TD23

Révisions d'analyse

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 23.1 (★★ - Prolongement $\mathscr{C}^1$)
Soit f la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $[0, \pi/2]$.
2. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$ et calculer sa dérivée.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et préciser $f'(0)$.

Exercice 23.2 (★ - Inégalités de convexité)

1. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a : $1 - \dfrac{2x}{\pi} \leq \cos(x) \leq 1$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0, 1]$, $1 - t \leq 1 - t^n \leq n(1 - t)$.
3. Montrer que pour tout $p, q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et pour tout $x, y > 0$: $x^{1/p} y^{1/q} \leq \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}$.
4. Montrer que pour tout $x_1, \ldots, x_n > 0$, on a : $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots \frac{1}{x_n}} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Exercice 23.3 (★ - Bijection réciproque de la fonction sinus)

1. Montrer que la fonction $f(x) = \sin(x)$ réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle I à préciser.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$, et que $\forall x \in]-1, 1[$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Exercice 23.4 (★★)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 1$ et admettant n racines distinctes. Montrer que P' admet $n - 1$ racines réelles.

> **Rappel. Théorème de Rolle.**
> Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et tel que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$, non nécessairement unique, tel que :
> $$f'(c) = 0.$$
>
> On applique ce résultat $n - 1$ fois ici : notons $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ les n racines distinctes de P ordonnées dans l'ordre croissant. On a $P(a_1) = P(a_2) = \cdots = P(a_n)$. Puisque P est polynômiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on peut donc appliquer le théorème de Rolle à P entre a_i et a_{i+1}. Il existe donc $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que :
> $$P'(b_i) = 0.$$

On a ainsi obtenu (au moins) $(n-1)$ racines $b_1, \ldots, b_{n-1}$ de P'. Puisque $\deg(P') = n-1$, on les a toutes obtenues ici. P' admet bien exactement $n-1$ racines réelles.

Exercice 23.5 (★★★)

Considérons le polynôme $P(X) = (X^2-1)^n$. Montrer que sa dérivée n-ème possède exactement n racines distinctes toutes dans $]-1,1[$.

Commençons par noter que $P(X) = (X-1)^n(X+1)^n$. Donc P est scindé sur $\mathbb{R}$, de degré $2n$ et admet exactement deux racines réelles 1 et -1, de multiplicité n toutes les deux. Quelques rappels à ce sujet.

Rappel. Ordre de multiplicité d'une racine.

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On a l'équivalence entre :

(1) $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = (X-a)^r Q$ et $Q(a) \neq 0$;

(2) $(X-a)^r$ divise P et $(X-a)^{r+1}$ ne divise pas P ;

(3) $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(r-1)}(a) = 0$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$.

Si l'une de ces conditions est satisfaite, on dit alors que *a est racine de P de multiplicité r exactement.*

Par caractérisation de la multiplicité d'une racine à l'aide des dérivées, on en déduit que :

$$P(1) = P'(1) = \cdots = P^{(n-1)}(1) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(n)}(1) \neq 0$$

et de même pour la racine -1. On va appliquer le théorème de Rolle « en cascade » sur les dérivées successives de P (ce qui est bien possible puisque P est polynomiale, donc indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$).

Puisque $P(1) = P(-1)$, il existe par le théorème de Rolle $a_1^{(1)} \in]-1,1[$ tel que :

$$P'(a_1^{(1)}) = 0$$

On poursuit. Puisque $P'(-1) = P'(a_1^{(1)}) = P'(1)$, il existe par le théorème de Rolle $a_1^{(2)} \in]-1, a_1^{(1)}[$ et $a_2^{(2)} \in]a_1^{(1)}, 1[$ tels que :

$$P^{(2)}(a_1^{(2)}) = P^{(2)}(a_2^{(2)}) = 0.$$

En itérant ce raisonnement, on montre ainsi que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, il existe des réels $-1 < a_1^{(k)} < \cdots < a_k^{(k)} < 1$ tels que :

$$P^{(k)}(-1) = P^{(k)}(a_1^{(k)}) = \cdots = P^{(k)}(a_k^{(k)}) = P^{(k)}(1) = 0.$$

En particulier pour $k = n-1$, on dispose de $n+1$ racines distinctes

$$-1 < a_1^{(n-1)} < \cdots < a_{n-1}^{(n-1)} < 1$$

pour $P^{(n-1)}$. En appliquant une dernière fois le théorème de Rolle entre chaque racine, on démontre ainsi l'existence de n racines $a_1^{(n)} < \cdots < a_n^{(n)}$ pour $P^{(n)}$, toutes dans l'intervalle $]-1,1[$. Comme de plus $P^{(n)}$ est de degré n, $P^{(n)}$ n'a pas d'autre racine, et toutes ses racines sont simples de plus. D'où le résultat.

Exercice 23.6 (★ - Inégalité des accroissements finis)

1. Montrer que pour tout $x, y \in [1, +\infty[$, on a $|\ln(x) - \ln(y)| \leq |x - y|$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Exercice 23.7 (★★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f la fonction définie par $f(x) = x^{n-1}\ln(x)$. Calculer la dérivée n-ième de f.

Exercice 23.8 (★★★★ - ESCP 2014)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction deux fois dérivable et α un réel strictement positif. On suppose que f est majorée et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f''(t) \geq \alpha^2 f(t)$.

1. Montrer que f est convexe.

2. Montrer que f' est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$.

3. (a) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.
   (b) Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
   (c) Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.

4. (a) Montrer que la fonction $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante.
   (b) En déduire le signe de $\alpha f + f'$.

5. Montrer que pour tout réel positif t, on a : $f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}$.

1. f est deux fois dérivable, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :
$$f''(t) \geq \alpha^2 f(t) \geq 0.$$
Donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

2. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(t_0) > 0$. f étant convexe, sa courbe représentative est au dessus de ses tangentes. En particulier on a donc :
$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) \geq f'(t_0)(t - t_0) + f(t_0).$$
Or on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t_0)(t - t_0) + f(t_0) = +\infty$. Par théorème de comparaison, on aurait $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$. Ce qui contredit que f est majorée.

3. (a) f' est négative, donc f est décroissante, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de limite monotone, elle admet donc une limite finie ℓ en $+\infty$. De plus on a $\ell \geq 0$.
   (b) Raisonnons aussi par l'absurde en supposant que $\ell > 0$. On va faire un raisonnement semblable à celui de la question 2., cette fois-ci pour f'. On applique pour cela le théorème des accroissements finis à f' entre 0 et $t > 0$ (ce qui est possible car f' est continue sur $[0, t]$ et dérivable sur $]0, t[$) : il existe $c \in]0, t[$ tel que :
$$f'(t) - f'(0) = f''(c)(t - 0) = f''(c)t \underset{\text{hyp. de l'énoncé}}{\geq} \alpha^2 t f(t) \geq \alpha^2 \ell t$$
car f décroissante et $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$. Par théorème de comparaison, on obtiendrait alors que $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t) = +\infty$ (car $\alpha^2\ell > 0$). Or f' est à valeur dans $\mathbb{R}_-$, d'où une contradiction.
   (c) Comme f est convexe, f' est croissante. Elle est de plus majorée par 0. Elle admet donc une limite finie ℓ' en $+\infty$.

Supposons que $\ell' < 0$. Par le théorème des accroissements finis appliqué à f entre 0 et $t > 0$, il existe $d \in]0, t[$ tel que :

$$f(t) - f(0) = f'(c)t \leq \ell' t,$$

car f' est croissante et majorée par ℓ'. Par théorème de comparaison, on obtiendrait alors $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$, ce qui contredit que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

4. (a) Posons $g = \alpha^2 f^2 - f'^2$. Cette fonction est dérivable et on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(t) = 2\alpha^2 f'(t)f(t) - 2f'(t)f''(t) = 2\underbrace{f'(t)}_{\leq 0}\underbrace{(\alpha^2 f(t) - f''(t))}_{\leq 0} \geq 0.$$

Donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On a de plus à l'aide des questions précédentes que $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$. Comme g est croissante, on en déduit que $g(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. g est donc négative. Comme de plus on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$g(t) = \underbrace{(\alpha f(t) - f'(t))}_{\geq 0}(\alpha f(t) + f'(t))$$

car $f(t) \geq 0$, $\alpha > 0$ et $f'(t) \leq 0$, on en déduit que $\alpha f(t) + f'(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

5. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a donc :

$$\alpha f(t)e^{\alpha t} + f'(t)e^{\alpha t} \leq 0.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que :

$$\int_0^t \alpha f(s)e^{\alpha s} + f'(s)e^{\alpha s}\,\mathrm{d}s \leq \int_0^t 0\,\mathrm{d}s = 0.$$

Or on a :

$$\int_0^t \alpha f(s)e^{\alpha s} + f'(s)e^{\alpha s}\mathrm{d}s = [f(s)e^{\alpha s}]_0^t = f(t)e^{\alpha t} - f(0).$$

On obtient donc finalement que pour tout $t \geq 0$:

$$f(t)e^{\alpha t} - f(0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}.$$

Formules de Taylor, développements limités

Exercice 23.9 (★)

Déterminer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+x}$; | $f_2 : x \mapsto e^x\sqrt{1-x}$; | $f_3 : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$.

