TD23

Révisions d'analyse

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 23.1 (★★ - Prolongement $\mathscr{C}^1$)

Soit f la fonction définie sur $[0,\pi/2]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $[0,\pi/2]$.
2. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi/2]$ et calculer sa dérivée.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$ et préciser $f'(0)$.

Exercice 23.2 (★ - Inégalités de convexité)

1. Montrer que pour tout $x \in [0,\pi/2]$, on a : $1 - \dfrac{2x}{\pi} \leq \cos(x) \leq 1$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0,1]$, $1 - t \leq 1 - t^n \leq n(1-t)$.
3. Montrer que pour tout $p, q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et pour tout $x, y > 0$: $x^{1/p}y^{1/q} \leq \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}$.
4. Montrer que pour tout $x_1, \dots, x_n > 0$, on a : $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots \frac{1}{x_n}} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Exercice 23.3 (★ - Bijection réciproque de la fonction sinus)

1. Montrer que la fonction $f(x) = \sin(x)$ réalise une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle I à préciser.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$, et que $\forall x \in]-1,1[$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 23.4 (★★)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geq 1$ et admettant n racines distinctes. Montrer que P' admet $n-1$ racines réelles.

Exercice 23.5 (★★★)

Considérons le polynôme $P(X) = (X^2-1)^n$. Montrer que sa dérivée n-ème possède exactement n racines distinctes toutes dans $]-1,1[$.

Exercice 23.6 (★ - Inégalité des accroissements finis)

1. Montrer que pour tout $x, y \in [1,+\infty[$, on a $|\ln(x) - \ln(y)| \leq |x - y|$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Exercice 23.7 (★★)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f la fonction définie par $f(x) = x^{n-1}\ln(x)$. Calculer la dérivée n-ième de f.

Exercice 23.8 (★★★★ - ESCP 2014)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction deux fois dérivable et α un réel strictement positif. On suppose que f est majorée et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f''(t) \geq \alpha^2 f(t)$.

1. Montrer que f est convexe.
2. Montrer que f' est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$.
3. (a) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.
   (b) Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
   (c) Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.
4. (a) Montrer que la fonction $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante.
   (b) En déduire le signe de $\alpha f + f'$.
5. Montrer que pour tout réel positif t, on a : $f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}$.

Formules de Taylor, développements limités

Exercice 23.9 (★)
Déterminer les développements limités à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+x}$; | $f_2 : x \mapsto e^x\sqrt{1-x}$; | $f_3 : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$.

Exercice 23.10 (★★)
Déterminer, en utilisant des développements limités, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{1/2} - x - \cos(x)}{x^3}$;
4. $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt[n]{e} - \frac{n+1}{n}\right)$.

Exercice 23.11 (★)
Montrer, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x.$$

Exercice 23.12 (★★)
1. Soit Φ la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $\Phi(t) = \ln(1+t)$. Montrer que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $t > -1$,

$$\Phi^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}.$$

2. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left|\ln(1+t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} t^k\right| \leq \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$
3. En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge et donner la valeur de sa somme.

Suites

Exercice 23.13 (★★ - Une suite implicite)

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que, pour chaque entier $n \geq 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$. On note x_n cette racine.
2. Calculer x_2.
3. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[0,1]$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
4. Déterminer la monotonie de la suite (x_n) et montrer sa convergence.
5. Justifier que $\forall n \geq 2,\ 0 \leq x_n \leq \frac{2}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
6. Déterminer la limite de x_n^n, puis montrer que $x_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 23.14 (★★ - Étude d'une suite récurrente)

Soit $a \geq 0$, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$.

1. Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, comparer $\ln(1+x)$ et x.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et à termes positifs.
3. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Déterminer la limite de la suite de terme général $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

Séries

Exercice 23.15 (★)

Nature des séries suivantes :

1. $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
2. $\sum ne^{-n}$
3. $\sum \frac{n^2+1}{3n+n^3}$
4. $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$
5. $\sum \frac{\sin(n)}{2n^2}$
6. $\sum \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$

Exercice 23.16 (★)

Nature et calcul des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3^{2n+1}}{n!}$ | 2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\frac{4^n}{3^{2n+1}}$ | 3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{3^n}$ | 4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(n+1)!}$

Exercice 23.17 (★★)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$.
2. On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

   Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 23.18 (★★ - Suites de Fibonacci)

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite déterminer par $F_0 = F_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Écrire un programme qui demande n à l'utilisateur, et qui renvoie la valeur de F_n.
2. Montrer qu'il existe des réels a, b, r_1, r_2, que l'on déterminera, vérifiant $r_2 = -\dfrac{1}{r_1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = ar_1^n + br_2^n$.
3. Donner un équivalent de F_n lorsque $n \to +\infty$.
4. En déduire que la série de terme général $\dfrac{F_n}{2^n}$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 23.19 (★★)

1. (a) Montrer que : $\displaystyle\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$.

