b) Déterminer les points critiques de f sur $\mathscr{D}_0$.
   (c) Déterminer les valeurs de m et de M, ainsi que les points où ils sont atteints.
3. Mêmes questions pour $g : (x,y) \mapsto x^2 - 2y^2 - 5xy$.

Exercice 23.3 (★★)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ sur $f(x,y) = \cos(x)\sin(2y)$ dont on souhaite étudier les extrema.

1. Montrer qu'il suffit de rechercher des extrema dans l'ensemble $R = [0,\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que f admet un maximum global et un minimum global sur R. Les déterminer et préciser les points de R en lesquels ils sont atteints.
3. En déduire les extrema locaux et globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ en précisant les points en lesquels ils sont atteints.

Exercice 23.4 (★★)

Soit $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2+y^2 \leq 1\}$ et soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par la fonction $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Justifier que f admet un minimum m et un maximum M sur $\mathscr{D}$.
2. Montrer que sur $\mathscr{B}_o(0,1)$, f n'admet pas de point critique. Que peut-on en déduire quant au maximum et au minimum de f ?
3. En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$, déterminer les valeurs de m et M.

Optimisation sous contrainte linéaire

Exercice 23.5 (★)

1. Montrer que la fonction $f(x, y, z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$ admet un unique point critique a sous la contrainte $x + y + z = 3$.

2. À l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2, déterminer la nature locale de a.

3. a est-il un extremum global ?

Exercice 23.6 (★)

Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$, et soit $\mathscr{C}$ la contrainte $2x - y + z = 3$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$, puis calculer son gradient et sa hessienne en tout point de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que f admet un unique point critique a sous la contrainte $\mathscr{C}$.

3. Déterminer la nature local du point critique a de f sous $\mathscr{C}$.

4. On cherche à montrer que a est en fait un extremum global. Pour cela on considère $x \in \mathscr{C}$, et on note $h = x - a$ et $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = f(a + th)$.

   Étudier les variations de g, puis conclure.

Exercice 23.7 (★★)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, et soit $\mathscr{C}$ la contrainte définie par les équations $\begin{cases} x + y = 2 \\ z + t = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer l'ensemble des points critiques de f sous la contrainte $\mathscr{C}$.

2. Déterminer la nature de ces points critiques.

Exercice 23.8 (★★ - D'après Edhec 2001)

Soit $n \geq 2$. Soit $f\ :]0, 1[^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)^n$.

Déterminer les extrema locaux de f sous la contrainte $\mathscr{C} : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$.

Exercice 23.9 (★★)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = xy + yz + xz$, et soit $\mathscr{C}$ la contrainte définie par $x + y + z = 2$. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des solutions de $x + y + z = 0$.

Le but de l'exercice est de déterminer les extrema locaux de f sous la contrainte $\mathscr{C}$.

1. Montrer que f admet un unique point critique a_0 sous la contrainte $\mathscr{C}$.

2. Montrer qu'il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(0) = 0$ et continue en 0 telle que :

$$\forall h \in \mathscr{H}, \quad f(a_0 + h) = f(a_0) + \frac{1}{2} q_{a_0}(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

3. Déterminer les valeurs propres de $A = \nabla^2 f(a_0)$. Que dire du le signe de q_{a_0} sur $\mathscr{H}$?

4. Montrer que $E_{-1}(A) = \mathscr{H}$.

5. En déduire que pour tout $h \in \mathscr{H}$ non nul, $q_{a_0}(h) < 0$. Quelle est la nature locale du point critique a_0 ?

Exercice 23.10 (★★ - D'après Ecricome 2008)
On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[^3$ par $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{4x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{9x_3}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. On note $\nabla^2(f)(A) = \left[\partial^2_{i,j}(f)(A)\right]_{1\leq i,j\leq 3}$ la matrice hessienne de f en $A=(a_1,a_2,a_3)$.
   Justifier que, pour tout $A \in]0,+\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a :
   $$ {}^tH\nabla^2(f)(A)H > 0. $$
3. f admet-elle des extrema sur $]0,+\infty[^3$?
4. On cherche désormais les extrema de f sous la contrainte $\mathscr{C}$: $x_1+x_2+x_3 = 110$.
   (a) Montrer que f admet un unique point critique a sous cette contrainte, que l'on déterminera.
   (b) On souhaite montrer que a est un extremum global de f sous la contrainte $\mathscr{C}$. Pour cela on considère $x \in \mathscr{C}$ et on note alors $h = x-a$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(t) = f(a+th)$.
   En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction g, montrer que $f(x) \geq f(a)$. Conclure.