Exercice 23.10 (★★)

Déterminer, en utilisant des développements limités, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$;
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+2x)^{1/2} - x - \cos(x)}{x^3}$;
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\left(\sqrt[n]{e} - \dfrac{n+1}{n}\right)$.

Exercice 23.11 (★)

Montrer, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x.$$

Exercice 23.12 (★★)

1. Soit Φ la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $\Phi(t) = \ln(1+t)$. Montrer que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $t > -1$,
$$\Phi^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}.$$
2. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left| \ln(1+t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} t^k \right| \leq \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$
3. En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge et donner la valeur de sa somme.

> 1. Commençons par noter que Φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ en tant que composée de fonctions qui le sont. Montrons par récurrence le résultat demandé.
>
> **Init.** Pour $k = 1$ et pour tout $t > -1$, $\Phi'(t) = \frac{1}{1+t}$ qui est bien égale à :
> $$\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k} = \frac{1}{1+t}.$$
> Donc la propriété est vraie au rang $k = 1$.
>
> **Hér.** Soit $k \geq 1$. Supposons la propriété vraie au rang k. Pour tout $t > -1$, on a donc l'égalité :
> $$\Phi^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+t)^{-k}.$$
> Dérivons cette formule :
> $$\Phi^{(k+1)}(t) = (-1)^{k-1}(k-1)!(-k)(1+t)^{-k-1} = \frac{(-1)^k k!}{(1+t)^{k+1}}.$$
> D'où la propriété au rang $k+1$.
>
> **Concl.** Par principe de récurrence, on obtient pour tout $k \geq 1$ et pour tout $t > -1$:
> $$\Phi^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}.$$
>
> 2. Une telle inégalité devrait nous faire penser à l'inégalité de Taylor-Lagrange. Rappelons-là.

Rappel. Inégalité de Taylor-Lagrange.
Soit f une fonction de classe[a] $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I, et soit $(a,x) \in I^2$. On suppose que $|f^{(n+1)}|$ est majorée par un réel M sur I. Alors on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

[a] $\mathscr{C}^{n+1}$ suffit. Le nouveau programme impose la classe $\mathscr{C}^\infty$.

Dans le cas qui nous intéresse ici, on va appliquer cette inégalité à Φ entre 0 et t, et pour $n \in \mathbb{N}^*$. Φ est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,t]$, et pour tout $u \in [0,t]$:

$$|\Phi^{(n+1)}(u)| = \left| \frac{(-1)^n (n)!}{(1+u)^{n+1}} \right| \leq n!.$$

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on obtient :

$$\left| \Phi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| \leq \frac{n!}{(n+1)!} t^{n+1} = \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Enfin à l'aide de la question précédente, calculons pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} = -\frac{(-1)^k}{k}.$$

Et comme $\Phi(0) = 0$, on obtient bien en substituant :

$$\left| \ln(1+t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} t^k \right| \leq \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

3. L'inégalité précédente donne avec $t = 1$:

$$\left| \ln(2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ existe par théorème des gendarmes, et vaut $\ln(2)$. Autrement dit, la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge et sa somme $\ln(2)$.

Suites

Exercice 23.13 (★★ - Une suite implicite)

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que, pour chaque entier $n \geq 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$. On note x_n cette racine.
2. Calculer x_2.
3. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[0,1]$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
4. Déterminer la monotonie de la suite (x_n) et montrer sa convergence.

5. Justifier que $\forall n \geq 2,\ 0 \leq x_n \leq \dfrac{2}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

6. Déterminer la limite de x_n^n, puis montrer que $x_n \sim \dfrac{1}{n}$.

1. Soit $n \geq 2$. La fonction f_n est polynomiale donc **continue**. Elle est de plus dérivable, et on a :
$$\forall x \in [0,1], \quad f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1).$$
On a $f_n'(x) < 0$ pour tout $x \in [0,1[$. Donc f_n est **strictement décroissante sur** $[0,1]$. Enfin, on a $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 2 - n \leq 0$.

   Par le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$, qu'on notera x_n.

2. On a $f_2(1) = 1 + 1 - 2 = 0$. Par unicité de la solution de l'équation $f_n(x) = 0$ dans l'intervalle $[0,1]$, on en déduit que $x_2 = 1$.

3. On a pour tout $x \in [0,1]$:
$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - (n+1)x - x^n + nx = x^{n+1} - x^n + nx = x(x^{n-1}(x-1) + n).$$
Dans cette expression, on a $x \geq 0$, et $|x^{n-1}(x-1)| \leq 1$, donc $x^{n-1}(x-1) + n \geq 0$. Ainsi, on a pour tout $n \geq 2$:
$$f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$
On obtient pour $x = x_n \in [0,1]$:
$$f_{n+1}(x_n) - \underbrace{f_n(x_n)}_{=0} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f_{n+1}(x_n) \geq 0.$$

4. On a montré à la question précédente que pour tout $n \geq 2$:
$$f_{n+1}(x_n) \geq 0 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$
Puisque f_{n+1} est strictement décroissante sur $[0,1]$, on en déduit que $x_n \leq x_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \geq 2$, la suite (x_n) est donc croissante.

   La suite (x_n) étant croissante et majorée par 1, elle converge donc vers une limite finie ℓ, et on a $\ell \in [0,1]$.

5. On a déjà que pour tout $n \geq 2$, $0 \leq x_n \leq 1$. De plus, on a :
$$f_n(x_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad nx_n = x_n^n + 1 \leq 2.$$
Ainsi, on a bien que pour tout $n \geq 2$, $0 \leq x_n \leq \dfrac{2}{n}$.

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, on a par le théorème des gendarme que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ existe et vaut 0.

6. Pour tout $n \geq 2$, on a :
$$0 \leq x_n^n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln \frac{2}{n}\right) = \exp\left(-n \ln \frac{n}{2}\right).$$

On a $\lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{n}{2} = -\infty$, d'où par composition des limites, $\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-n\ln\frac{n}{2}\right)$. Par théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} x_n^n$ existe et vaut 0.

On a donc pour tout $n \geq 2$:

$$nx_n = x_n^n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

ce qui équivaut à $x_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 23.14 (★★ - Étude d'une suite récurrente)
Soit $a \geq 0$, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$.

1. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, comparer $\ln(1+x)$ et x.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et à termes positifs.
3. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Déterminer la limite de la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

Séries

Exercice 23.15 (★)
Nature des séries suivantes :

1. $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
2. $\sum ne^{-n}$
3. $\sum \dfrac{n^2+1}{3n+n^3}$
4. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$
5. $\sum \dfrac{\sin(n)}{2n^2}$
6. $\sum \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n+1}\right)$

1. On a :
   - $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$;
   - $\frac{1}{n} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$;
   - $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

   Par théorème de comparaison, la série $\sum \ln(1-\frac{1}{n})$ diverge.
2. On a :
   - $n^3e^{-n} \to 0$ par croissances comparées, donc $ne^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$;
   - $\frac{1}{n^2} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$;
   - $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$.

   Par théorème de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} ne^{-n}$ converge.
3. On a :

- $\dfrac{n^2+1}{3n+n^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^2}{n^3} = \dfrac{1}{n}$;
- $\frac{1}{n} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$;
- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Par théorème de comparaison, la série $\displaystyle\sum \frac{n^2+1}{3n+n^3}$ diverge.

4. On a :

- $n^{3/2}\dfrac{\ln(n)}{n^2} = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \to 0$ par croissances comparées, donc $\dfrac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$;
- $\frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$;
- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$.

Par théorème de comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge.

5. La série n'étant pas de signe constant, on passe par l'absolue convergence :

- $0 \leq \left|\dfrac{\sin(n)}{2n^2}\right| \leq \dfrac{1}{2n^2}$;
- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$.

Par théorème de comparaison, la série $\displaystyle\sum \frac{\sin(n)}{2n^2}$ converge absolument, donc converge.

6. On ne peut pas prendre directement un équivalent car on a ici une différence (les équivalents ne passent pas à la somme !!). On va donc faire un développement limité pour déterminer un équivalent du terme général de la série :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par différence, on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{1+n} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

On peut à présent faire un théorème de comparaison :

- $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{1+n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$;
- $\dfrac{1}{n^2} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$;
- $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$.

Par théorème de comparaison, la série $\displaystyle\sum \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$ converge.

