TD23

Révisions d'analyse

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 23.1 (★★ - Prolongement $\mathscr{C}^1$)

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $[0, \pi/2]$.
2. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$ et calculer sa dérivée.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et préciser $f'(0)$.

Exercice 23.2 (★★ - Inégalités de convexité)

1. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a : $1 - \dfrac{2x}{\pi} \leq \cos(x) \leq 1$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1]$, $1 - t \leq 1 - t^n \leq n(1-t)$.
3. Montrer que pour tout $p, q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et pour tout $x, y > 0$: $x^{1/p} y^{1/q} \leq \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}$.
4. Montrer que pour tout $x_1, \ldots, x_n > 0$, on a : $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots \frac{1}{x_n}} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Exercice 23.3 (★ - Bijection réciproque de la fonction sinus)

1. Montrer que la fonction $f(x) = \sin(x)$ réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle I à préciser.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$, et que $\forall x \in]-1,1[$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 23.4 (★★)

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $n \geq 1$ et admettant n racines distinctes. Montrer que P' admet $n-1$ racines réelles.

Exercice 23.5 (★★★)

Considérons le polynôme $P(x) = (x^2-1)^n$. Montrer que sa dérivée n-ème possède exactement n racines distinctes toutes dans $]-1,1[$.

Exercice 23.6 (★ - Inégalité des accroissements finis)

1. Montrer que pour tout $x, y \in [1, +\infty[$, on a $|\ln(x) - \ln(y)| \leq |x-y|$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Exercice 23.7 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f la fonction définie par $f(x) = x^{n-1}\ln(x)$. Calculer la dérivée n-ième de f.

Exercice 23.8 (★★★ - QSP ESCP 2016)

On dit qu'une application f de E dans E admet x pour point fixe si $f(x) = x$.

Soit f et g deux applications définies sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$, continues et telles que $f \circ g = g \circ f$ et $f \leq g$.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe x_0 et qu'alors $g(x_0)$ est encore point fixe pour f.
2. En utilisant une suite définie à partir de x_0, montrer que f et g ont un point fixe commun.

Exercice 23.9 (★★★★)

Soient $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ deux fonctions continues vérifiant $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 23.10 (★★★★ - Oral ESCP 2014)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction deux fois dérivable et α un réel strictement positif. On suppose que f est majorée et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f''(t) \geq \alpha^2 f(t)$.

1. Montrer que f est convexe.
2. Montrer que f' est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$.
3. (a) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.
   (b) Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
   (c) Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.
4. (a) Montrer que la fonction $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante.
   (b) En déduire le signe de $\alpha f + f'$.
5. Montrer que pour tout réel positif t, on a : $f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}$.

Formules de Taylor, développements limités

Exercice 23.11 (★)

Déterminer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+x}$; | $f_2 : x \mapsto e^x\sqrt{1-x}$; | $f_3 : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$.

Exercice 23.12 (★★)

Déterminer, en utilisant des développements limités, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{1/2} - x - \cos(x)}{x^3}$;
4. $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt[n]{e} - \frac{n+1}{n}\right)$.

Exercice 23.13 (★)

Montrer, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x.$$

Exercice 23.14 (★★)

1. Soit Φ la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $\Phi(t) = \ln(1+t)$. Montrer que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $t > -1$,
$$\Phi^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}.$$
2. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left|\ln(1+t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} t^k\right| \leq \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$
3. En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge et donner la valeur de sa somme.

Suites

Exercice 23.15 (★★ - Une suite implicite)

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que, pour chaque entier $n \geq 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$. On note x_n cette racine.
2. Calculer x_2.
3. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[0,1]$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
4. Déterminer la monotonie de la suite (x_n) et montrer sa convergence.
5. Justifier que $\forall n \geq 2$, $0 \leq x_n \leq \dfrac{2}{n}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n$.
6. Déterminer la limite de x_n^n, puis montrer que $x_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 23.16 (★★★ - Une autre suite implicite - QSP ESCP 2006)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $y_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln(y_n) + y_n = \dfrac{1}{n}$.
Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et si on note ℓ sa limite, déterminer un équivalent de $y_n - \ell$.

Exercice 23.17 (★★ - Étude d'une suite récurrente)

Soit $a \geq 0$, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$.

1. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, comparer $\ln(1+x)$ et x.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et à termes positifs.
3. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Déterminer la limite de la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 23.18 (★★★ - QSP ESCP 2017)

On considère deux suites réelles u et v définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 strictement positifs et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}(u_{n+1} - u_n)$.
2. Montrer que les suites u et v divergent vers $+\infty$.

Exercice 23.19 (★★★ - QSP HEC 2012)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$.

1. Montrer que si $\alpha = 2$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est divergente.
2. Montrer que si $0 \leq \alpha < 1$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 1.

