

## Révisions d'algèbre

### Polynômes

#### Exercice 24.1 (★★ - Division euclidienne)

Dans les cas suivants, déterminer le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

1.  $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$ ,  $B = X^2 + 2X + 3$ .      |      2.  $A = X^n - 4X + 1$ ,  $B = (X - 1)^2$ .

Rappelons pour commencer le théorème de division euclidienne :

#### Rappel. Théorème de division euclidienne pour les polynômes.

Soient  $A, B$  deux polynômes, avec  $B \neq 0$ . Il existe un unique couple  $(Q, R)$  de polynômes tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R, \\ \deg(R) < \deg(B). \end{cases}$$

$Q$  et  $R$  sont appelés le *quotient* et le *reste* de la *division euclidienne* de  $A$  par  $B$ .

1. On procède à une division euclidienne « à la main ». On obtient après calculs :

$$(3X^5 + 4X^2 + 1) = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) + (-41X - 47).$$

2. Notons que  $B = (X - 1)^2$  a 1 comme racine double, de sorte que  $B(1) = B'(1) = 0$ . Par le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple  $(Q, R)$  de polynômes tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R, \\ R = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]. \end{cases}$$

En évaluant en  $X = 1$ , on obtient :

$$A(1) = B(1)Q(1) + a + b = a + b \Rightarrow a + b = -2.$$

En dérivant,  $A' = B'Q + BQ' + a$ , puis en évaluant en  $X = 1$  :

$$A'(1) = B'(1)Q(1) + B(1)Q'(1) + a = a \Rightarrow a = n - 4.$$

En substituant,  $b = 2 - n$ . On en déduit que le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $Q$  est  $(n - 4)X + (2 - n)$ .

#### Exercice 24.2 (★★ - Équations polynomiales)

- Déterminer tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P'(X^2) = 4P(X)$ .
- Déterminer tous les  $P \in \mathbb{R}[X]$  vérifiant la relation  $(X^2 + 1)P''(X) - 6P(X) = 0$

1. Tout d'abord, notons que  $P = 0$  satisfait bien l'équation, et que c'est le seul polynôme constant solution de cette équation.

Si  $\deg(P) = 1$ , alors  $\deg(P') = 0$  et  $\deg(P'(X^2)) = 0 \neq \deg(4P)$ , donc  $P$  n'est pas solution de l'équation.

Supposons à présent que  $\deg(P) = n \geq 2$ , et que  $P$  est solution de l'équation. On a :

$$P'(X^2) = 4P(X) \Rightarrow \deg(P'(X^2)) = \deg(4P(X)).$$

Or on a  $\deg(P'(X^2)) = \deg(P') \times \deg(X^2) = 2n - 2$  et  $\deg(4P) = \deg(P) = n$ . On obtient :

$$2n - 2 = n \Rightarrow n = 2.$$

Écrivons donc  $P = aX^2 + bX + c$  avec  $a \neq 0$ . On substitue dans l'équation :

$$2aX^2 + b = 4aX^2 + 4bX + 4c \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4a \\ 4b = 0 \\ 4c = b \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0$$

ce qui contredit que  $a \neq 0$ . Ainsi cette équation n'a pas de solution de degré  $n \geq 2$ .

Finalement, l'ensemble des solutions de cette équation est  $\{0\}$ .

2. Soit  $P$  solution de l'équation.

Tout d'abord, supposons que  $\deg(P) \leq 1$ . Dans ce cas, on a :

$$P = \frac{1}{6}(X^2 + 1)P'' = 0.$$

Donc  $P = 0$  est le seul polynôme de degré  $\leq 1$  solution de cette équation.

Supposons à présent que  $\deg(P) = n \geq 2$ . On a :

$$\deg((X^2 + 1)P'') = 2 + n - 2 = n \quad \text{et} \quad \deg(P) = n.$$

On n'obtient ici aucune information sur le degré de  $P$ , contrairement au cas précédent...

Considérons plus précisément les coefficients dominants. Notons  $a_n \neq 0$  le coefficient dominant de  $P$ . Alors le coefficient dominant de  $(X^2 + 1)P''$  est  $n(n-1)a_nX^n$  et celui de  $6P$  est  $6a_nX^n$ . Puisque  $P$  est solution de l'équation, ces coefficients dominants sont égaux. Ainsi on a :

$$n(n-1) = 6 \Rightarrow n^2 - n - 6 = 0 \Rightarrow n = 3 \text{ ou } n = -2.$$

Ainsi, on a nécessairement que  $\deg(P) = 3$ . Notons alors  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$  avec  $a \neq 0$  et substituons dans l'équation :

$$\begin{aligned} (X^2 + 1)(6aX + 2b) = 6aX^3 + 6bX^2 + 6cX + d &\Rightarrow 6aX^3 + 2bX^2 + 6aX + 2b = 6aX^3 + 6bX^2 + 6cX + d \\ &\Rightarrow \begin{cases} 6a = 6a \\ 2b = 6b \\ 6a = 6c \\ 2b = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = c \\ d = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi on obtient  $P = a(X^3 + X)$ .

Réciproquement, on vérifie que tous les polynômes de la forme  $a(X^3 + X)$  avec  $a \in \mathbb{C}$  sont bien solution de l'équation.

Ainsi l'ensemble des solutions de cette équation est  $\{aX^3 + aX, a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X^3 + X)$ .

**Exercice 24.3 (★★ - Multiplicité d'une racine)**

- Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$  admette 1 pour racine double. Quel est alors le quotient de  $P(X)$  par  $(X - 1)^2$  ?
- Considérons le polynôme  $P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$  où  $n$  est un entier naturel impair. Montrer que  $P$  admet au moins une racine réelle et que celle-ci est une racine simple.

**Espaces vectoriels, applications linéaires**

**Exercice 24.4 (★)**

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.

- |  |  |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li><math>F = \{(x, y, z, t), x + y + z - t = 0\}</math>.</li> <li><math>G = \text{Vect}((1, 1, 2), (0, 1, 0), (2, -3, 4))</math>.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li><math>H = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1)\}</math>.</li> <li><math>I = \left\{ \begin{pmatrix} a+b &amp; a-b \\ a-b &amp; a+b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}</math>.</li> </ol> |
|--|--|

**Exercice 24.5 (★★)**

Soit  $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t)dt = 0 \right\}$ . Montrer que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$ , et en donner une base, sa dimension ainsi qu'un supplémentaire dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .

On commence par montrer que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$  :

- $P = 0$  est bien dans  $H$  puisque  $\int_0^1 P(t) dt = \int_0^1 0 dt = 0$ .
- Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, P, Q \in H$ , on a :

$$\int_0^1 (\lambda P + \mu Q)(t) dt \stackrel{\text{lin. de l'int.}}{=} \underbrace{\lambda \int_0^1 P(t) dt}_{=0 \text{ car } P \in H} + \underbrace{\mu \int_0^1 Q(t) dt}_{=0 \text{ car } Q \in H} = 0.$$

Donc  $\lambda P + \mu Q$  appartient bien à  $H$ .

$H$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

On cherche à présent la dimension de  $H$ . Soit pour cela  $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ . On a :

$$\begin{aligned} P \in H &\Leftrightarrow \int_0^1 P(t) dt = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0 = -\frac{a_n}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{n} - \dots - \frac{a_1}{2} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$H = \left\{ a_n X^n + \dots + a_1 X - \frac{a_n}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{n} - \dots - \frac{a_1}{2}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left( X^n - \frac{1}{n+1}, X^{n-1} - \frac{1}{n}, \dots, X - \frac{1}{2} \right).$$

$\left( X^n - \frac{1}{n+1}, X^{n-1} - \frac{1}{n}, \dots, X - \frac{1}{2} \right)$  est donc une famille génératrice de  $H$ . Elle est également libre car étagée en degrés. C'est donc une base de  $H$ , et  $H$  est de dimension  $n$ .

**Remarque.** On dit alors que  $H$  est un hyperplan de  $E = \mathbb{R}_n[X]$  puisque de dimension  $\dim(E) - 1$ . On peut consulter à ce sujet le complément de cours sur les formes linéaires et hyperplans.

Un supplémentaire  $G$  de  $H$  est nécessairement de dimension 1, de la forme  $G = \text{Vect}(Q)$  où  $Q \in \mathbb{R}_n[X], Q \neq 0$ . De plus, on doit choisir  $Q$  de telle sorte que  $\left( X^n - \frac{1}{n+1}, X^{n-1} - \frac{1}{n}, \dots, X - \frac{1}{2}, Q \right)$  soit une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ . On a l'embarras du choix (ou le choix de l'embarras...) : prenons  $Q$  constant égal à 1 par exemple, de sorte que la famille obtenue est encore étagée en degré, donc libre. Comme elle est de cardinal  $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ , c'est donc une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Ceci prouve bien que  $G = \text{Vect}(1)$  est un supplémentaire de  $H$  dans  $E = \mathbb{R}_n[X]$  :

$$\mathbb{R}_n[X] = H \oplus \text{Vect}(1).$$

**Remarques.** Toujours à propos du complément de cours sur les formes linéaires et hyperplans.

- On avait montré qu'il suffisait de prendre  $Q \notin H$  pour avoir  $G = \text{Vect}(Q)$  supplémentaire de  $H$ . C'est bien ce qui se produit ici puisque  $1 \notin H$ .
- Il est démontré qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. On le constate ici avec pour forme linéaire :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ P & \mapsto \int_0^1 P(t) dt \end{cases}$$

On vérifie que  $\varphi$  est linéaire (par linéarité de l'intégrale), non nulle ( $\varphi(1) = 1 \neq 0$ ) et que  $H = \text{Ker}(\varphi)$ . Ce qui prouve immédiatement que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , de dimension  $\dim(E) - 1 = n$  (par le théorème du rang).

**Exercice 24.6 (★)**

Montrer, dans chacun des cas suivants, que  $F$  et  $G$  sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$  :

1.  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z + t = 0\}$  et  $G = \text{Vect}((1, -1, 1, -1))$  ;
2.  $u_1 = (1, 0, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0, 0), u_3 = (1, 1, 1, 0), u_4 = (1, 1, 1, 1)$ , et  $F = \text{Vect}(u_1, u_2), G = \text{Vect}(u_3, u_4)$  ;
3. (★)  $E = \mathbb{R}[X], F = \{P \in \mathbb{R}[X] ; P(1) = P(2) = 0\}$  et  $G = \mathbb{R}_1[X]$  ;
4. (★)  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F = \{f \in E ; \forall x \in \mathbb{R} f(-x) = f(x)\}$  et  $G = \{f \in E ; \forall x \in \mathbb{R} f(-x) = -f(x)\}$ .