Exercice 23.16 (★)
Nature et calcul des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3^{2n+1}}{n!}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\frac{4^n}{3^{2n+1}}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{3^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(n+1)!}$

Rappelons pour commencer les séries de références (à connaitre par coeur) :

Séries usuelles		Cas de convergence	Somme dans ce cas
Séries de Riemann	$\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha > 1$	
Séries géométriques	$\displaystyle\sum_{k\geq 0} q^k$, $q \in \mathbb{R}$	$\lvert q\rvert < 1$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$
Séries géométriques dérivées d'ordre 1	$\displaystyle\sum_{k\geq 1} kq^{k-1}$	$\lvert q\rvert < 1$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$
Séries géométriques dérivées d'ordre 2	$\displaystyle\sum_{k\geq 2} k(k-1)q^{k-2}$	$\lvert q\rvert < 1$	$\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$
Séries exponentielles	$\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$	quelque soit $x \in \mathbb{R}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

1. On a pour tout $n \geq 0$:
$$\frac{3^{2n+1}}{n!} = 3 \times \frac{9^n}{n!}.$$
On reconnait ici le terme général d'une série exponentielle de paramètre $x = 9$. Elle converge donc. Ainsi $\sum \frac{3^{2n+1}}{n!}$ converge, et sa somme vaut :
$$3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9^n}{n!} = 3e^9.$$

2. Pour tout $n \geq 1$, on a :
$$n\frac{4^n}{3^{2n+1}} = \frac{4}{27}\left(n\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right).$$
On reconnait le terme général d'une série géométrique dérivée, de raison $q = \frac{4}{9} \in]-1,1[$. Elle converge donc, et sa somme vaut :
$$\frac{4}{27}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{4}{27}\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{4}{25}.$$

3. Pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\frac{n^2}{3^n} = \frac{n(n-1)}{3^n} + \frac{n}{3^n} = \frac{1}{9}\frac{n(n-1)}{3^{n-2}} + \frac{1}{3}\frac{n}{3^{n-1}}.$$
On reconnait ici une combinaison linéaire des termes généraux de séries géométriques dérivées, de raison $q = \dfrac{1}{3} \in]-1,1[$. Elles convergent donc. On en déduit que $\sum \frac{n^2}{3^n}$

converge, et sa somme vaut :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n} &= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{3^{n-2}}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{3^{n-1}}\\ &= \frac{1}{9}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{3^{n-2}}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^{n-1}}\\ &= \frac{1}{9}\frac{2}{(1-q)^3}+\frac{1}{3}\frac{1}{(1-q)^2}\\ &= \frac{1}{9}\frac{27}{4}+\frac{1}{3}\frac{9}{4}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

4. On a pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}.$$

On reconnait une série téléscopique. Pour $N \geq 0$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\frac{1}{0!}-\frac{1}{(N+1)!}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}1.$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n}{(n+1)!}$ converge donc et sa somme vaut 1.

Exercice 23.17 (★★)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1)-\ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.
2. On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)$.

   Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$.

1. Plusieurs méthodes sont possibles, comme étudier les variations des fonctions $f : x \mapsto \ln(x+1)-\ln(x)-\frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \ln(x+1)-\ln(x)-\frac{1}{x+1}$ et en déduire leur signe. Je vous en propose deux autres.

   Méthode 1. On a :

$$\ln(x+1)-\ln(x)=[\ln(t)]_x^{x+1}=\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

   La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $t \in [x, x+1]$:

$$\frac{1}{x+1}\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{x}.$$

   D'où en intégrant entre x et $x+1$:

$$\frac{1}{x+1}\leq\ln(x+1)-\ln(x)\leq\frac{1}{x}.$$

Méthode 2. On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction $f : t \mapsto \ln(t)$ sur $[x, x+1]$. Rappelons la.

> **Rappel. Inégalité des accroissements finis.**
> Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue** sur $[a, b]$ et **dérivable** sur $]a, b[$.
>
> - S'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors
> $$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$
> - S'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq M$, alors
> $$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a).$$

f est bien continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$, et on a pour tout $t \in]x, x+1[$:

$$\frac{1}{x+1} \leq f'(t) = \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que :

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

2. Quelques rappels tout d'abord sur les suites adjacentes :

> **Rappel. Suites adjacentes.**
> On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si :
>
> (1) (u_n) est croissante ; | (2) (v_n) est décroissante ; | (3) $(u_n - v_n)$ converge vers 0.
>
> Par le théorème des suites adjacentes, **elles convergent alors vers la même limite** $\ell \in \mathbb{R}$, et on a :
> $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

Montrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes :

- Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \\ &= -\left(\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

car $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$ (en prenant $x = n$ dans les inégalités de la question précédente). Donc (u_n) est décroissante.

- Pour tout $n \geq 0$, on a :
$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right)$$
$$= -\left(\ln(n+2) - \ln(n+1) - \frac{1}{n+1}\right) \geq 0$$
car $\ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1}$ (en prenant $x = n+1$ dans les inégalités de la question précédente). Donc (v_n) est croissante.
- Pour tout $n \geq 0$, on a :
$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes.

3. Comme (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite $\gamma \in \mathbb{R}$. Ainsi on a :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \to \gamma.$$
En particulier, $u_n \sim \gamma$ et $\frac{u_n}{\ln(n)} \sim \frac{\gamma}{\ln(n)} \to 0$. On obtient donc que :
$$\frac{u_n}{\ln(n)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} - 1 \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1.$$
On a donc bien $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

Remarques.

- On retrouve en particulier le fait que la série harmonique diverge puisque ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. Plus précisément, on a même obtenu que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1),$$
résultat qu'on avait déjà démontré dans l'exercice 2.14.
- Le nombre γ est appelé *constante d'Euler*. On ignore à peu près tout de γ, et notamment s'il est rationnel ou non. On sait en revanche que $\gamma \approx 0.577215\ldots$ (on sait en fait beaucoup mieux, les 119 milliards de premières décimales de γ ayant été calculées informatiquement).

Exercice 23.18 (★★ - Suites de Fibonacci)
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite déterminer par $F_0 = F_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Écrire un programme qui demande n à l'utilisateur, et qui renvoie la valeur de F_n.
2. Montrer qu'il existe des réels a, b, r_1, r_2, que l'on déterminera, vérifiant $r_2 = -\frac{1}{r_1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = ar_1^n + br_2^n$.
3. Donner un équivalent de F_n lorsque $n \to +\infty$.

4. En déduire que la série de terme général $\frac{F_n}{2^n}$ converge, et calculer sa somme.

1. On a :

```
n = int(input('entrer n'))
F = 1 # F contient F_0
G = 1 # G contient F_1
for k in range(n)
      H = G # H contient F_{k+1}
      G = F+G # G contient F_{k+2} = F_{k-1}+F_{k}
      F = H # F contient F_{k+1}
print(F)
```

2. (F_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Pour déterminer son terme général, on résout l'équation caractéristique :

$$r^2 - r - 1 = 0$$

On a $\Delta = 5$, $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Rappelons que si r_1, r_2 sont racines du polynôme $aX^2 + bX + c$, alors :

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}.$$

Ici on obtient donc :

$$r_1 r_2 = -1 \quad \text{d'où} \quad r_2 = \frac{-1}{r_1} \quad \text{et} \quad r_1 + r_2 = 1.$$

Par le théorème du cours, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = ar_1^n + br_2^n.$$

Calculons a et b à l'aide des premiers termes :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ r_1 a + b r_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ r_1 a - \frac{b}{r_1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (1+r_1^2)a = 1 + r_1 = r_1^2 \quad (1) + r_1(2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - \frac{r_1^2}{1+r_1^2} = \frac{r_1^2 - r_1}{1+r_1^2} = \frac{1}{1+r_1^2} = \frac{1}{2+r_1} \\ a = \frac{r_1^2}{1+r_1^2} = \frac{r_1+1}{2+r_1} \end{cases}$$

3. On a $1 < r_1$ et $r_2 \in]-1, 1[$, donc $r_2^n = o(r_1^n)$ (car $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n = 0$). Ainsi on a :

$$F_n = ar_1^n + br_2^n = ar_1^n + o(r_1^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} ar_1^n.$$

Remarque. On vient d'utiliser l'équivalence suivante (à connaitre) :

$$u_n \sim v_n \quad \Leftrightarrow \quad u_n = v_n + o(v_n).$$

4. On en déduit que :
$$\frac{F_n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a\left(\frac{r_1}{2}\right)^n$$
qui est le terme général d'une série à termes positifs qui converge (série géométrique de raison $\frac{r_1}{2} \in]-1,1[$). Par théorème de comparaison de séries à termes de signe constant, on en déduit que $\sum_{n\geq 0} \frac{F_n}{2^n}$ converge. On note S sa somme.

Pour tout $N \geq 2$, on a :
$$\sum_{n=0}^{N} \frac{F_n}{2^n} = F_0 + \frac{F_1}{2} + \sum_{n=2}^{N} \frac{F_n}{2^n} = \frac{3}{2} + \sum_{n=2}^{N} \frac{F_{n-1}}{2^n} + \sum_{n=2}^{N} \frac{F_{n-2}}{2^n} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{F_n}{2^n} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N-2} \frac{F_n}{2^n}.$$
En passant à la limite lorsque $N \to +\infty$, on obtient :
$$S = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(S-1) + \frac{1}{4}S \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}S = 1 \quad \Rightarrow \quad S = 4.$$
Ainsi on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{2^n} = 4$.

Remarque. Une autre méthode était possible, mais beaucoup plus calculatoire :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{2^n} &= a\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_1^n}{2^n} + b\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_2^n}{2^n} \qquad \text{(tout converge)}\\ &= a\frac{1}{1-\frac{r_1}{2}} + b\frac{1}{1-\frac{r_2}{2}}\end{aligned}$$
On connait a et b, reste à simplifier cette expression...

Exercice 23.19 (★★)

1. (a) Montrer que : $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$.