Séries

Exercice 23.20 (★)

Nature des séries suivantes :

1. $\sum \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$
2. $\sum ne^{-n}$
3. $\sum \dfrac{n^2+1}{3n+n^3}$
4. $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$
5. $\sum \dfrac{\sin(n)}{2n^2}$
6. $\sum \left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n+1}\right)$

Exercice 23.21 (★)

Nature et calcul des séries suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{3^{2n+1}}{n!}$	2. $\sum_{n\geq 0} n\frac{4^n}{3^{2n+1}}$	3. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{3^n}$	4. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(n+1)!}$

Exercice 23.22 (★★)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.
2. On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

   Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 23.23 (★★ - Suites de Fibonacci)

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite déterminer par $F_0 = F_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Écrire un programme qui demande n à l'utilisateur, et qui renvoie la valeur de F_n.
2. Montrer qu'il existe des réels a, b, r_1, r_2, que l'on déterminera, vérifiant $r_2 = -\frac{1}{r_1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = ar_1^n + br_2^n$.
3. Donner un équivalent de F_n lorsque $n \to +\infty$.
4. En déduire que la série de terme général $\frac{F_n}{2^n}$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 23.24 (★★)

1. (a) Montrer que : $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$.

   (b) En déduire que : $\left|\arctan x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

   (c) En déduire une CNS de convergence de la série $\sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ et calculer sa somme.
2. (a) Montrer que $\left|\pi - 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3}$.

   (b) Écrire une fonction d'en-tête `def approx(epsilon)` qui prend en entrée un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie une valeur approchée de π à ε près.

Exercice 23.25 (★★ - Étude d'une série alternée)

1. Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $[1, +\infty[$.
2. Considérons la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$.

   (a) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\geq 2}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 2}$ convergent vers la même limite.

   (b) En déduire que la série de terme général $(-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$ converge.

3. Soit $v_n = n^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1$.
   (a) Montrer à l'aide d'un développement limité que $v_n = \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n} + \dfrac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\dfrac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$.
   (b) En déduire que la série $\sum v_n$ converge.

Exercice 23.26 (★★★ - Formule de Stirling (Extrait de EML 2012))
On note, pour tout entier $n \geq 1$, $A_n = \dfrac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.
On note, pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 2} a_n$ converge.
2. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.
3. En déduire que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et que sa limite ℓ est strictement positive.
4. Justifier que $n! \sim \dfrac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

Exercice 23.27 (★★★ - QSP ESCP 2008)
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$.

Exercice 23.28 (★★★ - QSP HEC 2015)
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente à termes strictement positifs et de limite nulle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{S_n}$.

1. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{k \geq 0} v_k$ en fonction de la nature de la série $\sum\limits_{k \geq 0} u_k$.
   Indication : dans le cas où $\sum\limits_{k \geq 0} u_k$ *diverge, on pourra commencer par étudier* $\sum\limits_{k \geq 0} \ln(1 + v_k)$.
2. Quel résultat obtient-on dans le cas où $u_n = \dfrac{1}{n}$?

Exercice 23.29 (★★★ - Oral ESCP 2019)
Pour tout $x > 0$, on pose : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, S(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{x+k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n}(x))_n$ et $(S_{2n+1}(x))_n$ sont adjacentes. On note $f(x)$ leur limite commune.
2. (a) Soit a un réel strictement positif. Montrer que :
   $$\forall (x, x_0) \in [a, +\infty[^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |S_n(x) - S_n(x_0)| \leq |x - x_0| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(a+k)^2}.$$
   (b) En déduire que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

4. Montrer que : $\forall x > 0,\ f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 23.30 (★★★ - Oral ESCP 2022)

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \cos(u_n).$$

1. (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n appartient à l'intervalle $[0, \pi/2]$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = \dfrac{\pi}{2} - u_n$.
   (a) Montrer que : $v_n - v_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   (b) En déduire la nature de la série de terme général v_n.

3. (a) Soit deux suites (a_n) et (b_n) à termes strictement positifs telles que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.
   On suppose que la série de terme général a_n est convergente. Montrer que l'on a :
   $$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$$
   (b) En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

Intégrales

Exercice 23.31 (★)

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{8k^3+n^3} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 23.32 (★★ - Intégrales de Wallis (Extrait Edhec 2013))

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.

2. (a) Calculer u_0 et u_1.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Établir que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

(c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)u_{n+1}u_n = \dfrac{\pi}{2}$.

(d) En déduire la valeur de u_{2n+1}.

4. (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n}$.

(b) En déduire, en utilisant les variations de (u_n), que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

(c) Montrer enfin que l'on a $u_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 23.33 (★★★ - QSP HEC 2007)

Donner un équivalent lorsque $x \to +\infty$ de : $\displaystyle\int_0^x |\sin(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exercice 23.34 (★★)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+\ln(x)}\mathrm{d}x$;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$;
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t$;
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u-1}\mathrm{d}u$.