## 4. Procédons par Analyse - Synthèse.

**Analyse.** Soit  $h \in E$ . Supposons qu'il existe  $f \in F$  et  $g \in G$  tels que :

$$h = f + g, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) + g(x) \quad (*)$$

On a alors par parité de  $f$  et imparité de  $g$  que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x) \quad (**)$$

On obtient en faisant respectivement  $(*) + (**)$  et  $(*) - (**)$  :

$$h(x) + h(-x) = 2f(x) \quad \text{et} \quad h(x) - h(-x) = 2g(x).$$

Ainsi,  $f$  et  $g$  sont déterminés de manière unique par :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{h(x) + h(-x)}{2} \quad \text{et} \quad g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{h(x) - h(-x)}{2}.$$

**Synthèse.** Posons alors  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{h(x) + h(-x)}{2}$  et  $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{h(x) - h(-x)}{2}$ , et vérifions les points suivants :

- $h = f + g$ . En effet, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  que :

$$f(x) + g(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} + \frac{h(x) - h(-x)}{2} = h(x).$$

- $f \in F$ . En effet, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  que :

$$f(-x) = \frac{h(-x) + h(-(-x))}{2} = \frac{h(-x) + h(x)}{2}.$$

- $g \in G$ . En effet, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  que :

$$g(-x) = \frac{h(-x) - h(-(-x))}{2} = \frac{h(-x) - h(x)}{2} = -\frac{h(x) - h(-x)}{2} = g(x).$$

On peut donc conclure que pour tout  $h \in E$ , il existe un unique couple  $(f, g) \in F \times G$  tel que  $h = f + g$ . En d'autres termes, on a donc  $E = F \oplus G$ .

**Exercice 24.7 (★★)**

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer une base du noyau et de l'image de chacune d'elles ainsi que leur rang et leur matrice dans les bases canoniques :

$f_1 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - y, 2z, x - z) \in \mathbb{R}^3 ;$ $f_2 : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto 2XP - (X^2 - 1)P' \in \mathbb{R}_2[X] ;$ $f_3 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P + P' \in \mathbb{R}_3[X] ;$ $f_4 : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P(X + 1) - P(X) \in \mathbb{R}_2[X] ;$	$f_5 : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ;$ $f_6 : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$
--	---

1. Montrons que  $f$  est linéaire pour commencer : soient  $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$

D'où :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= ((\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), 2(\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda z + \mu z')) \\ &= \lambda(x - y, 2z, x - z) + \mu(x' - y', 2z', x' - z') = \lambda f(u) + \mu f(v). \end{aligned}$$

Donc  $f$  est linéaire. De plus  $E = F = \mathbb{R}^3$ , c'est donc un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ . Pour montrer que  $f$  est un automorphisme, il suffit de montrer que  $f$  est injective. En effet, on rappelle le résultat important suivant.

**Rappel.**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Si  $\dim(E) = \dim(F)$ , alors on a équivalence entre :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Rappelons également que :

- endomorphisme = linéaire +  $E = F$ ,
- isomorphisme = linéaire + bijectif,
- automorphisme = linéaire +  $E = F$  + bijectif.

On calcule donc son noyau (qui est bien souvent plus simple à déterminer que l'image) :

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(f) \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

Donc  $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ .  $f$  est donc injective, et c'est donc un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

Puisque  $f$  est un automorphisme,  $f$  est en particulier surjective, de sorte que  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ . On a donc que  $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ . Enfin, donnons la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

2. A faire.

3. Montrons que  $f$  est un endomorphisme de  $E = \mathbb{R}_3[X]$ . Soit pour cela  $P, Q \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .  
On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q) + (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P + \mu Q + \lambda P' + \mu Q' \\ &= \lambda(P + P') + \mu(Q + Q') = \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

De plus pour tout  $P \in E$ , on a  $\deg(f(P)) \leq \max(\deg(P), \deg(P')) \leq 3$ . Donc  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

On cherche le noyau de  $f$ . Soit  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ , on a  $P' = 3aX^2 + 2bX + c$ , et :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(P) = 0_E \Leftrightarrow aX^3 + (3a + b)X^2 + (2b + c)X + (c + d) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3a + b = 0 \\ 2b + c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d = 0 \end{aligned}$$

Ainsi  $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ , et  $f$  est injective. Comme de plus  $f$  est un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**, on en déduit que  $f$  est bijective. C'est un automorphisme de  $E$ . En particulier, on a  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_3[X]$ , et  $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ .

Reste à déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$  de  $E$ . On calcule pour cela :

$$f(1) = 1, \quad f(X) = 1 + X, \quad f(X^2) = X^2 + 2X, \quad f(X^3) = X^3 + 3X^2.$$

La matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons que  $A$  étant triangulaire supérieure avec des éléments non nuls sur la diagonale,  $A$  est inversible, ce qu'on savait puisque  $f$  est bijective.

**Question supplémentaire.** Est ce que  $f$  est diagonalisable ?

Comme  $A$  est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale, de sorte que  $\text{Sp}(A) = \{1\}$ . Si  $A$  est diagonalisable, alors elle serait semblable et donc égale à  $I_4$ , ce qui n'est pas le cas. Donc  $A$  (et  $f$ ) n'est pas diagonalisable.

4. Quelques exemples pour être sûr de bien comprendre qui est  $f$  :

- Si  $P = \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f(P) = P(X + 1) - P(X) = \lambda - \lambda = 0$  ;
- Si  $P = aX^2 + bX + c$ , alors  $f(P) = a(X + 1)^2 + b(X + 1) + c - aX^2 - bX - c$ .

Rappelons que  $P(X + 1)$  peut être vu comme la composée de deux polynômes : si on pose  $A = X + 1$ , on a  $f(P) = P \circ A - P$ .

Montrons que  $f$  est un endomorphisme de  $E = \mathbb{R}_2[X]$ . Soit pour cela  $P, Q \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) + \lambda P(X) + \mu Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

De plus pour tout  $P \in E$ , on a  $\deg(f(P)) \leq \max(\deg(P \circ A), \deg(P)) = \max(\deg(P) \times \deg(A), \deg(P)) \leq 2$ . Donc  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

On cherche le noyau de  $f$ . Soit  $P = aX^2 + bX + c$ , on a :

$$P(X+1) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c = aX^2 + (2a+b)X + (a+b+c).$$

D'où :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow P(X+1) - P(X) = 0_E \Leftrightarrow 2aX + (a+b) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0 \end{aligned}$$

Ainsi  $\text{Ker}(f) = \{c, c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(1)$ , et  $f$  n'est pas injective. Comme  $(1)$  est une famille génératrice de  $\text{Ker}(f)$  et constituée d'un vecteur non nul, c'est une base de  $\text{Ker}(f)$ , de sorte que  $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ . Comme  $f$  est un endomorphisme en **dimension finie**, on en déduit directement que  $f$  n'est pas non plus surjective, et donc que  $\text{rg}(f) \leq 2$ . Par le théorème du rang, on a :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2.$$

Pour déterminer  $\text{Im}(f)$  (qui est donc de dimension 2), utilisons que :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)).$$

On calcule :

$$f(1) = 0, \quad g(X) = 1 + X - X = 1, \quad g(X^2) = (1+X)^2 - X^2 = 2X + 1.$$

Ainsi on a :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(0, 1, 1 + 2X) = \text{Vect}(1, 1 + 2X).$$

La famille  $(1, 1 + 2X)$  est donc génératrice, de cardinal égal à  $\dim(\text{Im}(f))$ , c'est donc une base de  $\text{Im}(f)$ .

Reste à donner la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  de  $E$  :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que  $B$  n'est pas inversible car triangulaire supérieure avec au moins un 0 sur la diagonale. Ce qu'on savait car  $f$  ne l'est pas non plus.

**Question supplémentaire.** Est ce que  $f$  est diagonalisable ?



Comme  $B$  est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale, de sorte que  $\text{Sp}(B) = \{0\}$ . Si  $B$  est diagonalisable, alors elle serait semblable et donc égale à  $0 \times I_3$ , ce qui n'est pas le cas. Donc  $B$  (et  $f$ ) n'est pas diagonalisable.

Notons enfin que  $B$  est triangulaire supérieure stricte, donc nilpotente. Donc  $f$  l'est aussi.

5. A faire.

6.  $f$  est clairement à valeurs dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . De plus on a pour tout  $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)A = \alpha AM + \beta AN - \alpha MA - \beta NA \\ &= \alpha(AM - MA) + \beta(AN - NA) = \alpha f(M) + \beta f(N). \end{aligned}$$

Donc  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

Déterminons son noyau. Soit pour cela  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On a :

$$\begin{aligned} M \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow AM - MA = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix} = 0_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi on a  $\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( I_2, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ . La famille  $(I_2, B)$  est donc génératrice de  $\text{Ker}(f)$ , et libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de  $\text{Ker}(f)$ , et on a  $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$ . Ainsi  $f$  n'est pas injective, et elle n'est pas non plus surjective puisque c'est un endomorphisme en dimension finie.

Par le théorème du rang, on a :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Déterminons l'image de  $f$ . On a (en notant  $E_{i,j}$  la matrice élémentaire d'indice  $(i, j)$ ) :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(E_{1,1}), f(E_{1,2}), f(E_{2,1}), f(E_{2,2})).$$

On calcule alors :

$$f(E_{1,1}) = -E_{1,2}, \quad f(E_{1,2}) = 0, \quad f(E_{2,1}) = E_{1,1} - E_{2,2}, \quad f(E_{2,2}) = E_{1,2}.$$

D'où :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(-E_{1,2}, 0, E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}) = \text{Vect}(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}).$$

La famille  $(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2})$  est génératrice, de cardinal 2 égal à la dimension de  $\text{Im}(f)$ . C'est donc une base de  $\text{Im}(f)$ .

Reste à donner la matrice de  $f$  dans la base canonique  $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  de  $E$  :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que  $C$  n'est pas inversible (par exemple parce que la deuxième colonne de  $C$  est nulle), ce qu'on savait car  $f$  n'est pas un automorphisme.

### Exercice 24.8 (★★)

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on pose  $F = \{(x, y, z), x + 2y + z = 0\}$  et  $G = \text{Vect}(u)$  où  $u = (1, 1, 1)$ .

1. Montrer que  $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ .
2. On note  $p$  le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .
  - (a) Déterminer la matrice de  $p$  dans une base adaptée à la somme directe  $F \oplus G$ .
  - (b) En déduire la matrice de  $p$  dans la base canonique.
  - (c) Sans calcul supplémentaire, donner la matrice dans la base canonique de la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$ .

1. Cherchons pour commencer une base et la dimension de  $F$ . On a :

$$F = \{(-2y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1)).$$

La famille  $((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$  est donc génératrice de  $F$ . Elle est de plus libre car constituée de **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de  $F$ , et  $\dim(F) = 2$ .

D'autre part,  $(u)$  est une famille génératrice de  $G$  (par définition de  $G$ ) et libre car formée de **un** vecteur non nul. C'est donc une base de  $G$ .