   (b) En déduire que : $\left|\arctan x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

   (c) En déduire une CNS de convergence de la série $\sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ et calculer sa somme.

2. (a) Montrer que $\left|\pi - 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3}$.

   (b) Écrire une fonction d'en-tête `def approx(epsilon)` qui prend en entrée un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie une valeur approchée de π à ε près.

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x^2 \neq 1$ de sorte que :
$$\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$$
ce qui équivaut à : $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$. D'où l'égalité voulue.

   (b) On intègre la relation précédente entre 0 et $x \in \mathbb{R}$ (toutes les fonctions considérées sont bien continues). On obtient :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$$

On en déduit que :

$$\left| \arctan(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| = \left| \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \right| = \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \right|.$$

Si $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \right| &\leq \int_0^x \left| \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \right| \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^x t^{2n+2}\, \mathrm{d}t = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \end{aligned}$$

Si $x < 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \right| &\leq \int_x^0 \left| \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \right| \mathrm{d}t = - \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \\ &\leq - \int_0^x t^{2n+2}\, \mathrm{d}t = - \frac{x^{2n+3}}{2n+3} = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \end{aligned}$$

D'où l'inégalité voulue.

(c) Supposons $|x| \leq 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|x|^{2n+3}}{2n+3} = 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ existe et vaut $\arctan(x)$. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ converge si $|x| \leq 1$.

Supposons à présent $|x| > 1$, alors on a :

$$\left| (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right| = \frac{|x|^{2k+1}}{2k+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Donc le terme général de la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ ne tend pas vers 0. La série $\displaystyle\sum_{k \leq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ diverge donc grossièrement.

On a donc montré que la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ converge si et seulement si $|x| \leq 1$, et dans ce cas sa somme vaut $\arctan(x)$.

2. Prenons $x = 1$ dans l'inégalité de la question 1.(b). On obtient :

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

D'où l'inégalité voulue en divisant par 4.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{4}{2n+3} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{\varepsilon} \leq 2n+3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\varepsilon} - \frac{3}{2} \leq n.$$

Il résulte de ce calcul que pour $n = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon} - \frac{3}{2} \right\rfloor + 1$, on a :

$$\left| \pi - 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \frac{4}{2n+3} \leq \varepsilon$$

et donc que $4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ est une approximation de π à ε près. On propose donc le programme suivant.

```
def approx(eps)
    n = np.floor(2/eps + 3/2)+1
    S = 0
    for k in range(n+1)
        S = S+((-1)^k)*(x^(2k+1))/(2k+1)
    return S
```

Exercice 23.20 (★★ - Étude d'une série alternée)

1. Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $[1, +\infty[$.

2. Considérons la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$.

   (a) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\geq 2}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 2}$ convergent vers la même limite.

   (b) En déduire que la série de terme général $(-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$ converge.

3. Soit $v_n = n^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1$.

   (a) Montrer à l'aide d'un développement limité que $v_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} + \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$.

   (b) En déduire que la série $\sum v_n$ converge.

1. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas, et on a pour tout $x \geq 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

qui est positive si et seulement si $x \in [1, e]$. Ainsi f est croissante sur $[1, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$.

2. (a) On va tenter de montrer qu'elles sont adjacentes (avec un peu de chance, ça sera le cas, et on aura le résultat par le théorème des suites adjacentes).

- Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$u_{2(n+1)} - u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$$
$$= f(2n+2) - f(2n+1) \leq 0$$

d'après la question précédente. Donc $(u_{2n})_{n\geq 2}$ est décroissante.

- De même, on a pour tout $n \geq 2$:

$$u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = f(2n+2) - f(2n+3) \geq 0.$$

Donc $(u_{2n+1})_{n\geq 2}$ est croissante.

- Pour tout $n \geq 2$:

$$u_{2n+1} - u_{2n} = -\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \to 0$$

par croissances comparées.

Ainsi les suites $(u_{2n})_{n\geq 2}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 2}$ sont adjacentes. Par le théorème des suites adjacentes, elles convergent donc vers la même limite. Notons la S.

(b) On a besoin du résultat suivant (dont une démonstration est donnée dans le **Complément 0. Méthodes d'études d'une suite récurrente d'ordre 1.**, Propriété 4.).

> **Rappel. Suites extraites paires et impaires.**
> Si les suites extraites paires (u_{2n}) et impaires (u_{2n+1}) convergent **vers la même limite** ℓ, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Ainsi la suite (u_n) des sommes partielles de la série de terme général $(-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$ converge, ce qui par définition signifie que cette série converge.

Remarque. Pour déterminer la convergence de la série $\sum (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$, qui n'est pas de signe constant, le premier (bon) réflexe est d'étudier la convergence absolue de cette série (puisque la convergence absolue implique la convergence de la série). Essayons donc :

$$\left|(-1)^k \frac{\ln(k)}{k}\right| = \frac{\ln(k)}{k} \geq \frac{1}{k} \geq 0 \quad \text{pour tout } k \geq 3.$$

Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ diverge, on en déduit par théorème de comparaison que la série $\sum (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$ ne converge pas absolument.

Voici donc un exemple (un de plus avec la série harmonique alternée) d'une série qui converge mais ne converge pas absolument. Rappelons encore une fois que la convergence absolue d'une série implique sa convergence, mais que la réciproque est fausse en général. En voici donc un contre-exemple.

> **Déjà vu ?**
> La série $\sum_{n\geq 1} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$ est dite alternée. Nous avons rencontré ce type de séries à de nombreuses reprises cette année : série harmonique alternée dans le TD2, Concours Blanc 2 (extrait d'EML 2016). Elles ont même fait l'objet du **Complément 1. Autour des séries alternées.** que je vous invite à relire.

3. (a) Pour tout $n \geq 1$, $v_n = e^{\frac{(-1)^n \ln(n)}{n}} - 1$, avec $\dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n} \to 0$ par croissances comparées. On obtient en utilisant le développement limité de l'exponentielle en 0 :

$$\begin{aligned} v_n &= 1 + \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n \ln(n)}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{(-1)^n \ln(n)}{n}\right)^2\right) - 1 \\ &= \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} + \frac{1}{2}\frac{\ln(n)^2}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right). \end{aligned}$$

(b) On a pour tout $n \geq 1$:

$$v_n = \underbrace{\frac{(-1)^n \ln(n)}{n}}_{w_n} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\ln(n)^2}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)}_{t_n}.$$

La série $\sum w_n$ converge d'après la question précédente. Montrons qu'il en est de même pour $\sum_{n\geq 1} t_n$:

- $t_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(n)^2}{n^2} + o\left(\dfrac{\ln(n)^2}{n^2}\right) \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(n)^2}{n^2}$ et $\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(n)^2}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ par croissances comparées ;
- $\dfrac{1}{n^{3/2}} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$;
- $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge en tant que somme de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$.

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum t_n$ converge. Comme enfin $v_n = w_n + t_n$ pour tout $n \geq 1$ et que les séries $\sum w_n$ et $\sum t_n$ convergent, on peut donc conclure que $\sum v_n$ converge également.

Mise en garde.

Attention à ne pas appliquer directement un théorème de comparaison à la série $\sum v_n$ comme ceci :

- $v_n \sim \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n}$;
- la série $\sum \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ converge ;

et conclure que la série $\sum v_n$ converge par critère de comparaison. C'est **faux** : le critère de comparaison ne s'applique pas ici car $\dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ n'est pas de signe constant (et cela même à partir d'un certain rang) !

Exercice 23.21 (★★★ - Formule de Stirling (Extrait de EML 2012))
On note, pour tout entier $n \geq 1$, $A_n = \dfrac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

On note, pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} a_n$ converge.

2. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.

3. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et que sa limite ℓ est strictement positive.
4. Justifier que $n! \sim \dfrac{1}{\ell} n^n e^{-n}\sqrt{n}$.

1. On effectue un développement limité de a_n :

$$\begin{aligned}
-1-\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) &= -1-\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= -1-\left(-1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi on a $a_n \sim \dfrac{1}{12n^2}$. Comme la série $\sum \dfrac{1}{12n^2}$ est à termes positifs et convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), $\sum a_n$ converge par théorème de comparaison.

2. On a pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\ln(A_n)-\ln(A_{n-1}) = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) &= \ln\left(\frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}(n-1)!}{n!(n-1)^{n-1}e^{-n+1}\sqrt{n-1}}\right)\\
&= \ln\left(\frac{n^{n-1}e^{-1}}{(n-1)^{n-1}\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\right) = -1-\ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&= -1-\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = a_n
\end{aligned}$$

3. Pour tout $N \geq 2$, on a :

$$\sum_{n=2}^{N} a_n = \sum_{n=2}^{N}\left(\ln(A_n)-\ln(A_{n-1})\right) = \ln(A_N)-\ln(A_1)$$

par télescopage. Comme la série $\sum_{n\geq 2} a_n$ converge, on en déduit que la suite $(\ln(A_N))$ converge également vers une limite $\ell' \in \mathbb{R}$. Par composition avec l'exponentielle qui est une fonction continue, on en déduit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell = e^{\ell'} > 0$.