   (b) En déduire que : $\displaystyle\left|\arctan x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

   (c) En déduire une CNS de convergence de la série $\sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ et calculer sa somme.
2. (a) Montrer que $\displaystyle\left|\pi - 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leq \frac{4}{2n+3}$.

   (b) Écrire une fonction d'en-tête `def approx(epsilon)` qui prend en entrée un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie une valeur approchée de π à ε près.

Exercice 23.20 (★★ - Étude d'une série alternée)

1. Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $[1, +\infty[$.

2. Considérons la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$.
   (a) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\geq 2}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 2}$ convergent vers la même limite.
   (b) En déduire que la série de terme général $(-1)^k \dfrac{\ln(k)}{k}$ converge.
3. Soit $v_n = n^{\frac{(-1)^n}{n}} - 1$.
   (a) Montrer à l'aide d'un développement limité que $v_n = \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n} + \dfrac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\dfrac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$.
   (b) En déduire que la série $\sum v_n$ converge.

Exercice 23.21 (★★★ - Formule de Stirling (Extrait de EML 2012))

On note, pour tout entier $n \geq 1$, $A_n = \dfrac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

On note, pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = -1 - \left(n - \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} a_n$ converge.
2. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que $a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1})$.
3. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et que sa limite ℓ est strictement positive.
4. Justifier que $n! \sim \dfrac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}$.

Exercice 23.22 (★★★ - QSP ESCP 2008)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{n}$.

Intégrales

Exercice 23.23 (★)

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{8k^3+n^3} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 23.24 (★★ - Intégrales de Wallis (Extrait Edhec 2013))

Pour tout entier naturel n, on pose : $\quad u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \mathrm{d}t.$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \mathrm{d}t$.
2. (a) Calculer u_0 et u_1.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)u_{n+1}u_n = \dfrac{\pi}{2}$.
   (d) En déduire la valeur de u_{2n+1}.
4. (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+2}}{u_n}$.
   (b) En déduire, en utilisant les variations de (u_n), que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
   (c) Montrer enfin que l'on a $u_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 23.25 (★★)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1-t)\sqrt{t}}\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x+\ln(x)}\mathrm{d}x$;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$;
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t$;
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u-1}\mathrm{d}u$.

Exercice 23.26 (★)

Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+n}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout $n \geq 1$, $|u_n| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+n}$.
2. En déduire que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

Exercice 23.27 (★★)

1. (a) Montrer que pour tout $k \geq 2$, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geq 1$: $\displaystyle\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$.
   (c) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
2. En procédant de même, déterminer un équivalent simple quand n croît vers l'infini de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Exercice 23.28 (★★ - Extrait de EML 2004)

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent.

2. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} \mathrm{d}t$ converge et on a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} \mathrm{d}t = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} \mathrm{d}u.$$
3. En déduire que la fonction $f : x \in]0,+\infty[\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} \mathrm{d}t$ est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 23.29 (★)

1. Étudier la nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1} \mathrm{d}t$.
2. En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, montrer que $I = 0$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2} \mathrm{d}t = \frac{\pi \ln(a)}{2a}.$$

Exercice 23.30 (★★ - Extrait de EML 2006)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} \mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.
3. Montrer que
$$I_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi} \text{ si } n = 2p \text{ est pair} \end{cases}$$
4. En utilisant le changement de variables $x = \sqrt{t}$, déterminer la valeur de $\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 23.31 (★★★ - Calcul de l'intégrale de Gauss)

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ est convergente. On note A sa valeur.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \mathrm{d}t$.
   (a) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :
   $$\forall h \in [-1,1],\ \forall t \in [0,1],\ |e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)| \leq Mh^2.$$
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \in [-1,1]$ non nul, on a :
   $$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)} \mathrm{d}t \right| \leq M|h| f(x).$$

(c) Montrer alors que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On pose $g(x) = f(x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t\right)^2$. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $0 \leq f(x) \leq \dfrac{\pi}{4} e^{-x}$, et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

5. En déduire la valeur de A.

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 23.32 (★★)

Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$, et soit f la fonction définie sur U par :

$$f(x, y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 2\ln(x-y).$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

2. Calculer les dérivées partielles de f, et en déduire que f admet un unique point critique a que l'on déterminera.

3. Déterminer la matrice hessienne de f en tout point $(x, y) \in U$.

   Montrer que 2 est valeur propre, et déterminer son autre valeur propre.

   En déduire la nature local de a.

4. f admet-elle un minimum global en a ?

Exercice 23.33 (★★)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2 - z^2$.
Déterminer les éventuels extremums locaux de f sous les contraintes suivantes :

1. $x - y + z = 7$;

2. $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$.