Pour montrer que  $E = F \oplus G$ , on va par exemple montrer que la concaténation des bases de  $F$  et de  $G$ ,  $\mathcal{B}' = (e_1 = (-2, 1, 0), e_2 = (-1, 0, 1), e_3 = (1, 1, 1))$ , est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Montrons pour cela qu'elle est libre. Soit donc  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} a(-2, 1, 0) + b(-1, 0, 1) + c(1, 1, 1) = (0, 0, 0) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2a - b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2c + c + c = 0 \\ a = -c \\ b = -c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{B}'$  est bien une famille libre. Comme son cardinal est  $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ , c'est donc une base de  $\mathbb{R}^3$ . On obtient finalement que  $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ .

2. (a) Rappelons quelques propriétés des projecteurs.

**Rappel. Projecteurs.**

Soit  $E = F \oplus G$ , et soit  $p$  projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ . On a :

- $F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - Id) = E_1(p)$ , et donc :

$$\forall y \in F, \quad p(y) = y.$$

- $G = \text{Ker}(p) = E_0(p)$ , et donc :

$$\forall z \in G, \quad p(z) = 0_E.$$

Comme  $e_1, e_2 \in F$  et  $e_3 \in G$ , on a ici :

$$p(e_1) = e_1, \quad p(e_2) = e_2, \quad p(e_3) = 0.$$

On obtient donc que :

$$A' = M_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) On utilise ici la formule de changement de bases. Rappelons le point de cours correspondant.

**Rappel. Formules de changement de bases.**

Supposons  $E$  de dimension finie, et soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Notons :

- $A$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  ;
- $A'$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$  ;
- $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

Alors on a :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Notons  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , et  $A = M_{\mathcal{B}}(p)$ . On a :

$$A' = P^{-1}AP$$

où  $P$  est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ , c'est-à-dire :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

À l'aide du pivot de Gauss, on calcule  $P^{-1}$ . On obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/2 & 3/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Reste alors à calculer  $A = PA'P^{-1}$ . On trouve après calcul que :

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

(c) Encore un rappel :

**Rappel. Projecteurs associés.**

Si  $p$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ , alors  $q = Id_E - p$  est le projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$ . En effet si  $z \in E$ , alors en notant  $(x, y) \in F \times G$  tels que  $z = x + y$ , on a :

$$q(z) = z - p(z) = x + y - x = y.$$

On a les relations :

$$p + q = Id_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

On dit que  $p$  et  $q$  sont les *projecteurs associés* à la décomposition  $E = F \oplus G$ .

Notons donc  $q$  le projecteur sur  $G$  par rapport à  $F$ , de sorte que  $p$  et  $q$  sont des *projecteurs associés*, et ils satisfont :

$$p + q = Id.$$

En particulier on a  $q = Id - p$  et donc :

$$M_{\mathcal{B}}(q) = I_3 - M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 24.9 (★★)**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$  et que  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ .
2. (★) Montrer que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$ .

1. Prouvons ces inclusion :

- Soit  $x \in \text{Ker}(f)$ . Alors  $f(x) = 0_E$ . D'où en composant par  $f$ , on obtient  $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$ . Donc  $x \in \text{Ker}(f^2)$ . Ainsi on a bien que  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ .
- Soit  $z \in \text{Im}(f^2)$ . Il existe  $x \in E$  tel que  $z = f^2(x) = \underbrace{f(f(x))}_{\in E} \in \text{Im}(f)$ . Ainsi on a bien

$$\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f).$$

**Déjà vu ?**

Cela vous fait peut-être penser aux suites de noyaux et images itérées ? Voir l'exercice classique 6.6 à ce sujet.

2. On procède par double implication.

$\Rightarrow$  Supposons que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ . Montrons que  $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$ . On a déjà l'égalité des dimensions par le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f).$$

Montrons que  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$ . Soit  $y \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$ . Comme  $y \in \text{Im}(f)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . De plus, on a  $y \in \text{Ker}(f)$ , donc  $0_E = f(y) = f(f(x)) =$

$f^2(x)$ . Ainsi on a  $x \in \text{Ker}(f^2) \stackrel{\text{hyp.}}{=} \text{Ker}(f)$ . Donc  $y = f(x) = 0_E$ . On a donc montré que  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$ .

On peut donc conclure que  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ .

$\Leftarrow$  Supposons que  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ . Montrons que  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ . On a déjà une inclusion (qui est toujours vraie) :

$$\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2).$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit pour cela  $z \in \text{Ker}(f^2)$ . On a :

$$f(f(z)) = f^2(z) = 0_E \quad \Rightarrow \quad f(z) \in \text{Ker}(f).$$

Et par définition, on a  $f(z) \in \text{Im}(f)$ . Ainsi on a  $f(z) \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$  car ces sous-espaces sont en somme directe par hypothèse. On peut donc conclure que  $f(z) = 0_E$ , et donc que  $z$  appartient à  $\text{Ker}(f)$ . D'où l'inclusion  $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$ , et donc l'égalité.

**Exercice 24.10 (★★ - Sous-espaces vectoriels stables par la dérivation)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  défini par  $\varphi(P) = P'$ .

1. Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\mathbb{R}_k[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$  stable par  $\varphi$ .
2. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$ , non réduit au vecteur nul et stable par  $\varphi$ .
  - (a) Soit  $P \in F$  un polynôme de degré  $d$ . Montrer que  $\mathbb{R}_d[X] \subset F$ .
  - (b) On note  $p = \max\{\deg(P), P \in F\}$ . Montrer que  $F = \mathbb{R}_p[X]$ .

1. Le fait que  $\mathbb{R}_k[X]$  soit un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$  est connu (cours). Montrons qu'il est stable par  $\varphi$ .

**Rappels. Sous-espace stable.**

Un sous-espace  $F$  de  $E$  est stable par  $f \in \mathcal{L}(E)$  si :

$$\forall x \in F, \quad f(x) \in F.$$

Si  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ , alors :

$$F \text{ stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(e_i) \in F.$$

Ici, on a  $\mathbb{R}_k[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^k)$ , et pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  :

$$\varphi(X^i) = iX^{i-1} \in \mathbb{R}_k[X],$$

et  $\varphi(1) = 0 \in \mathbb{R}_k[X]$ . Donc  $\mathbb{R}_k[X]$  est un sous-espace vectoriel stable par  $\varphi$ .

2. (a) Soit  $P \in F$  de degré  $d \geq 0$ . Par une récurrence immédiate, on a que  $\varphi^i(P) \in F$  pour tout  $0 \leq i \leq d$  car  $F$  stable par  $\varphi$ . Comme de plus  $F$  est un sous-espace vectoriel, on en déduit que :

$$\text{Vect}(P, P', P^{(2)}, \dots, P^{(d)}) = \text{Vect}(P, \varphi(P), \varphi^2(P), \dots, \varphi^d(P)) \subset F.$$

Or  $\mathcal{F} = (P, P', P^{(2)}, \dots, P^{(d)})$  est une famille de polynômes de  $\mathbb{R}_d[X]$ , libre car échelonnée en degré ( $\deg(P^{(i)}) = d - i$  pour tout  $0 \leq i \leq d$ ). Comme  $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(\mathbb{R}_d[X]) = d + 1$ , c'est donc une base de  $\mathbb{R}_d[X]$ . On obtient donc :

$$\mathbb{R}_d[X] = \text{Vect}(P, P', P^{(2)}, \dots, P^{(d)}) \subset F.$$

(b) Posons  $p = \max\{\deg(P), P \in F\}$ . Montrons que  $F = \mathbb{R}_p[X]$  par double inclusion.

⊂ Pour tout  $P \in F$ , on a  $\deg(P) \leq p$  par définition de  $p$ . Donc on a  $F \subset \mathbb{R}_p[X]$ .

⊃ Prenons  $P_0 \in F$  tel que  $\deg(P_0) = p$ . D'après la question précédente, on a  $\mathbb{R}_p[X] \subset F$ .

D'où l'égalité voulue.

### Exercice 24.11 (★★)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 4, et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^3 \neq 0$  et  $f^4 = 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que  $(x, f(x), f^2(x), f^3(x))$  soit une base de  $E$ .
2. En déduire le rang de  $f$ .

1. Puisque  $f^3 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ , il existe  $x \in E$  tel que  $f^3(x) \neq 0_E$ . Montrons alors que la famille  $(x, f(x), f^2(x), f^3(x))$  est libre : soit pour cela  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tels que :

$$ax + bf(x) + cf^2(x) + df^3(x) = 0_E.$$

Composons cette égalité par  $f^3$ . On obtient par linéarité de  $f$  :

$$af^3(x) + \underbrace{bf^4(x) + cf^5(x) + df^6(x)}_{=0_E \text{ car } f^4=0} = f^3(0_E) = 0_E.$$

D'où  $af^3(x) = 0_E$ , et puisque  $f^3(x) \neq 0_E$ , on obtient que  $a = 0$ . On a donc :

$$bf(x) + cf^2(x) + df^3(x) = 0_E.$$

En composant par  $f^2$ , on obtient de même que :

$$bf^3(x) = 0_E.$$

D'où  $b = 0$  puisque  $f^3(x) \neq 0_E$ . En répétant ce procédé, on montre de même que  $c = d = 0$ . Donc la famille est libre. Comme de plus son cardinal est  $4 = \dim(E)$ , c'est donc une base de  $E$ .

2. On écrit la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), f^3(x))$  :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a  $\text{rg}(f) = \text{rg}(M_{\mathcal{B}}(f)) = 3$ , d'où le résultat.

**Autre méthode.** Rappelons que si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors on a :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Ici  $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), f^3(x))$  est une base de  $E$ , donc on a :

$$\text{Im}(f) = \underset{=0_E}{\text{Vect}(f(x), f(f(x)), f(f^2(x)), f(f^3(x)))} = \text{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x)).$$

La famille  $(f(x), f^2(x), f^3(x))$  est libre, en tant que sous-famille de la famille libre  $\mathcal{B}$ . Donc on a :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x))) = 3.$$

**Exercice 24.12 (★★★★ - Oral ESCP 2012)**

On note  $\mathbb{R}[X]$  l'espace des polynômes à coefficients réels et pour tout  $n > 1$ ,  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  le sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ . Pour tous  $i, j \in \mathbb{N}$ , on définit le symbole de Kronecker  $\delta_{i,j}$  par  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{i,j} = 0$  sinon.

Dans tout cet exercice,  $n$  désigne un entier naturel non nul et  $(a_1, \dots, a_n)$  une famille de nombres réels distincts.

1. (a) Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ .

(b) Montrer que la famille  $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

2. Soit  $\pi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$  défini par :  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \pi(P) = \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i$ .

(a) Montrer que  $\pi$  est un projecteur de  $\mathbb{R}[X]$ .