4. Ainsi $A_n \sim \ell$, ce qui se réécrit :

$$\frac{1}{n!}n^n e^{-n}\sqrt{n} \sim \ell \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\ell}n^n e^{-n}\sqrt{n} \sim n!.$$

Remarque. C'est Abraham de Moivre (1667 -1754) qui a initialement démontré cette formule. Le mathématicien écossais James Stirling (1692 - 1770) l'a précisé en montrant que $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (ce qu'on peut retrouver à l'aide des intégrales de Wallis), ce qui donne donc :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Cette formule est couramment appelée *formule de Stirling.* Elle ressurgit régulièrement dans les sujets de concours.

Exercice 23.22 (★★★ - QSP ESCP 2008)
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$.

On cherche un équivalent de u_n à l'aide d'un développement limité. On a :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} &= \exp\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(2n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(2-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= e^2\exp\underbrace{\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{=v_n}.\end{aligned}$$

On a $v_n \sim -\frac{1}{n} \to 0$, d'où en faisant le DL de l'exponentielle :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = e^2(1+v_n+o(v_n)) = e^2\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o(v_n)\right).$$

De plus, on a en posant $t_n = o(v_n)$:

$$\frac{t_n}{\frac{1}{n}} \sim -\frac{t_n}{v_n} \to 0 \quad\Rightarrow\quad t_n = o(1/n).$$

On obtient donc :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = e^2\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{2}{n}-\frac{4}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(2-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= e^2\exp\underbrace{\left(-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{=w_n}.\end{aligned}$$

On a $w_n \sim -\frac{2}{n} \to 0$, d'où en procédant comme précédemment :

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} = e^2(1+w_n+o(w_n)) = e^2\left(1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

On obtient donc :

$$u_n = e^2\left(1-\frac{1}{n}-1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{e^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi on a $u_n \sim \frac{e^2}{n}$. Comme de plus $\sum \frac{e^2}{n}$ est une série à termes positifs qui diverge (Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$), on peut donc conclure que $\sum u_n$ diverge par théorème de comparaison.

Autre méthode. On pouvait aussi procéder comme suit pour obtenir l'équivalent de u_n :

$$u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} - 1\right) = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \left(e^{2n\ln(1+\frac{1}{n}) - n\ln(1+\frac{2}{n})} - 1\right).$$

On a déjà que $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{2}{n})}$, et $n\ln(1+\frac{2}{n}) \sim 2 \to 2$, de sorte que par continuité de l'exponentielle :

$$\lim \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2.$$

D'autre part :

$$2n\ln(1+\frac{1}{n}) - n\ln(1+\frac{2}{n}) = 2n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - n\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \to 0.$$

Et donc, à l'aide de l'équivalent usuel $e^x - 1 \underset{x\to 0}{x}$,

$$e^{2n\ln(1+\frac{1}{n}) - n\ln(1+\frac{2}{n})} - 1 \sim 2n\ln(1+\frac{1}{n}) - n\ln(1+\frac{2}{n}) \sim \frac{1}{n}.$$

On en déduit que :

$$u_n \sim \frac{e^2}{n}.$$

Intégrales

Exercice 23.23 (★)

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{8k^3+n^3} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}.$$

Commençons par un rappel.

Rappels. Sommes de Riemann.

On pensera à une somme de Riemann lorsqu'on cherche la limite d'une suite (u_n) qui est une somme finie de n termes et que le terme général de cette somme dépend également de n. On procèdera alors ainsi :

- commencer par mettre $\dfrac{1}{n}$ en facteur, faire apparaitre le terme $\frac{k}{n}$ dans l'expression et identifier une fonction f **continue** sur $[0,1]$ satisfaisant $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (pour les sommes de Riemann à gauche) ou $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (pour les sommes de Riemann à droite).
- Par le théorème des sommes de Riemann, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,dt$.

On appliquer cette méthodes aux sommes considérées.

- On a pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k}{n}+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \in [0,1] \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ est continue. Par le théorème des sommes de Riemann (à droite), on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \ln(2).$$

- On a pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3+n^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{8\left(\frac{k}{n}\right)^3+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \in [0,1] \mapsto \dfrac{x^2}{8x^3+1}$ est continue. Par le théorème des sommes de Riemann, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3+n^3} = \frac{1}{24}\int_0^1 \frac{24t^2}{8t^3+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{24}\ln(8t^3+1)\right]_0^1 = \frac{\ln(9)}{24} = \frac{\ln(3)}{12}.$$

- Posons $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n^2+k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{n}}$, et :

$$v_n = \ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ est une fonction continue sur $[0,1]$. Par le théorème des sommes de Riemann, la suite (v_n) converge vers l'intégrale :

$$I = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Faisons alors une intégration par parties :

$$\begin{array}{c|cc} + & \ln(1+t^2) & 1 \\ - & \dfrac{2t}{1+t^2} & t \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto \ln(1+t^2)$ et $t \mapsto t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, donc l'intégration par parties est licite. Et on a :

$$\begin{aligned} I &= \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln(2) - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(2) - 2 + 2\left[\arctan(t)\right]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Par continuité de la fonction exponentielle, la suite (u_n) converge donc vers $e^{\ln(2)-2+\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 23.24 (★★ - Intégrales de Wallis (Extrait Edhec 2013))

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.
2. (a) Calculer u_0 et u_1.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. (a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)u_{n+1}u_n = \dfrac{\pi}{2}$.
   (d) En déduire la valeur de u_{2n+1}.
4. (a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n}$.
   (b) En déduire, en utilisant les variations de (u_n), que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
   (c) Montrer enfin que l'on a $u_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

1. On effectue le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - u$ qui est affine donc licite. On a $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ et $u = \dfrac{\pi}{2} - t$ avec $u : \frac{\pi}{2} \to 0$ lorsque $t : 0 \to \frac{\pi}{2}$, de sorte que :
$$u_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u) \mathrm{d}u.$$
2. (a) On a $u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2}$ et $u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1}(t) - \sin^n(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(\sin(t) - 1)\,\mathrm{d}t \leq 0$$
   puisque pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin(t) \leq 1$, donc $\sin^n(t)(1 - \sin(t)) \leq 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin t$, on a $0 \leq \sin^n t$. Par positivité de l'intégrale, on obtient $u_n \geq 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Par l'absurde, supposons que $u_n = 0$. La fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ étant **continue** et **positive** sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, son intégrale est nulle si et seulement si cette fonction est nulle sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (par théorème de nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive). Ce qui est absurde puisqu'elle vaut 1 en $\dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, on a $u_n \neq 0$, et donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0), elle converge par le théorème de la limite monotone.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par parties.

$$\begin{array}{c|ccc} + & \sin^{n+1}(t) & & \sin(t) \\ & & \searrow & \\ - & (n+1)\cos(t)\sin^n(t) & \overset{\int}{\longleftarrow} & -\cos(t) \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin^{n+1} t$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times \sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)(n+1)(-\cos(t)\sin^n(t))\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)(1-\sin^2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)u_n - (n+1)u_{n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrons le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Init. Pour $n = 0$, on a $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et :

$$\frac{0!}{(2^0 \times 0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

D'où la propriété au rang $n = 0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété au rang n, et montrons là au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned} u_{2(n+2)} = u_{2n+2} &\overset{3.(a)}{=} \frac{2n+1}{2n+2}u_{2n} \\ &\overset{\text{HR}}{=} \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2}\frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(2(n+1))^2(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1} \times (n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

On conclut par principe de récurrence.

(c) Posons $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = (n+2)u_{n+1}u_{n+2} = (n+1)u_{n+1}u_n = v_n.$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à $v_0 = u_0 u_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$(2n+1)u_{2n+1}u_{2n} \overset{3.(a)}{=} \frac{\pi}{2} \quad \underset{u_{2n}\neq 0}{\Rightarrow} \quad u_{2n+1} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(2n+1)u_{2n}} = \frac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{u_{n+2}}{u_n} \overset{3.(a)}{=} \frac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
   (b) Comme (u_n) est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq u_n \quad \underset{u_n>0}{\Rightarrow} \quad \frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1.$$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n} = 1$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et vaut 1.

   (c) Le résultat de la question 4.(b) se réécrit $u_{n+1} \sim u_n$. En utilisant 3.(c), cela donne :
$$\frac{\pi}{2} = (n+1)u_{n+1}u_n \sim nu_n^2.$$
   En prenant la racine carré (possible avec les équivalents), on en déduit que :
$$\sqrt{n}u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 23.25 (★★)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+\ln(x)}\mathrm{d}x$;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$;
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t$;
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u-1}\mathrm{d}u$.

1. La fonction $f_1 : t \mapsto \ln(t)e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.

   En 0, on a :

   - $\ln(t)e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$;
   - $\ln(t) \leq 0$ pour tout $t \in]0,1]$;
   - $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de référence).

   Par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^1 f_1(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

   En $+\infty$, on a :

   - $t^2\ln(t)e^{-t} = \left(\frac{\ln(t)}{t}\right)(t^3e^{-t}) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées, de sorte que $\ln(t)e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$;
   - $\frac{1}{t^2} \geq 0$ pour tout $t \geq 1$;
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge en tant d'intégrale de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$ en $+\infty$.

Par théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. On peut donc conclure que $\int_0^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2. La fonction $f_2 : t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1[$, donc l'intégrale est généralisée en 0 et en 1.