Exercice 23.35 (★)

Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \geq 1,\ u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+n}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout $n \geq 1$, $|u_n| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+n}$.
2. En déduire que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

Exercice 23.36 (★★)

1. (a) Montrer que pour tout $k \geq 2$, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

(b) En déduire que pour tout $n \geq 1$: $\displaystyle\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$.

(c) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2. En procédant de même, déterminer un équivalent simple quand n croît vers l'infini de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Exercice 23.37 (★★ - Extrait de EML 2004)

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent.

2. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t$ converge, et que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u.$$
3. En déduire que la fonction $f : x \in]0,+\infty[\;\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t$ est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 23.38 (★)

1. Étudier la nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$.
2. En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, montrer que $I = 0$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi \ln(a)}{2a}.$$

Exercice 23.39 (★★ - Extrait de EML 2006)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.
3. Montrer que :
$$I_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi} \text{ si } n = 2p \text{ est pair} \end{cases}.$$
4. En utilisant le changement de variables $x = \sqrt{t}$, déterminer la valeur de $\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 23.40 (★★★ - Oral ESCP 2013)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+xe^t}\mathrm{d}t$ converge.

   On note f l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : pour tout $x > 0$,
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+xe^t}\mathrm{d}t.$$
2. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis un équivalent de $f(x)$ pour x au voisinage de $+\infty$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
4. (a) En effectuant le changement de variables $u = xe^t$ que l'on justifiera, montrer que :
$$f(x) = \ln(x)(\ln(x) - \ln(1+x)) + \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u.$$

(b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$. Retrouver ainsi le sens de variation de f.

Exercice 23.41 (★★★ - Calcul de l'intégrale de Gauss)

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est convergente. On note A sa valeur.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

   (a) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :
   $$\forall h \in [-1,1],\ \forall t \in [0,1],\ |e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)| \leq Mh^2.$$

   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \in [-1,1]$ non nul, on a :
   $$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\right| \leq M|h|f(x).$$

   (c) Montrer alors que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On pose $g(x) = f(x^2) + \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq f(x) \leq \dfrac{\pi}{4}e^{-x}$, et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

5. En déduire la valeur de A.

Exercice 23.42 (★★★★ - Oral HEC 2018)

1. (a) Question de cours : égalité et inégalité des accroissements finis.

   (b) Justifier, pour tout $x \leq 0$, l'inégalité : $|e^x - 1| \leq |x|$.

2. Justifer la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

3. On note f la fonction définie par : $\quad f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t$.

   (a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f et justifier que f est monotone.

   (b) Justifier, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, l'égalité :
   $$f(x) = \frac{x+2}{x+1}f(x+2).$$

   (c) i. Établir, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, l'inégalité :
   $$|f(x)-f(y)| \leq |x-y|\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\ln(\sin(t))|\,\mathrm{d}t.$$

   ii. Démontrer que f est continue.

iii. Trouver la limite et un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to -1^+$.

(d) i. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité :

$$f(n) \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\pi}{2} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

ii. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 23.43 (★★)

Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$, et soit f la fonction définie sur U par :

$$f(x,y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 2\ln(x-y).$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
2. Calculer les dérivées partielles de f, et en déduire que f admet un unique point critique a que l'on déterminera.
3. Déterminer la matrice hessienne de f en tout point $(x,y) \in U$.

   Montrer que 2 est valeur propre, et déterminer son autre valeur propre.

   En déduire la nature local de a.
4. f admet-elle un minimum global en a ?

Exercice 23.44 (★★★ - Oral ESCP 2013)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \exp\left(n+1-\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer le gradient de f, et en déduire que f possède un unique point critique $\hat{x}$.
3. Calculer la hessienne $\nabla^2 f(\hat{x})$ de f en ce point critique.
4. En déduire que f admet un minimum local en $\hat{x}$.
5. Ce minimum local est-il un minimum global ?

Exercice 23.45 (★★)

Soit $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq 4\}$ et soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par $f(x,y) = (2x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2}$.

1. Montrer que f possède sur $\mathscr{D}$ un minimum m et un maximum M.

2. Soit Ω l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 < 4\}$. Déterminer les points critiques de f et déterminer les valeurs de f en ces points critiques.
3. En déduire les valeurs de m et M.

Exercice 23.46 (★★)

Soit $\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2-1 \leq y \leq 1-x^2\}$, et soit $\mathscr{D}_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2-1 < y < 1-x^2\}$. Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par $f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est fermé, que $\mathscr{D}_0$ est ouvert, et que tous les deux sont bornés.
2. Justifier que f possède un maximum M et un minimum m.
3. Déterminer les points critiques de f sur $\mathscr{D}_0$.
4. Étudier les fonctions $x \mapsto f(x, x^2-1)$ et $x \mapsto f(x, 1-x^2)$, et en déduire les valeurs de m et M.

Exercice 23.47 (★★)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = 3x^2 - 2y^2 - z^2$.
Déterminer les éventuels extremums locaux de f sous les contraintes suivantes :

1. $x - y + z = 7$;
2. $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$.