(b) Déterminer le noyau et l'image de  $\pi$ .

(c) On note  $F = \left\{ Q \prod_{i=1}^n (X - a_i), Q \in \mathbb{R}[X] \right\}$ . Montrer que  $F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathbb{R}[X]$ .

(d) Soit  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Déterminer les coordonnées de  $P$  dans la base  $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ .

3. Soit  $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n, P \mapsto (P(a_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ .

(a) Montrer que  $\varepsilon$  est un isomorphisme.

(b) Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que  $P(a_i) = f(a_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

*Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction  $f$  aux points  $(a_1, \dots, a_n)$ .*

4. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ , tels que  $a < b$ . Soient  $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tels que  $a \leq a_1 < \dots < a_n \leq b$  et  $P$  le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à  $f$  et aux points  $(a_1, \dots, a_n)$ .

(a) Soit  $x \in [a, b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$  et  $K$  réel. On définit la fonction  $\varphi$  par

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t) - P(t) - K \prod_{i=1}^n (t - a_i).$$

Montrer qu'il existe  $K$  tel que  $\varphi(x) = 0$ .

(b) Montrer que pour cette valeur de  $K$ , il existe  $\varsigma \in [a, b]$  tel que  $\varphi^{(n)}(\varsigma) = 0$ .

(c) Montrer que pour tout  $x \in [a, b]$ , on a :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\prod_{i=1}^n |x - a_i|}{n!} \sup_{[a,b]} |f^{(n)}|.$$

1. (a) Fixons  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On va procéder par Analyse - Synthèse.

**Analyse** On a  $L_i(a_j) = 0$  pour tout  $j \neq i$ , donc  $a_j$  est racine de  $L_i$  de sorte qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$L_i = \left( \prod_{1 \leq j \neq i \leq n} (X - a_j) \right) Q.$$

Prenons le degré de cette expression :

$$n - 1 \geq \deg(L_i) = \deg(Q) + n - 1 \Rightarrow \deg(Q) \leq 0.$$

Ainsi il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$L_i = \lambda \prod_{1 \leq j \neq i \leq n} (X - a_j).$$

Enfin, on a :

$$L_i(a_i) = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\prod_{1 \leq j \neq i \leq n} (a_i - a_j)}.$$

**Synthèse** Posons  $L_i = \prod_{1 \leq j \neq i \leq n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$ . On a  $\deg(L_i) = n - 1$ ,  $L_i(a_j) = 0$  pour tout  $j \neq i$  et :

$$L_i(a_i) = \prod_{1 \leq j \neq i \leq n} \underbrace{\frac{a_i - a_j}{a_i - a_j}}_{=1} = 1.$$

D'où l'existence et l'unicité d'un polynôme  $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ .

**Déjà vu ?**

Oui, et pas qu'un peu : ce sont les *polynômes de Lagrange* associés aux  $a_i$ , qui ont été introduit aux TD0, TD4 et TD6 par différentes méthodes.

- (b) Montrons qu'elle est libre. Soit pour cela  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Résolvons :

$$\lambda_1 L_1 + \dots + \lambda_n L_n = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}.$$

On évalue en  $a_i$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\underbrace{\lambda_1 L_1(a_i) + \dots + \lambda_i L_i(a_i) + \dots + \lambda_n L_n(a_i)}_{=0} = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0.$$

La famille  $(L_i)$  est donc libre, de cardinal  $n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ . C'est donc une base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ .

2. (a) Montrons que  $\pi$  est linéaire. Soit  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\pi(\lambda P + \mu Q) = \sum_{i=1}^n (\lambda P + \mu Q)(a_i) L_i = \lambda \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i + \mu \sum_{i=1}^n Q(a_i) L_i = \lambda \pi(P) + \mu \pi(Q)$$

Donc  $\pi$  est linéaire. De plus, pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on a :

$$\pi \circ \pi(P) = \pi \left( \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i \right) \stackrel{\text{lin.}}{=} \sum_{i=1}^n P(a_i) \pi(L_i)$$



Or on a pour tout  $1 \leq i \leq n$  :

$$\pi(L_i) = \sum_{j=1}^n \underbrace{L_i(a_j)}_{=\delta_{i,j}} L_j = L_i.$$

En substituant dans le calcul précédent, on obtient :

$$\pi \circ \pi(P) = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i = \pi(P)$$

Ainsi on a  $\pi \circ \pi = \pi$ , et  $\pi$  est bien un projecteur.

(b) Déterminons  $\text{Ker}(\pi)$ . Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . On a :

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\pi) &\Leftrightarrow \pi(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Leftrightarrow P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0 \quad \text{car la famille } (L_i) \text{ est libre} \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X], P = Q \prod_{i=1}^n (X - a_i). \end{aligned}$$

Ainsi on a  $\text{Ker}(\pi) = \{Q \prod_{i=1}^n (X - a_i), Q \in \mathbb{R}[X]\}$ .

Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on a :

$$\pi(P) = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i \in \text{Vect}(L_1, \dots, L_n).$$

Donc  $\text{Im}(\pi)$  est inclus dans  $\text{Vect}(L_1, \dots, L_n)$ . De plus, on a vu que  $L_i = \pi(L_i) \in \text{Im}(\pi)$ . D'où l'inclusion réciproque, et donc que  $\text{Im}(\pi) = \text{Vect}(L_1, \dots, L_n)$ .

(c) Comme  $\pi$  est un projecteur, on a :

$$\mathbb{R}[X] = \text{Ker}(\pi) \oplus \text{Im}(\pi) = F \oplus \text{Vect}(L_1, \dots, L_n).$$

Comme de plus,  $(L_i)$  est une base de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , on en déduit que  $\text{Vect}(L_1, \dots, L_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . D'où le résultat.

(d) Soit  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Im}(\pi)$ . On a :

$$P = \pi(P) = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i.$$

Ce qui donne les coordonnées de  $P$  dans la base  $(L_i)$ .

**Autre méthode.** Par un calcul direct, on cherche  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que :

$$P = \lambda_1 L_1 + \dots + \lambda_n L_n.$$

Évaluons cette égalité en  $a_i$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$P(a_i) = \underbrace{\lambda_1 L_1(a_i) + \dots + \lambda_i L_i(a_i)}_{=0} + \underbrace{\lambda_{i+1} L_{i+1}(a_i) + \dots + \lambda_n L_n(a_i)}_{=0} = \lambda_i.$$

3. (a) L'application  $\varepsilon$ , d'après ce qui précède, associe à  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  ses coordonnées dans la base  $(L_i)$ . Par le cours,  $\varepsilon$  est donc un isomorphisme de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  dans  $\mathbb{R}^n$  (on a ici identifié  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}^n$ ...).

**Autre méthode.** On l'avait déjà fait en TD, voir l'exercice 6.4.

- (b) On cherche  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  satisfaisant

$$(f(a_1), \dots, f(a_n)) = (P(a_1), \dots, P(a_n)) = \varepsilon(P).$$

Comme  $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un isomorphisme, il existe bien un tel polynôme, et il est de plus unique.

4. (a) On cherche  $K \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\varphi(x) = 0 \quad \Leftrightarrow_{x \neq a_i} \quad K = \frac{f(x) - P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)}.$$

- (b) Notons tout d'abord que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  comme composée de fonctions qui le sont.

On a pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\varphi(a_i) = 0$ , et  $\varphi(x) = 0$ . Donc  $\varphi$  s'annule en  $(n+1)$  réels distincts de  $[a, b]$ .

Par le théorème de Rolle appliqué entre chacune des racines de  $\varphi$ , on montre que  $\varphi^{(1)}$  admet (au moins)  $n = (n+1) - 1$  racines distinctes sur  $[a, b]$ . En répétant ce procédé (de « Rolle en cascade »), on en déduit que  $\varphi^{(n)}$  admet (au moins)  $(n+1) - n = 1$  racine réelle  $\zeta \in [a, b]$  tel que  $\varphi^{(n)}(\zeta) = 0$ .

- (c) Ainsi on a  $f^{(n)}(\zeta) - n!K = 0$  (car  $\deg(P) \leq n-1$ ), ce qui se réécrit :

$$\frac{f(x) - P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)} = K = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}.$$

Comme  $|f^{(n)}|$  est continue sur le segment  $[a, b]$ , elle admet une borne supérieure. En prenant les valeurs absolues, on obtient donc que pour tout  $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$  :

$$|f(x) - P(x)| = \sup_{[a,b]} |f^{(n)}| \frac{\prod_{i=1}^n |x - a_i|}{n!}.$$

Le résultat est encore vrai si  $x$  est l'un des  $a_i$ , d'où la conclusion.

## Diagonalisation

### Exercice 24.13 (★)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, en déterminer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- La matrice  $B$  est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont donc sur sa diagonales, de sorte que  $\text{Sp}(B) = \{2, -1\}$ .

On a :

$$B + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de rang 1. Par le théorème du rang,  $\dim(E_{-1}(B)) = 3 - 1 = 2$ .

D'autre part, on a :

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

de rang 2, d'où  $\dim(E_2(B)) = 3 - 2 = 1$  toujours par le théorème du rang.

Comme  $\dim(E_{-1}(B)) + \dim(E_2(B)) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ ,  $B$  est bien diagonalisable.

On cherche une base de vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(B) \Leftrightarrow x = 0$$

Ainsi, on a  $E_{-1}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . La famille  $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est génératrice de  $E_{-1}(B)$ , et libre car **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de cet espace.

D'autre part, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(B) \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 3y = 0 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

d'où  $E_2(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est génératrice de  $E_2(B)$ , et libre car formée de **un** vecteur non nul. C'est donc une base de  $E_2(B)$ .

En notant  $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  la matrice de passage entre la base canonique et la base de diagonalisation de  $B$ , on obtient donc (par formule de changement de bases) :

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Observons tout d'abord que  $C_2(C) = 3C_1(C)$  et  $C_3(C) = 0_{3,1}$ , de sorte que :

$$\text{Im}(C) = \text{Vect}(C_1(C), C_2(C), C_3(C)) = \text{Vect}(C_1(C)).$$

Donc  $\text{rg}(C) = \dim \text{Im}(C) = 1$ , et 0 est valeur propre de  $C$  avec  $\dim(E_0(C)) = 3 - 1 = 2$ . On propose alors deux méthodes pour étudier la diagonalisabilité de  $C$ .

**Méthode 1. À l'aide d'un polynôme annulateur.**

On a  $C^2 = 0_3$ , de sorte que  $X^2$  est un polynôme annulateur de  $C$ . 0 est donc la seule valeur propre possible de  $C$ , et c'est effectivement une valeur propre de  $C$  puisque  $\dim(E_0(C)) = 2$ . Comme  $\dim(E_0(C)) < 3$ , on peut donc conclure que  $C$  n'est pas diagonalisable.