   En 1, on a :

   - $\dfrac{1}{(1-t)\sqrt{t}} \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{1-t}$;
   - $\dfrac{1}{1-t} \geq 0$ pour tout $t \in]0,1[$;
   - $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ diverge en tant d'intégrale de Riemann en 1 d'exposant $\alpha = 1 \not< 1$.

   Par théorème de comparaison, l'intégrale $\int_{1/2}^1 f_2(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, et il en est donc de même de $\int_0^1 f_2(t)\,\mathrm{d}t$.

3. La fonction $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x+\ln(x)}$ est continue sur $[1,+\infty[$, donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$. On a :

   - $\dfrac{1}{x+\ln(x)} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{1+\frac{\ln(x)}{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ par croissances comparées ;
   - $\dfrac{1}{x} \geq 0$ pour tout $x \geq 1$;
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge comme intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $\alpha = 1 \not> 1$.

   Par théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} f_3(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

4. La fonction $f_4 : t \mapsto \sin(t)\sin(1/t^2)$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc l'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.

   En 0, on a :

   - $0 \leq \left|\sin(t)\sin(1/t^2)\right| \leq 1$;
   - $\displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}t$ converge.

   Par théorème de comparaison, $\int_0^1 f_4(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.

   En $+\infty$, on a :

   - $0 \leq \left|\sin(t)\sin(1/t^2)\right| \leq \left|\sin(1/t^2)\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$;
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $2 > 1$.

Par théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} f_4(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.

On peut donc conclure que $\int_0^{+\infty} f_4(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

5. La fonction $f_5 : t \mapsto \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est continue sur $]0, 1]$, donc l'intégrale est généralisée en 0. On a :

$$e^{-at} - e^{-bt} = (1 + (-at) + o(t)) - (1 + (-bt) + o(t) = (b - a)t + o(t),$$

d'où :

$$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = (b - a) + o(1) \to (b - a).$$

La fonction f_5 est donc prolongeable par continuité en 0, et l'intégrale $\int_0^1 f_5(t)\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0, donc convergente.

6. La fonction $f_6 : u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc l'intégrale est généralisée en 0 et en $+\infty$.

En 0, on a :

- $\dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{u^{\alpha-1}}{u} = u^{\alpha-2}$;
- $u^{\alpha-2} \geq 0$ pour tout $u \in]0, 1]$;
- $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}u}{u^{2-\alpha}}$ converge si et seulement si $2 - \alpha < 1 \Leftrightarrow 1 < \alpha$ en tant qu'intégrale de Riemann.

Par théorème de comparaison, $\int_0^1 f_6(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

En $+\infty$:

- $\dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1} \underset{u\to +\infty}{\sim} \dfrac{u^{\alpha-1}}{e^u} = u^{\alpha-1}e^{-u} = o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ par croissance comparées ;
- $\dfrac{1}{u^2} \geq 0$ pour tout $u \geq 1$;
- $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann d'exposant $2 > 1$.

Par théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} f_6(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On peut donc conclure que $\int_0^{+\infty} f_6(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 23.26 (★)
Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \geq 1,\ u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2 + n}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout $n \geq 1$, $|u_n| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + n}$.
2. En déduire que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

1. Soit $n \geq 1$. La fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2+n}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$.

   En $+\infty$, on a :

   - $0 \leq |f_n(t)| \leq \dfrac{1}{t^2+n^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$ pour tout $t \geq 0$;
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $2 > 1$.

   Par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge. Ainsi u_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale, on a pour tout $n \geq 1$:

$$|u_n| \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t^2+n}\right| \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+n}\,\mathrm{d}t.$$

2. Commençons par un rappel.

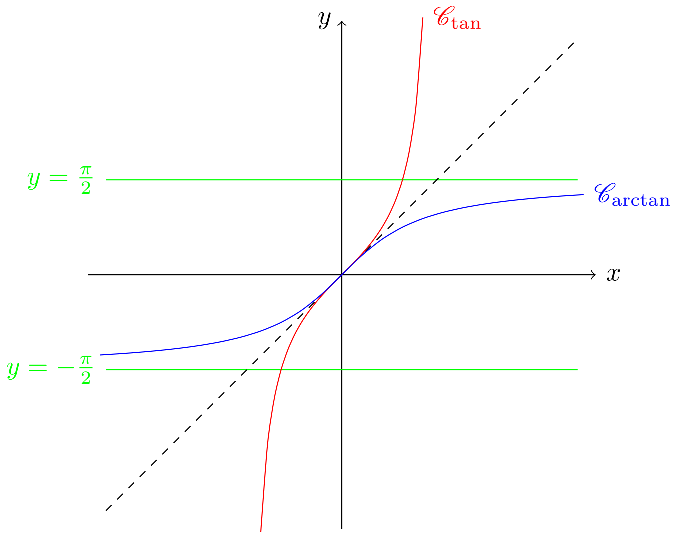
Rappel. Fonction arctangente.

La fonction arctangente est définie comme étant la bijection réciproque de la fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, elle est impaire, de classe $\mathscr{C}^\infty$, et satisfait en particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

En voici le graphe (obtenu à partir de celui de tangente par symétrie par rapport à la première bissectrice du plan) :



Son principal intérêt pour nous réside dans l'obtention de primitives :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \arctan(t) + c.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right) + c. \qquad (a > 0)$$

Soit $A > 0$, on a :

$$\int_0^A \frac{1}{t^2+n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]_0^A = \frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\left(\frac{A}{\sqrt{n}}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2\sqrt{n}}.$$

On obtient donc avec la question précédente que pour tout $n \geq 1$:

$$|u_n| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{n}}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2\sqrt{n}} = 0$, on obtient par le théorème des gendarmes que $\lim u_n$ existe et vaut 0.

Exercice 23.27 (★★)

1. (a) Montrer que pour tout $k \geq 2$, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$

(b) En déduire que pour tout $n \geq 1$: $\quad \dfrac{1}{n+1} \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$.

(c) En déduire que : $\quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2. En procédant de même, déterminer un équivalent simple quand n croît vers l'infini de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

1. (a) Soit $k \geq 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant décroissante sur $[k, k+1]$, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k^2} = \frac{1}{k^2}.$$

D'où la première inégalité. On procède de même pour l'autre inégalité.

(b) Soient $1 \leq n \leq N$. Sommons les inégalités précédentes pour $k = n+1, \ldots, N$:

$$\sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Ce qui donne par relation de Chasles sur les intégrales :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Or, $\displaystyle\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_{n+1}^{N+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1}$, et de même $\displaystyle\int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$. D'où :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

Passons à la limite lorsque $N \to +\infty$ dans ces inégalités (tous les termes convergent, notamment celui du milieu qui est le reste d'une série de Riemann d'exposant 2 et donc convergente) :

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}.$$

(c) Ce dernier encadrement va nous permettre d'obtenir l'équivalent voulu. Pour cela, multiplions par $n > 0$:

$$\frac{n}{n+1} \leq n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, par théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ existe et vaut 1. Autrement dit :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

2. On va procéder de même, en utilisant cette fois la croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$.

   Soit $k \geq 1$. Par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[k, k+1]$, on a l'inégalité :
$$\forall t \in [k, k+1], \quad \sqrt{k} \leq \sqrt{t}.$$
   D'où, par croissance de l'intégrale :
$$\sqrt{k} = \int_k^{k+1} \sqrt{k}\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$
   On montre de même que $\int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{k}$. D'où l'encadrement :
$$\int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$
   Soit $n \geq 1$. Sommons ces inégalités pour $k = 1, \ldots, n$:
$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$
   D'où par relation de Chasles :
$$\int_0^n \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t.$$
   Or, $\int_0^n \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^n = \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$, et de même $\int_1^{n+1} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$. On obtient donc l'encadrement suivant :
$$\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}.$$
   Divisons tout par $\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} > 0$:
$$1 \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{\frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
   Puisque $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = 1$, on obtient par théorème des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}}$ existe et vaut 1. En d'autres termes :
$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}.$$

Remarque. Nous avons fait ici ce qu'on appelle couramment une comparaison série/intégrale. Cela permet de déterminer la nature d'une série et d'obtenir un équivalent de sa somme partielle (quand la série diverge) ou de son reste partiel (lorsqu'elle converge), en se ramenant à une intégrale pour laquelle on a bien plus d'outils (IPP, changements de variables, calcul de primitive). Cette démarche est courante dans les sujets de concours. Nous l'avons déjà rencontré à plusieurs reprises durant l'année, par exemple dans l'exercice 2.14 où nous avions montré que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

Exercice 23.28 (★★ - Extrait de EML 2004)

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t$ convergent.

2. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} \mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} \mathrm{d}t = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} \mathrm{d}u.$$

3. En déduire que la fonction $f : x \in]0, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, \mathrm{d}t$ est dérivable et calculer sa dérivée.

1. Fixons $A > 0$. On effectue une intégration par parties sur le **segment** $[1, A]$:

$$\begin{array}{c|ccc} + & \frac{1}{t} & & \sin(t) \\ & & \searrow & \\ & & \int & \\ - & -\frac{1}{t^2} & \longleftarrow & -\cos(t) \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, A]$. On obtient par intégration par parties :

$$\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t = \cos(1) - \frac{\cos(A)}{A} - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$$

Étudions la convergence de $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$. On a :

- $0 \leq \left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$;
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann d'exposant $2 > 1$.

Par théorème de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge.

D'autre part, on a :

$$0 \leq \left|\frac{\cos(A)}{A}\right| \leq \frac{1}{A}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A} = 0$, on obtient par théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\cos(A)}{A} = 0$.

Ainsi, la limite $\lim_{A\to+\infty} \cos(1) - \dfrac{\cos(A)}{A} - \displaystyle\int_1^A \dfrac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Donc $\lim_{A\to+\infty} \displaystyle\int_1^A \dfrac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ existe également est est finie, de sorte que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

On montre de même que $\displaystyle\int_1^{A} \dfrac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. On se ramène à l'intégrale précédente par changement de variables $u = t + x$ qui est affine donc licite. Notons qu'alors $t = u - x$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ et que $u : x \to +\infty$ lorsque $t : 0 \to +\infty$. Par théorème de changement de variables, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\sin(u-x)}{u}\mathrm{d}u$ sont de même nature. En utilisant les formules de trigonométries, on a :

$$\frac{\sin(u-x)}{u} = \cos(x)\frac{\sin(u)}{u} - \sin(x)\frac{\cos(u)}{u}.$$

Or d'après la question précédente, les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent (elles convergent clairement sur le segment $[1, x]$ (ou $[x, 1]$ puisque les fonctions intégrées sont continues). Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{\sin(u-x)}{u}\mathrm{d}u$ converge et vaut :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\mathrm{d}u = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u.$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t$ converge et vaut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u.$$

3. Commençons par quelques rappels et exemples.

> **Rappel. Théorème fondamental de l'analyse (Chapitre 8 - Théorème 2).**
> Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I, et soit $a \in I$. Alors l'application
>
> $$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
>
> est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et c'est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

Exemples.

- La fonction $f : t \mapsto \cos(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \cos(x).$$

- La fonction $f : t \mapsto \sin(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \sin(t)\,\mathrm{d}t = -\displaystyle\int_1^x \sin(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = -\sin(x).$$

- La fonction $f : t \mapsto e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = f(x) = e^x.$$
- La fonction $f : t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $F : x \mapsto \int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = -f(x) = -e^{-x}.$$
- Considérons une fonction f continue sur I, et u et v des fonctions $\mathscr{C}^1$ sur J à valeurs dans I. Alors la fonction $G : x \in J \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a :
$$G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$
En effet, si F est une primitive de f sur I, qui existe bien et est $\mathscr{C}^1$ sur I car f est continue, alors on a :
$$G(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$
G est donc bien $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$, et on a bien pour tout $x \in J$:
$$G'(x) = v'(x)F'(v(x)) - u'(x)F'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$
Ainsi pour $f : t \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{t}$ qui est continue, notons F une primitive de f, de classe $\mathscr{C}^1$ donc. La fonction $G : x \in]0, +\infty[\mapsto \int_{x}^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(2x) - F(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :
$$\forall x > 0, \quad G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{2}{2x} - \frac{1}{x} = 0.$$
G est donc constante, ce qu'on aurait pu constater par un calcul direct ($G(x) = \ln(2)$ pour tout $x > 0$).

On peut réécrire la formule précédente sous la forme (à l'aide de la relation de Chasles) :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t = \cos x\left(\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u - \int_1^x \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right) - \sin x\left(\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u - \int_1^x \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u\right).$$
Les fonctions $x \mapsto \int_1^x \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$ et $x \mapsto \int_1^x \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ par le théorème fondamental de l'intégration (les fonctions intégrées étant continues). Par produit de fonctions $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et on a :
$$\begin{aligned} f'(x) &= (-\sin(x))\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u + \cos(x)\left(-\frac{\sin x}{x}\right) \\ &\quad - \cos(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u - \sin(x)\left(-\frac{\cos x}{x}\right) \\ &= -\sin(x)\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u - \cos(x)\int_x^{+\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Exercice 23.29 (★)

1. Étudier la nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$.
2. En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, montrer que $I = 0$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi\ln(a)}{2a}.$$

Exercice 23.30 (★★ - Extrait de EML 2006)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2}I_n$.
3. Montrer que
$$I_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi} \text{ si } n = 2p \text{ est pair} \end{cases}$$
4. En utilisant le changement de variables $x = \sqrt{t}$, déterminer la valeur de $\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de la parité de n (paire si n pair et impaire si n impaire). Donc I_n est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Cette intégrale est généralisée en $+\infty$. On a :
   - $t^2 \times t^n e^{-t^2} \underset{u=t^2}{=} u^{1+\frac{n}{2}}e^{-u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, de sorte que $t^n e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$;
   - $\dfrac{1}{t^2} > 0$ pour tout $t > 0$;
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann d'exposant $2 > 1$.

   Par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, et il en est donc de même de I_n. Notons de plus que quand n est impair, on a $I_n = 0$.
2. Soient $A < B$. On effectue une intégration par parties sur le **segment** $[A, B]$:
$$\begin{array}{c|ccc} + & e^{-t^2} & & t^n \\ & & \searrow & \\ - & -2te^{-t^2} & \overset{\int}{\leftarrow} & \dfrac{t^{n+1}}{n+1} \end{array}$$
   Les fonctions $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. Par intégration par parties, on obtient donc :
$$\begin{aligned}\int_A^B t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}e^{-t^2}\right]_A^B + \frac{2}{n+1}\int_A^B t^{n+2}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{B^{n+1}}{n+1}e^{-B^2} - \frac{A^{n+1}}{n+1}e^{-A^2} + \frac{2}{n+1}\int_A^B t^{n+2}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or l'intégrale $\int_A^{+\infty} t^{n+2}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (question précédente) et $\lim_{B\to+\infty} \frac{B^{n+1}}{n+1}e^{-B^2}$ par croissances comparées. D'où lorsque $B \to +\infty$ (tout converge) :

$$\int_A^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{A^{n+1}}{n+1}e^{-A^2} + \frac{2}{n+1}\int_A^{+\infty} t^{n+2}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

De même lorsque $A \to -\infty$ (en vérifiant que tout converge aussi) :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{n+1}I_{n+2}$$

D'où l'égalité voulue.

3. On a déjà montré le cas n impair. Montrons le cas où n est pair par récurrence. Plus précisément, montrons que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$.

Init. Pour $p = 0$, on a (en reconnaissant une intégrale de Gauss) :

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi} = \frac{0!}{2^0 0!}\sqrt{\pi}.$$

Hér. Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang p, c'est-à-dire que :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} I_{2(p+1)} = I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2}I_{2p} = \frac{2p+1}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2p+2)(2p+1)}{2(2p+2)}\frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi} = \frac{(2p+2)!}{2^{2(p+1)}(p+1)!}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $p+1$.

On conclut par principe de récurrence.

4. Commençons par des rappels sur la fonction Γ.

Rappel. La fonction Gamma.

La fonction Γ d'Euler est définie pour tout $\nu > 0$ par :

$$\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Elle satisfait :

- $\forall \nu \in]0, +\infty[$, $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$;
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Et sur le théorème de changement de variables.

Rappel. Changement de variables dans une intégrale généralisée.
Soit f une fonction continue sur $]\alpha,\beta[$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. On considère une fonction $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$.

Hypothèses :
- φ est **de classe** $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$,
- φ est **strictement monotone** sur $]a,b[$,
- $\varphi(]a,b[) =]\alpha,\beta[$.

Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_{\lim_{t\to a^+}\varphi(t)}^{\lim_{t\to b^-}\varphi(t)} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence sont égales.

Soit $p \in \mathbb{N}$. On a donc :
$$\Gamma(p+\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{p-\frac{1}{2}}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
Effectuons le changement de variables $x = \sqrt{t}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est **de classe** $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty$ et **strictement monotone** sur cet intervalle. Donc le changement de variables est licite. De plus on a $t = x^2$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ et $x : 0 \to +\infty$ lorsque $t : 0 \to +\infty$. Comme $\Gamma(p+\frac{1}{2})$ converge, le théorème de changement de variables permet d'affirmer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2(p-\frac{1}{2})}e^{-x^2}2x\,\mathrm{d}x$ converge et qu'on a :
$$\Gamma(p+\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} x^{2p}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \underset{f_n \text{ impaire}}{=} I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}.$$

Exercice 23.31 (★★★ - Calcul de l'intégrale de Gauss)

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est convergente. On note A sa valeur.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
   (a) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :
   $$\forall h \in [-1,1],\ \forall t \in [0,1],\ |e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)| \leq Mh^2.$$
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \in [-1,1]$ non nul, on a :
   $$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\right| \leq M|h|f(x).$$
   (c) Montrer alors que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. On pose $g(x) = f(x^2) + \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq f(x) \leq \dfrac{\pi}{4}e^{-x}$, et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
5. En déduire la valeur de A.

1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$. En $+\infty$, on a :

   - $t^2 e^{-t^2} \underset{u=t^2}{=} ue^{-u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparées, de sorte que $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$;
   - $\frac{1}{t^2} \geq 0$ pour tout $t > 0$;
   - $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $2 > 1$.