**Méthode 2. Par l'absurde.**

Supposons que  $C$  soit diagonalisable. On a déjà une valeur propre 0 avec  $\dim(E_0(C)) = 2$ . Pour obtenir la dernière valeur propre  $\lambda$ , on utilise la trace :

$$0 + 0 + \lambda = \text{Tr}(C) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.$$

Ainsi 0 serait l'unique valeur propre de  $C$ . Mais dans ce cas  $\dim(E_0(C)) = 2 \neq 3$  et  $C$  ne serait pas diagonalisable... On peut donc conclure que  $C$  n'est pas diagonalisable.

- On observe que :

$$D - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 1. Donc 4 est valeur propre et  $\dim(E_4(D)) = 3 - 1 = 2$ .

Pour trouver la dernière valeur propre  $\lambda$ , faisons le raisonnement suivant : si  $D$  était diagonalisable, on aurait à l'aide de la trace :

$$4 + 4 + \lambda = \text{Tr}(D) = 10 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2.$$

Tentons de voir si 2 est bien valeur propre de  $D$  :

$$D - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc  $\text{rg}(D - 2I_3) = 2 < 3$ , et 2 est valeur propre de  $D$  avec  $\dim(E_2(D)) = 3 - 2 = 1$ .

On obtient  $\dim(E_4(D)) + \dim(E_2(D)) = 3$ , donc  $D$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(D) = \{2, 4\}$ .

On cherche une base de chacun des sous-espaces propres :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4(D) \Leftrightarrow -x + y - z = 0.$$

Ainsi  $E_4(D) = \left\{ \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est donc génératrice de  $E_4(D)$ , et libre car **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de  $E_4(D)$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(D) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}.$$

Ainsi  $E_4(D) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est donc génératrice de  $E_2(D)$ , et libre car **un** vecteur non nul. C'est donc une base de  $E_2(D)$ .

On obtient donc comme matrice de passage entre la base canonique et la base de diagonalisation la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , et par formule de changement de base :

$$P^{-1}DP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 24.14 (★★ - Extrait d'Edhec 2012)**

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  canoniquement associé à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ . On note

Id l'endomorphisme identité de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

1. (a) Calculer  $A^2$  et  $A^3$ , puis déterminer un polynôme annulateur de  $f$ .  
 (b) En déduire les valeurs propres de  $f$ .  
 (c) L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

2. (★) Trouver une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. (a) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que  $A^3 - 2A^2 = 0_n$ . Ainsi  $P = X^3 - 2X^2 = X^2(X - 2)$  est un polynôme annulateur de  $A$  et donc aussi de  $f$ .

- (b) Les valeurs propres **possibles** de  $f$  sont **parmi** les racines de  $P = X^2(X - 2)$ , c'est-à-dire 0 et 2. Vérifions que 0 et 2 sont effectivement valeurs propres de  $f$  :

- $A$  est de rang 2 car on a  $C_2(A) = -C_3(A)$  et que  $C_1(A)$  et  $C_2(A)$  ne sont pas colinéaires. Donc  $\dim(E_0(A)) = 3 - 2 = 1$  par le théorème du rang, et 0 est bien valeur propre de  $A$  (et de  $f$ ).

- On a  $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$  de rang 2 car  $C_1(A) = -C_2(A)$  et que  $C_1(A)$  et  $C_3(A)$  ne sont pas colinéaires. Donc  $\dim(E_2(A)) = 3 - 2 = 1$  toujours par le théorème du rang, et 2 est aussi valeur propre de  $A$  (et de  $f$ ).

On peut donc conclure que  $\text{Sp}(f) = \{0, 2\}$ .

- (c) Comme  $\dim(E_0(f)) + \dim(E_2(f)) = 1 + 1 = 2 < 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ ,  $f$  n'est pas diagonalisable.

2. Procédons par analyse-synthèse pour la recherche de cette base.

**Analyse.** Notons  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  telle que :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & e_1 & e_2 \\ & e_3 & \end{matrix}$$

On a donc  $f(e_1) = 0_{3,1}$ ,  $f(e_2) = e_1$  et  $f(e_3) = 2e_3$ . Ainsi  $e_1 \in E_0(f)$  et  $e_3 \in E_2(f)$ , et  $e_2$  est un antécédent de  $e_1$  par  $f$ .

**Synthèse.** Déterminons une base des sous-espaces propres  $E_0(f)$  et  $E_2(f)$ . On a :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme de plus  $\dim(E_0(f)) = \dim(E_2(f)) = 1$ , on obtient :

$$E_0(f) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_2(f) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Prenons donc  $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On cherche à présent  $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tel que :

$$\begin{aligned} f(e_2) = e_1 &\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 3z = 1 \\ -2x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4y - 4z = 1 & (2) + (1) \\ 4y - 4z = 1 & (3) + 2(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/4 \\ y - z = 1/4 \end{cases} \end{aligned}$$

Prenons par exemple  $e_2 = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Montrons que  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  convient :

– Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que :

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{3,1}.$$

En appliquant  $f$ , on a :

$$be_1 + 2ce_3 = 0_{3,1},$$

et en réappliquant  $f$  une seconde fois :

$$4ce_3 = 0_{3,1}.$$

Donc  $c = 0$ , puis en remplaçant dans la deuxième équation  $b = 0$ , et dans la première  $a = 0$ . Donc la famille  $\mathcal{B}$  est libre. Comme est de plus de cardinal  $3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ , c'est donc une base de cet espace.

- On a par construction  $f(e_1) = 0_{3,1}$ ,  $f(e_2) = e_1$  et  $f(e_3) = 2e_3$ . Donc on a bien  $T = M_{\mathcal{B}}(f)$ .

D'où le résultat.

**Exercice 24.15 (★★ - Extrait de EML 2013)**

Soit  $n \geq 2$  un entier. Soit  $L$  un élément non nul de  $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$  et  $C$  un élément non nul de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . On pose  $A = CL$  et  $a = \text{Tr}(A)$ .

1. Déterminer les coefficients de  $A$  à l'aide des coefficients de  $C$  et  $L$ .
2. Montrer que 0 est valeur propre de  $A$  et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
3. Montrer que  $LC = (a)$ , puis  $A^2 = aA$ .
4. Montrer que si  $a = 0$ , alors  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
5. On suppose  $a \neq 0$ . Calculer  $AC$ . Dédurre des questions précédentes que  $A$  est diagonalisable.
6. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit diagonalisable.

1. Notons  $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$  et  $L = (l_1 \ \dots \ l_n)$  On a :

$$A = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \times (l_1 \ \dots \ l_n) = \begin{pmatrix} c_1 l_1 & \dots & c_1 l_n \\ \vdots & & \vdots \\ c_n l_1 & \dots & c_n l_n \end{pmatrix}.$$

2. Soit  $1 \leq i \leq n$ . On a  $C_i(A) = l_i C$  où  $C_i(A)$  désigne la  $i$ -ème colonne de la matrice  $A$ , de sorte que :

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) \subset \text{Vect}(C).$$

Ainsi  $\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A))) \leq \dim(\text{Vect}(C)) = 1$  car  $C \neq 0_{n,1}$ . Comme de plus  $C \neq 0_{n,1}$  et  $L \neq 0_{1,n}$ , il existe  $1 \leq i, j \leq n$  tels que  $c_i \neq 0$  et  $l_j \neq 0$ . En particulier, on a  $[A]_{i,j} = c_i l_j \neq 0$  et  $\text{rg}(A) \geq 1$ .

Ainsi  $\text{rg}(A) = 1$ , 0 est valeur propre de  $A$  et  $\dim(E_0(A)) = n - 1$  par le théorème du rang.

3. On a :

$$LC = (l_1 \ \dots \ l_n) \times \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \left( \sum_{i=1}^n c_i l_i \right) = \left( \sum_{i=1}^n [A]_{i,i} \right) = (a).$$

D'où :

$$A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = C(a)L = aCL = aA.$$

4. Si  $a = 0$ , alors  $A^2 = 0_n$  et  $X^2$  est un polynôme annulateur de  $A$ . 0 est donc l'unique valeur propre possible de  $A$ . Et elle est bien valeur propre de  $A$  d'après 2. On en déduit que :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_0(A)) = n - 1 < n.$$

$A$  n'est donc pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

5. Supposons  $a \neq 0$ . On a :

$$AC = (CL)C = C(LC) = C(a) = aC.$$

Comme  $C \neq 0_{n,1}$ ,  $C$  est donc vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $a$ , et  $\dim(E_a(A)) \geq 1$ .

On obtient alors :

$$n = (n - 1) + 1 \leq \dim(E_0(A)) + \dim(E_a(A)) \underset{\text{cours}}{\leq} n.$$

On en déduit que  $\dim(E_0(A)) + \dim(E_a(A)) = n$ . Ainsi  $A$  est diagonalisable,  $\text{Sp}(A) = \{0, a\}$  et  $\dim(E_a(A)) = 1$ .

6.  $A = CL$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{Tr}(A) \neq 0$ .

**Exercice 24.16 (★★)**

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$  et soit  $b \in \mathbb{R}$ . On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  ( $n \geq 2$ ) défini par  $[f(P)](X) = P(aX + b)$ .

1. Écrire la matrice de  $f$  dans la base canonique. En déduire les valeurs propres de  $f$ .
2. Montrer que si  $a \notin \{-1, 1\}$ , alors  $f$  est diagonalisable.
3. Si  $a = 1$ , donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit diagonalisable.

1. Commençons tout d'abord par bien comprendre qui est  $f$ . Si on note  $Q = aX + b$ , on a :

$$f : P = \sum_{i=0}^n p_i X^i \mapsto P \circ Q = \sum_{i=0}^n p_i Q^i.$$

Faisons quelques exemples, avec  $P_1 = X^2 + 2X + 1$ ,  $P_2 = X$  et  $P_3 = 2$  :

$$f(P_1) = P_1 \circ Q = Q^2 + 2Q + 1 = (aX + b)^2 + 2(aX + b) + 1.$$

$$f(P_2) = P_2 \circ Q = Q = (aX + b).$$

$$f(P_3) = P_3 \circ Q = 2.$$

Montrons que  $f$  est un endomorphisme de  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Soient  $P_1, P_2 \in E$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f(\alpha P_1 + \beta P_2) = (\alpha P_1 + \beta P_2) \circ Q = \alpha P_1 \circ Q + \beta P_2 \circ Q = \alpha f(P_1) + \beta f(P_2).$$

Donc  $f$  est linéaire. De plus on a pour tout  $P \in E$  (puisque  $\deg(Q) \geq 1$ ) :

$$\deg(f(P)) = \deg(P \circ Q) = \deg(P) \deg(Q) = \deg(P) \times 1 = \deg(P).$$

Donc  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

Reprenons le fil de l'exercice. Posons  $P_k = X^k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Pour obtenir la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$ , on calcule :

$$f(P_k) = P_k \circ Q = Q^k = (aX + b)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^i b^{k-i} X^i.$$



On en déduit :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \dots & b^n \\ 0 & a & \binom{2}{1}ab & & \binom{n}{1}ab^{n-1} \\ 0 & \ddots & a^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1}a^{n-1}b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n}a^n \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale. Ainsi  $\text{Sp}(f) = \{1, a, a^2, \dots, a^n\}$ .