   Par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. (a) Commençons par un rappel.

   > **Rappel. Inégalité de Taylor-Lagrange.**
   >
   > Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I. On suppose que $|f^{(n+1)}|$ est majorée par un réel M sur I.
   > Alors pour tout $(a, x) \in I^2$, on a :
   > $$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

   Essayons de voir comment l'appliquer ici. Visiblement, la fonction en jeu est $(h, t) \mapsto e^{-h(1+t^2)}$. Il y a deux variables h et t, mais dans le résultat proposé, c'est sur la variable h qu'on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange, puisque le polynôme de Taylor fait apparaitre les puissances successives de $h = (h-0)$, et il apparait aussi que $a = 0$. Notons de plus que la formule de Taylor-Lagrange semble être appliquée à l'ordre $n = 1$.

   On fixe $t \in [0, 1]$. Considérons donc la fonction $g : h \in [-1, 1] \mapsto e^{-h(1+t^2)}$ qui est de classe $\mathscr{C}^2$ comme composée de fonctions qui le sont. On a pour tout $h \in [-1, 1]$:
   $$g'(h) = -(1+t^2)e^{-h(1+t^2)} \quad \text{et} \quad g''(h) = (1+t^2)^2 e^{-h(1+t^2)},$$
   de sorte que :
   $$g(0) = 1, \quad g'(0) = -(1+t^2) \quad \text{et } \forall h \in [-1, 1],\ |g''(h)| \leq (1+t^2)^2 e^2 \leq 4e^2.$$
   En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à g à l'ordre $n = 2$ entre 0 et h, on obtient donc :
   $$\left| g(h) - g(0) - \frac{g'(0)}{1!}(h-0)^1 \right| \leq \frac{4e^2}{2!}|h|^2,$$
   soit encore :
   $$\left| e^{-h(1+t^2)} - 1 + (1+t^2)h \right| \leq 2e^2 h^2.$$
   D'où le résultat voulu avec $M = 2e^2$.

(b) Fixons à présent $x \in \mathbb{R}$ et $h \in [-1,1]$ avec $h \neq 0$. Pour $t \in [0,1]$, on multiplie l'expression précédente par $\dfrac{e^{-x(1+t^2)}}{|h|(1+t^2)}$, on obtient :

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{e^{-(x+h)(1+t^2)}}{1+t^2} - \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right) + e^{-x(1+t^2)}\right| \leq \frac{Mh^2 e^{-x(1+t^2)}}{|h|(1+t^2)}.$$

On obtient par croissance de l'intégrale (tout converge, puisqu'on a ici des intégrales de fonctions continues sur des segments) :

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{h}\left(\frac{e^{-(x+h)(1+t^2)}}{1+t^2} - \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right) + e^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\right| \underset{\text{inég. triang.}}{\leq} \int_0^1 \left|\frac{1}{h}\left(\frac{e^{-(x+h)(1+t^2)}}{1+t^2} - \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right) + e^{-x(1+t^2)}\right| \mathrm{d}t$$
$$\leq M|h| \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = M|h|f(x)$$

D'où par linéarité de l'intégrale :

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\right| \leq M|h|f(x).$$

(c) Comme $\lim\limits_{h\to 0} M|h|f(x) = 0$, on obtient par théorème des gendarmes que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe et vaut $-\displaystyle\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}$. Ainsi f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}.$$

3. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que primitive de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ (par le théorème fondamental de l'analyse). g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g'(x) = 2xf'(x^2) + 2e^{-x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right).$$
Pour $x = 0$, on a $g'(0) = 0$. Pour $x \neq 0$, on procède au changement de variables $t = xu$ dans la deuxième intégrale. Ce changement est affine donc licite (l'intégrale étant sur un segment, il est de toute façon licite), et on a $\mathrm{d}t = x\mathrm{d}u$ et $u : 0 \to 1$ lorsque $t : 0 \to x$. On obtient donc :
$$\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-x^2u^2}x\mathrm{d}u,$$
et donc :
$$g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t + 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2u^2}\,\mathrm{d}u = 0.$$
Donc g est bien constante sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout $x \geq 0$ et $t \in [0,1]$, on a :
$$0 \leq \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-x}}{1+t^2}.$$
Par croissance de l'intégrale, on obtient :
$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = e^{-x}\left[\arctan(t)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}e^{-x}.$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{4}e^{-x} = 0$, la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut 0 par le théorème des gendarmes.

5. g étant constante, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = g(0) = f(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

De plus, on obtient en passant à la limite quand $x \to +\infty$ dans l'expression définissant g (tout converge d'après les questions 1. et 4.) :

$$0 + A^2 = \frac{\pi}{4} \quad \underset{A\geq 0}{\Rightarrow} \quad A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 23.32 (★★)

Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$, et soit f la fonction définie sur U par :

$$f(x,y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 2\ln(x-y).$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
2. Calculer les dérivées partielles de f, et en déduire que f admet un unique point critique a que l'on déterminera.
3. Déterminer la matrice hessienne de f en tout point $(x,y) \in U$.

   Montrer que 2 est valeur propre, et déterminer son autre valeur propre.

   En déduire la nature local de a.
4. f admet-elle un minimum global en a ?

1. Notons que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x-y > 0\}$ est bien un ouvert car défini par une fonction continue $\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x-y$ (car polynomiale) et une inégalité stricte.

   φ est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ sur U. Par composition par la fonction ln de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, $(x,y) \mapsto \ln(x-y)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. Par somme enfin avec une fonction polynomiale donc $\mathscr{C}^2$, f est bien $\mathscr{C}^2$ sur U.

2. Pour tout $(x,y) \in U$, on a :

$$\partial_1 f(x,y) = 2(x+1) - 2\frac{1}{x-y} \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = 2(y-1) - 2\frac{-1}{x-y}.$$

   Pour obtenir les points critiques sur U, on résout :

$$\begin{cases} x+1 = \dfrac{1}{x-y} \\ y-1 = \dfrac{-1}{x-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \dfrac{1}{x-y} \\ y-1 = -x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \dfrac{1}{2x} \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2x-1 = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y = -\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y = -\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Une seule de ces solutions appartient à U. On en déduit donc que f admet un unique point critique sur U qui est $a = \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. On calcule les dérivées partielles secondes pour tout $(x, y) \in U$:

$$\partial_{1,1} f(x,y) = 2 + \frac{2}{(x-y)^2}, \quad \partial_{2,2} f(x,y) = 2 + \frac{2}{(x-y)^2},$$

$$\partial_{1,2} f(x,y) = \partial_{2,1} f(x,y) = -\frac{2}{(x-y)^2}.$$

La hessienne de f en $(x, y) \in U$ est donc :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \dfrac{2}{(x-y)^2} & -\dfrac{2}{(x-y)^2} \\ -\dfrac{2}{(x-y)^2} & 2 + \dfrac{2}{(x-y)^2} \end{pmatrix} =: A.$$

2 est effectivement valeur propre de cette matrice car :

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{(x-y)^2} & -\dfrac{2}{(x-y)^2} \\ -\dfrac{2}{(x-y)^2} & \dfrac{2}{(x-y)^2} \end{pmatrix}$$

est de rang 1. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable et on a (en notant λ son autre valeur propre) :

$$2 + \lambda = \mathrm{Tr}(A) = 4 + \frac{4}{(x-y)^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2 + \frac{4}{(x-y)^2}.$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. Ceci étant en particulier vrai lorsque $(x, y) = a$, on en déduit que f admet un minimum local en a.

4. (a) On a $g_x(0) = f(a)$ et $g_x(1) = f(a+h) = f(a + (x-a)) = f(x)$.

   (b) Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$, on sait par le cours que g_x est aussi de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, 1]$, et on a pour tout $t \in [0, 1]$:

$$g_x'(t) = \langle \nabla f(a+th), h\rangle, \quad g_x''(t) = q_{a+th}(h),$$

   ou q_{a+th} est la forme quadratique associée à la matrice $\nabla^2 f(a+th)$. Or, on l'a vu à la question précédentes, les valeurs propres de cette matrice sont positives. On obtient donc que pour tout $t \in [0, 1]$:

$$g_x''(t) = q_{a+th}(h) \geq 0.$$

   Donc g_x est bien une fonction convexe.

   (c) On a $g_x(0) = 0$ et $g_x'(0) = \langle \underbrace{\nabla f(a)}_{=0}, h\rangle = 0$ car a est un point critique de f. Ainsi la tangente de g_x en $t = 0$ a pour équation :

$$y = g_x'(0)(t-0) + g_x(0) = f(a).$$

> Comme de plus g_x est convexe, sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes, on obtient donc que pour tout $t \in [0,1]$:
>
> $$g_x(t) \leq f(a) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{t=1} \quad f(x) \leq f(a).$$
>
> Ceci étant vrai pour tout $x \in U$, g_x admet bien un minimum global en a sur U.

Exercice 23.33 (★★)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = 3x^2 - 2y^2 - z^2$.
Déterminer les éventuels extremums locaux de f sous les contraintes suivantes :

1. $x - y + z = 7$;
2. $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$.