2. Soit  $0 \leq k < \ell \leq n$ , on a :

$$a^k = a^\ell \quad \Leftrightarrow_{a \neq 0} \quad 1 = a^{\ell-k} \quad \Rightarrow \quad |a| = 1.$$

Si  $a \neq \pm 1$ , les  $a^k$  pour  $0 \leq k \leq n$  sont donc deux à deux distincts.  $f$  admet donc  $n + 1$  valeurs propres distinctes et est un endomorphisme de  $E$  de dimension  $n + 1$ . Donc  $f$  est diagonalisable.

3. Si  $a = 1$ , on a alors :

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \dots & b^n \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}b & & \binom{n}{1}b^{n-1} \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1}b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a dans ce cas  $\text{Sp}(A) = \{1\}$ , et  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $A = I_{n+1}$ . Or ceci est équivalent à  $b = 0$ , et à  $Q = X$ . Ainsi  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $b = 0$ , et dans ce cas  $f = Id_E$ .

**Exercice 24.17 (★★)**

Déterminer les valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}$  pour lesquelles  $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  est diagonalisable.

On commence par chercher les valeurs propres de  $A$ , qui sont les racines du polynôme :

$$X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2X + (1 - 2\lambda).$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = 4 - 4(1 - 2\lambda) = 8\lambda.$$

On a alors trois cas possibles :

- Si  $\lambda > 0$ , alors  $\Delta > 0$  et  $A$  admet 2 valeurs propres réelles distinctes. Comme  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on en déduit que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- Si  $\lambda = 0$ , alors  $\Delta = 0$  et  $X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A) = (X - 1)^2$ . Donc  $A$  admet une unique valeur propre 1. Dans ce cas  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $A = 1I_2 = I_2$ , ce qui n'est pas le cas. Donc  $A$  n'est pas diagonalisable dans ce cas (ni dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , ni dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ).
- Si  $\lambda < 0$ , alors  $\Delta < 0$ . Donc  $A$  n'a pas de valeur propre réelle, et n'est donc pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Elle admet cependant deux valeurs propres complexes distinctes.

Comme  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on en déduit donc que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  (les valeurs propres et les vecteurs propres seront complexes dans ce cas).

**Exercice 24.18 (★★ - Extrait d'Edhec 2012)**

On note  $E$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieurs ou égal à 2. On note  $e_0, e_1, e_2$  les polynômes de  $E$  définis par  $e_0 = 1, e_1 = X$  et  $e_2 = X^2$ . On rappelle que  $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$  est une base de  $E$ .

On considère l'application  $f$  qui, à tout polynôme  $P$  de  $E$ , associe le reste dans la division euclidienne par  $1 + X^3$  du polynôme  $(1 - X + X^2)P$ . Ainsi, il existe un unique polynôme  $Q$  tel que

$$(1 - X + X^2)P = (1 + X^3)Q + f(P) \text{ avec } \deg(f(P)) \leq 2.$$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. (a) Déterminer  $f(e_0), f(e_1), f(e_2)$ , puis vérifier que  $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$ .  
 (b) En déduire une base de  $\text{Im}(f)$ .  
 (c) Donner la dimension de  $\text{Ker}(f)$  ainsi qu'une base de  $\text{Ker}(f)$ .
3. (a) Calculer  $f(P)$  pour tout polynôme  $P$  de  $\text{Im}(f)$ , puis établir que 3 est valeur propre de  $f$  et que :

$$\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 3Id).$$

- (b) Montrer que  $f$  est diagonalisable.

1. Il s'agit ici d'une question difficile qui nécessite de bien connaître le théorème de division euclidienne des polynômes dont voici l'énoncé.

**Rappel. Théorème de la division euclidienne.**

Soient  $A, B$  deux polynômes tels que  $B \neq 0$ . Alors il existe un unique couple  $(Q, R)$  de polynômes tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

$Q$  et  $R$  sont appelés le *quotient* et le *reste* de la *division euclidienne* de  $A$  par  $B$ .

Soient  $P_1, P_2 \in E$  et  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . D'après le théorème de division euclidienne, il existe des couples  $(Q_1, R_1)$  et  $(Q_2, R_2)$  uniques tels que :

$$(1 - X + X^2)P_1 = (1 + X^3)Q_1 + R_1 \quad \text{avec} \quad \deg(R_1) \leq 2$$

et

$$(1 - X + X^2)P_2 = (1 + X^3)Q_2 + R_2 \quad \text{avec} \quad \deg(R_2) \leq 2.$$

Notons que par définition, on a  $f(P_1) = R_1$  et  $f(P_2) = R_2$ .

En multipliant respectivement par  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ces équations et en sommant, on obtient :

$$(1 - X + X^2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (1 + X^3)(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2).$$

De plus on a  $\deg(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) \leq 2$ . Par unicité dans le théorème de division euclidienne,  $(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)$  est donc le reste de la division euclidienne du polynôme  $(1 - X + X^2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)$  par  $1 + X^3$ . Par définition de  $f$ , on a ainsi :

$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2).$$

D'où la linéarité de  $f$ . Comme de plus  $f(P)$  est un polynôme de degré  $\leq 2$  en tant que reste de la division euclidienne par  $(1+X^3)$ , on a bien  $f(P) \in E$ . Ainsi  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

2. (a) On effectue trois divisions euclidiennes (qu'on posera si nécessaire). On a :

$$(1 - X + X^2) \times 1 = (1 + X^3) \times 0 + (1 - X + X^2),$$

$$(1 - X + X^2) \times X = X - X^2 + X^3 = (1 + X^3) \times 1 + (-X^2 + X - 1),$$

$$(1 - X + X^2) \times X^2 = X^2 - X^3 + X^4 = (1 + X^3) \times (X - 1) + (X^2 - X + 1).$$

D'où :

$$f(e_0) = 1 - X + X^2, \quad f(e_1) = -1 + X - X^2 \quad \text{et} \quad f(e_2) = 1 - X + X^2.$$

En particulier, on a bien :  $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$ .

- (b) On a  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_0), f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}(1 - X + X^2)$  d'après la question précédente.  $(1 - X + X^2)$  est donc une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ , et libre car  $1 - X + X^2 \neq 0_E$ .  $(1 - X + X^2)$  est donc une base de  $\text{Im}(f)$ , et  $\dim \text{Im}(f) = 1$ .

- (c) Par le théorème du rang, on a :

$$\dim(E) = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) \quad \Rightarrow \quad \dim \text{Ker}(f) = \dim(E) - \dim \text{Im}(f) = 3 - 1 = 2.$$

De plus on a :

$$f(e_0) = -f(e_1) \quad \Rightarrow \quad f(e_0 + e_1) = f(1 + X) = 0_E$$

et

$$f(e_0) = f(e_2) \quad \Rightarrow \quad f(e_2 - e_0) = f(X^2 - 1) = 0_E$$

Ainsi  $X^2 - 1$  et  $X + 1$  appartiennent à  $\text{Ker}(f)$ . Puisque  $(X + 1, X^2 - 1)$  est une famille de vecteurs de  $\text{Ker}(f)$  libre car échelonnée en degré, de cardinal égal à  $\dim \text{Ker}(f) = 2$ ,

$(X + 1, X^2 - 1)$  donc une base de  $\text{Ker}(f)$ .

3. (a) D'après ce qui précède, on a  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1 - X + X^2)$ . Calculons  $f(1 - X + X^2)$ . Pour cela, on effectue la division euclidienne de  $(1 - X + X^2)(1 - X + X^2) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$  par  $1 + X^3$ . On obtient (en posant la division) :

$$X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1 = (1 + X^3)(X - 2) + 3(X^2 - X + 1).$$

Ainsi on a  $f(X^2 - X + 1) = 3(X^2 - X + 1)$ . Plus généralement pour tout  $P \in \text{Im}(f)$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $P = \lambda(1 - X + X^2)$ , et on a :

$$f(P) = \lambda f(X^2 - X + 1) = 3\lambda(X^2 - X + 1) = 3P.$$

Ainsi 3 est valeur propre de  $f$  et on a :

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f - 3\text{Id}). \quad (*)$$

D'après ce qui précède, 0 et 3 sont donc valeurs propres de  $f$  et on a :

$$\dim(E_0(f)) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(E_3(f)) \geq 1.$$

Or d'après le cours, on a :

$$\dim(E_0(f)) + \dim(E_3(f)) \leq 3.$$

Ainsi  $\dim(E_3(f)) = 1 = \dim \text{Im}(f)$ , et on a donc avec (\*) :

$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 3\text{Id}).}$$

(b) Avec ce qui précède, on a obtenu :

$$\dim(E_0(f)) + \dim(E_3(f)) = \dim(E).$$

Ainsi on a  $\text{Sp}(f) = \{0, 3\}$  et  $f$  est diagonalisable d'après le cours.

**Exercice 24.19 (★★ - Extrait d'Edhec 2006)**

Soit  $f$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose qu'il existe deux réels  $\lambda_1, \lambda_2$  distincts tels que  $(f - \lambda_1 \text{Id}) \circ (f - \lambda_2 \text{Id}) = 0$ .

1. Montrer que  $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}((f - \lambda_1 \text{Id}) - (f - \lambda_2 \text{Id})) = \text{Id}$ .
2. En déduire que  $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})$ .
3. Montrer que  $f$  est diagonalisable.

1. On a :

$$\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}((f - \lambda_1 \text{Id}) - (f - \lambda_2 \text{Id})) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}((\lambda_2 - \lambda_1) \text{Id}) = \text{Id}.$$

2. Montrons que  $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})$ .

- Soit  $x \in \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}) \cap \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})$ . d'après l'identité de la question précédente que :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}((f - \lambda_1 \text{Id}) - (f - \lambda_2 \text{Id}))(x) \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \underbrace{(f - \lambda_1 \text{Id})(x)}_{=0_E \text{ car } x \in \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id})} - \underbrace{(f - \lambda_2 \text{Id})(x)}_{=0_E \text{ car } x \in \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})} \right) = 0_E. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien  $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}) \cap \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id}) = \{0_E\}$ .

**Autre méthode.** Si  $x \in \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}) \cap \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})$ , alors on a  $f(x) = \lambda_1 x$  et  $f(x) = \lambda_2 x$ . D'où en soustrayant,  $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0_E$ , et donc  $x = 0_E$  puisque  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Soit  $x \in E$ , on a toujours par l'identité de la question précédente :

$$x = \underbrace{\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(f - \lambda_1 \text{Id})(x)}_{=:y} + \underbrace{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(f - \lambda_2 \text{Id})(x)}_{=:z}.$$

On a :

$$(f - \lambda_2 \text{Id})(y) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \underbrace{(f - \lambda_2 \text{Id}) \circ (f - \lambda_1 \text{Id})(x)}_{=0_{\mathcal{L}(E)}} = 0_E$$

de sorte que  $y \in \text{Ker}(f - \lambda_2 Id)$ . De même, on montre que  $z \in \text{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ . Résumons : on a donc montré que pour tout  $x \in E$ , il existe  $(y, z) \in \text{Ker}(f - \lambda_2 Id) \times \text{Ker}(f - \lambda_1 Id)$  tel que  $x = y + z$ . Ce qui signifie par définition que :

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \lambda_1 Id) + \text{Ker}(f - \lambda_2 Id).$$

Avec les deux points précédents, on peut donc conclure que  $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \lambda_1 Id) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 Id)$ .

3. On considère  $\mathcal{B}_1$  une base de  $\text{Ker}(f - \lambda_1 Id)$  (éventuellement vide si  $\text{Ker}(f - \lambda_1 Id) = \{0_E\}$ ) et  $\mathcal{B}_2$  une base de  $\text{Ker}(f - \lambda_2 Id)$ . Puisque  $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \lambda_1 Id) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 Id)$ , la concaténation  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ , qui est constituée de vecteurs propres de  $f$ . Ainsi  $f$  est bien diagonalisable.

**Exercice 24.20 (★★ - Racines carrées d'une matrice diagonalisable (EML 2009))**

1. Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant  $f \circ g = g \circ f$ . On suppose de plus que  $f$  admet  $n$  valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

- (a) Montrer que chaque sous-espace propre de  $f$  est stable par  $g$ .
- (b) En déduire que tout vecteur propre de  $f$  est vecteur propre de  $g$ .
- (c) Justifier que  $f$  est diagonalisable.

Montrer que, pour toute base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $f$ , la matrice de  $g$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  est diagonale. En déduire que  $g$  est diagonalisable.

2. Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  admettant  $n$  valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.

On appelle racine carrée de  $A$  toute matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = A$ .

- (a) Justifier l'existence d'une matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $D = P^{-1}AP$  soit diagonale.
- (b) Donner un exemple de racine carrée de  $A$  (on l'exprimera à l'aide de  $P$  et des éléments diagonaux de  $D$ ).
- (c) Soit  $R$  une racine carrée de  $A$ . Vérifier que  $AR = RA$ .  
En déduire que la matrice  $P^{-1}RP$  est diagonale.
- (d) Établir qu'il existe exactement  $2^n$  racines carrées de  $A$ .

1. (a) C'est du cours (Chapitre 9). Redémontrons le malgré tout. Soit donc  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ ,  $E_\lambda(f)$  le sous-espace propre associé. On souhaite montrer que :

$$\forall x \in E_\lambda(f), \quad g(x) \in E_\lambda(f).$$

Soit donc  $x \in E_\lambda(f)$ , on a :

$$f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

On a bien  $g(x) \in \text{Ker}(f - \lambda Id) = E_\lambda(f)$ . Donc le sous-espace  $E_\lambda(f)$  est stable par  $g$ .

- (b) Notons pour commencer que comme  $f$  admet  $n$  valeurs propres réelles deux à deux distinctes, les sous-espaces propres de  $f$  sont tous de dimension 1. Soit  $v$  un vecteur propre associé à une valeur propre  $\lambda$  de  $f$ , on a par conséquent (puisque  $v \neq 0_E$  en tant que vecteur propre) que :

$$E_\lambda = \text{Vect}(v).$$

D'après la question précédente, on a :

$$g(v) \in E_\lambda = \text{Vect}(v) \Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}, g(v) = \mu v.$$

Donc  $v$  est bien vecteur propre de  $g$ .

- (c)  $f$  admettant  $n$  valeurs propres distinctes dans un espace  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n$ ,  $f$  est diagonalisable. Il existe donc une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $f$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Pour une telle base, notons  $\mu_i \in \mathbb{R}$  tel que  $g(e_i) = \mu_i e_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a :

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Donc  $g$  est bien diagonalisable.

2. (a) Comme  $A$  admet  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes,  $A$  est diagonalisable, et il existe une matrice  $P$  inversible et  $D$  diagonale telles que :

$$P^{-1}AP = D.$$

- (b) Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  telles que  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ . Cherchons

tout d'abord  $D'$  diagonale telle que  $D'^2 = D$ . Une solution évidente à cette équation est :

$$D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

puisque l'on a alors bien  $D'^2 = D$ . Et :

$$A = PDP^{-1} = PD'^2P^{-1} = PD'I_nD'P^{-1} = (PD'P^{-1})(PD'P^{-1}) = B^2$$

en posant  $B = PD'P^{-1}$ . On a donc obtenu une racine carrée  $B$  de  $A$ .

- (c) Soit  $R$  telle que  $R^2 = A$ . On a :

$$AR = R^2R = RR^2 = RA.$$

Donc les matrices  $R$  et  $A$  commutent.

Si on note  $f$  et  $g$  les endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associés à  $A$  et  $R$ , on est ramené au cas de la question 1. :  $f$  admet  $n$  valeurs propres réelles deux à deux distinctes (et strictement positives), et  $g$  commute avec  $f$ . Si on note  $\mathcal{B}_0$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $P$  soit la matrice de passage de  $\mathcal{B}_0$  à  $\mathcal{B}$ , on a par formule de changement de bases que :

$$D = P^{-1}AP = P^{-1}M_{\mathcal{B}_0}(f)P = M_{\mathcal{B}}(f).$$

Comme  $D$  est diagonale,  $\mathcal{B}$  est une base de vecteurs propres de  $f$ . D'après 1.(c), on en déduit que :

$$P^{-1}RP = P^{-1}M_{\mathcal{B}_0}(g)P = M_{\mathcal{B}}(g)$$

est une matrice diagonale également.

(d) Notons comme précédemment  $M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$ . On a :

$$R^2 = A \Leftrightarrow P^{-1}R^2P = P^{-1}AP \Leftrightarrow (P^{-1}RP)^2 = D,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1^2 = \lambda_1 \\ \dots \\ \mu_n^2 = \lambda_n \end{cases} \cdot \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \lambda_i > 0 \end{matrix} \begin{cases} \mu_1 = \pm\sqrt{\lambda_1} \\ \dots \\ \mu_n = \pm\sqrt{\lambda_n} \end{cases}.$$

On a exactement  $2^n$  solutions  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  de ce système. Par suite, il existe exactement  $2^n$  solutions pour  $P^{-1}RP$ , et donc pour  $R$ .  $A$  possède donc exactement  $2^n$  racines carrées qui sont :

$$P^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} P$$

avec  $\mu_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

**Exercice 24.21 (★★★)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable possédant  $p$  valeurs propres distinctes.

1. Montrer que  $A$  possède un polynôme annulateur  $P$  de degré  $p$ , et que tout polynôme annulateur non nul de  $A$  est de degré supérieur ou égal à  $p$ .
2. Montrer que la dimension de  $\text{Vect}(I_n, A, A^2, \dots, A^k)$  vaut  $k + 1$  si  $k < p$  et  $p$  sinon.

1. Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres distinctes de  $A$ . Soit  $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ .

Soit  $Q$  un polynôme annulateur de  $A$ . D'après le cours, les valeurs propres de  $A$  sont parmi les racines de  $Q$ . Ainsi  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont racines de  $Q$ . Comme elles sont deux à deux distinctes, le polynôme  $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$  divise  $Q$ . Puisque  $Q \neq 0$ , on a donc  $\deg(Q) \geq p$ .

Montrons à présent que  $P$  est annulateur de  $A$ . Puisque  $A$  est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale :

$$D = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_p \text{ fois}})$$

où  $m_i$  est la dimension du sous-espace propre associé à  $\lambda_i$ . Puisque  $A$  et  $D$  sont semblable, elles ont les mêmes polynômes annulateurs. Enfin on a (puisque  $D$  est diagonale) :

$$P(D) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_p), \dots, P(\lambda_p)) = \text{diag}(0, \dots, 0) = 0_n.$$

$P$  est donc annulateur de  $D$ , et donc de  $A$ .

**Remarque.** Nous avons déjà démontré une partie de ce résultat à la fin du Chapitre 13 : si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ , alors  $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

2. Commençons par montrer que la famille  $(I_n, A, A^2, \dots, A^{p-1})$  est libre. Soit pour cela  $a_0, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$  tels que :

$$a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{p-1} A^{p-1} = 0.$$

On a alors  $Q(A) = 0$  avec  $Q = a_0 + a_1 X + \dots + a_{p-1} X^{p-1}$ . D'après la question précédente, on en déduit que  $Q$  est nécessairement le polynôme nul. Ainsi on a  $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$ . Donc la famille est libre.

Pour tout  $k < p$ , on en déduit que la famille  $(I_n, A, \dots, A^k)$  est libre en tant que sous-famille d'une famille libre. Donc on a :

$$\dim \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^k) = \text{rg}(I_n, A, \dots, A^k) = k + 1.$$

Supposons à présent  $k \geq p$ , et montrons que :

$$\text{Vect}(I_n, A, \dots, A^k) = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1}).$$

Ceci permettra alors de conclure puisque  $\dim(\text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})) = p$ . Pour montrer cette égalité, il suffit de montrer que pour tout  $k \geq p$ , on a  $A^k \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ . On propose deux méthodes.

**Méthode 1. Par récurrence.** Écrivons pour cela  $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p) = X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_1 X + a_0$  ( $P$  est unitaire).

**Init.** Pour  $k = p$ , on a :

$$P(A) = 0 \Rightarrow A^p = -a_0 I_n - a_1 A - \dots - a_{p-1} A^{p-1} \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$$

D'où la propriété pour  $k = p$ .

**Hér.** Soit  $k \geq p$  et supposons la propriété au rang  $k$ . On a par hypothèse de récurrence :

$$A^k \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$$

Donc il existe  $b_0, b_1, \dots, b_{p-1} \in \mathbb{R}$  tels que :

$$A^k = b_0 I_n + b_1 A + \dots + b_{p-1} A^{p-1}.$$

On multiplie par  $A$  cette égalité :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= b_0 A + b_1 A^2 + \dots + b_{p-2} A^{p-1} + b_{p-1} A^p \\ &= b_0 A + b_1 A^2 + \dots + b_{p-2} A^{p-1} + b_{p-1} (-a_0 I_n - a_1 A - \dots - a_{p-1} A^{p-1}) \\ &\in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1}) \end{aligned}$$

D'où le résultat au rang  $k + 1$ .

On conclut par principe de récurrence.

**Méthode 2.** Soit  $k \geq p$ . On effectue la division euclidienne de  $X^k$  par  $P$ . Il existe  $Q$  et  $R$  des polynômes tels que :

$$X^k = P \times Q + R \quad \text{avec } \deg(R) < p.$$



On évalue en  $A$  :

$$A^k = \underbrace{P(A) \times Q(A)}_{=0_n} + R(A) = R(A) \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$$

car  $\deg(R) < p$ . D'où le résultat.

### Exercice 24.22 (★★★★ - Polynômes minimaux (Oral ESCP 2016))

1. Soit un entier  $n \geq 2$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des polynômes annulateurs de  $M$ .

- Justifier que  $\mathcal{A}$  n'est pas réduit au polynôme nul.
- Vérifier que  $\mathcal{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ .
- Montrer que  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathcal{A}, PQ \in \mathcal{A}$ .
- Montrer qu'il existe un polynôme non nul de  $\mathcal{A}$  de degré minimal. Soit  $K \in \mathcal{A}$  un polynôme unitaire de degré minimal.

En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que  $K$  divise tout polynôme de  $\mathcal{A}$ . En déduire que

$$\mathcal{A} = \{KQ, Q \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Un tel polynôme s'appelle polynôme minimal de  $M$ .

2. Exemples.

- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Déterminer le polynôme minimal de  $\lambda I_n$ , où  $I_n$  est la matrice identité d'ordre  $n$ .
- Soit  $P$  la matrice d'un projecteur  $p$  distinct de 0 et Id. Déterminer le polynôme minimal de  $P$ .

3. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de polynôme minimal  $K$ . Montrer que l'ensemble des racines réelles de  $K$  est égal à l'ensemble des valeurs propres réelles de  $M$ .

- C'est du cours (plus précisément Chapitre 6 - Propriété 30). Rappelons l'argument utilisé : la famille  $(I_n, M, M^2, \dots, M^{n^2})$  est de cardinal  $n^2+1$  dans un espace  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de dimension  $n^2$ . Cette famille est donc liée, de sorte qu'il existe  $(a_0, \dots, a_{n^2}) \neq (0, \dots, 0)$  tels que :

$$a_0 I_n + a_1 M + \dots + a_{n^2} M^{n^2} = 0_n.$$

Le polynôme  $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n^2} X^{n^2}$  est donc annulateur de  $M$ , et est non nul. Ainsi  $P \in \mathcal{A}$ , et  $\mathcal{A}$  n'est pas réduit au polynôme nul (qui est bien lui aussi annulateur de  $M$ ).

- On vient de montrer que  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ . Montrons que cet ensemble est stable par combinaison linéaire. Soit pour cela  $P, Q \in \mathcal{A}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . On a :

$$(\alpha P + \beta Q)(M) = \alpha P(M) + \beta Q(M) = \alpha 0_n + \beta 0_n = 0_n.$$

Donc  $(\alpha P + \beta Q) \in \mathcal{A}$ , et  $\mathcal{A}$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}[X]$ .

- Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $Q \in \mathcal{A}$ . Montrons que  $P \times Q \in \mathcal{A}$  :

$$(P \times_{\mathbb{C}[X]} Q)(M) = P(M) \times_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} Q(M) = P(M) \times 0_n = 0_n.$$

Donc  $P \times Q$  appartient bien à  $\mathcal{A}$ .

**Remarque.** Un sous-ensemble de  $\mathbb{C}[X]$  vérifiant 1.(b) et 1.(c) est appelé un *idéal* de  $\mathbb{C}[X]$ , notion qui dépasse le programme d'ECS.

- (d) L'ensemble  $\{\deg(P), P \in \mathcal{A} \setminus \{0_{\mathbb{C}[X]}\}\}$  est une partie de  $\mathbb{N}$  non vide (d'après la question 1.(a)). Elle admet donc un plus petit élément  $d \geq 0$ . Considérons  $P \in \mathcal{A}$  tel que  $\deg(P) = d$ .  $P$  est bien un polynôme non nul de  $\mathcal{A}$  et de degré minimal. Quitte à le normaliser (c'est-à-dire à le diviser par son coefficient dominant), on peut supposer de plus qu'il est unitaire (il appartiendra alors toujours à  $\mathcal{A}$  car  $\mathcal{A}$  est un sous-espace vectoriel).

Dans la suite, on prend  $K \in \mathcal{A}$  unitaire de degré minimal (on vient de voir qu'un tel polynôme existe bien). Montrons que :

$$\mathcal{A} = \{KQ, Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

- ▷ D'après la question 1.(b), on a  $KQ \in \mathcal{A}$  pour tout  $Q \in \mathbb{C}[X]$  puisque  $K \in \mathcal{A}$ . D'où l'inclusion  $\{KQ, Q \in \mathbb{C}[X]\} \subset \mathcal{A}$ .
- ◁ Soit  $P \in \mathcal{A}$ . Effectuons la division euclidienne de  $P$  par  $K$ . Il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$  tel que :

$$P = KQ + R \quad \text{avec } \deg(R) < \deg(K).$$

En évaluant cette égalité en  $M$ , on obtient :

$$0_n = P(M) = K(M) \times Q(M) + R(M) = 0_n \times Q(M) + R(M) = R(M).$$

Ainsi on a  $R \in \mathcal{A}$  avec  $\deg(R) < \deg(K) = d$ . Par définition de  $d$  ( $K$  de degré minimal parmi les polynômes non nuls de  $\mathcal{A}$ ), on a donc nécessairement  $R = 0$ . On obtient donc :

$$P = KQ + R = KQ \in \{KQ, Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

D'où l'inclusion réciproque.

D'où l'égalité des deux ensembles.

**Remarque.** Cela permet en particulier de montrer que le polynôme minimal d'une matrice  $M$  est unique. En effet, si  $K_1$  et  $K_2$  sont deux polynômes minimaux de  $M$ , alors on aurait :

$$K_2 \in \mathcal{A} = \{K_1Q, Q \in \mathbb{C}[X]\} \quad \Rightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{C}[X], K_2 = K_1 \times Q.$$

En prenant les degrés, on obtient :

$$\deg(K_2) = \deg(K_1) + \deg(Q).$$

Or  $\deg(K_2)$  et  $\deg(K_1)$  sont égaux par définition des polynômes minimaux. Donc  $\deg(Q) = 0$ , et il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tel que :

$$K_2 = \lambda K_1.$$

Comme enfin ces deux polynômes sont unitaires,  $\lambda = 1$  et  $K_1 = K_2$ . On parlera donc **du** polynôme minimal de  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (et non pas **d'un** polynôme minimal de  $M$ ).

2. (a) Le polynôme  $K = X - \lambda$  est annulateur de  $\lambda I_n$ , unitaire. Et il est de degré minimal : en effet si  $P$  est annulateur de  $\lambda I_n$  et  $\deg(P) < 1$ , alors  $P$  est constant de la forme  $a$  avec  $a \in \mathbb{C}$ . Et on a dans ce cas  $0_n = P(\lambda I_n) = aI_n$  qui est nul si et seulement si  $a = 0$ .  $P$  est le polynôme nul alors.
- (b) Comme  $P^2 = P$ ,  $K = X^2 - X$  est un polynôme annulateur de  $P$ .

Montrons que c'est le polynôme minimal de  $P$ . Notons pour cela que comme  $p$  est distinct de 0 et  $Id$ ,  $G = E_0(p) \leq \{0\}$  et  $F = E_1(p) \neq \{0\}$ , et donc 0 et 1 sont valeurs

propres de  $p$ , et de  $P$  aussi. Si  $Q$  est un polynôme annulateur non nul de  $p$ , 0 et 1 sont donc parmi ses racines. Ainsi il existe  $R \in \mathbb{C}[X]$  non nul tel que :

$$Q = X(X - 1)R = K \times R \quad \text{de degré} \geq 2.$$

Ainsi  $K$  est bien unitaire et de degré minimal parmi les polynômes annulateurs non nuls de  $P$ . C'est donc le polynôme minimal.

3. Comme  $K$  est annulateur de  $M$ , les valeurs propres de  $M$  sont parmi les racines de  $K$ . On souhaite montrer que ce sont exactement les racines de  $K$ . Soit  $a \in \mathbb{C}$  une racine de  $K$ . Supposons par l'absurde que  $a$  ne soit pas valeur propre de  $M$ . Comme  $K(a) = 0$ , il existe  $Q \in \mathbb{C}[X]$  non nul (car  $K$  est non nul) tel que :

$$K = (X - a)Q \quad \text{ce qui donne} \quad 0_n = (M - aI_n)Q(M).$$

Mais comme  $a$  n'est pas valeur propre de  $M$ , la matrice  $M - aI_n$  est inversible, de sorte que  $Q(M) = 0_n$ .  $Q$  serait alors un polynôme annulateur de  $M$  non nul et de degré  $< \deg(K)$ . C'est contradictoire avec la définition de polynôme minimal.

Ainsi l'ensemble des racines de  $K$  est égal à  $\text{Sp}(M)$ .

## Espaces euclidiens, endomorphismes symétriques

### Exercice 24.23 (★)

Pour  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on pose  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^t AB)$ . On note  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

1. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , en déterminer une base et la dimension.
3. Déterminer une base de  $F^\perp$ .
4. On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer le projeté orthogonal de  $A$  sur  $F$  et en déduire  $\min_{B \in F} \|A - B\|$ .

1. Montrons que l'application  $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t MN)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

- *Linéarité à gauche.* Soient  $(M_1, M_2, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^3$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2, N \rangle &= \text{Tr}({}^t (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) N) \\ &= \text{Tr}((\lambda_1 {}^t M_1 + \lambda_2 {}^t M_2) N) \text{ par lin. de la transposition} \\ &= \text{Tr}(\lambda_1 {}^t M_1 N + \lambda_2 {}^t M_2 N) \\ &= \lambda_1 \text{Tr}({}^t M_1 N) + \lambda_2 \text{Tr}({}^t M_2 N) \text{ par lin. de la trace} \\ &= \lambda_1 \langle M_1, N \rangle + \lambda_2 \langle M_2, N \rangle \end{aligned}$$

D'où la linéarité à gauche.

- *Symétrie.* Soient  $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on a :

$$\langle N, M \rangle = \text{Tr}({}^t NM) = \text{Tr}({}^t ({}^t MN)) = \text{Tr}({}^t MN) = \langle M, N \rangle$$

D'où la symétrie, et par conséquent la linéarité à droite également.

- *Positif.* Commençons par rappeler le calcul classique de  $\text{Tr}({}^tAA)$  dans le cas général où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (à savoir refaire). Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$[{}^tAA]_{i,i} = \sum_{j=1}^n [{}^tA]_{i,j} [A]_{j,i} = \sum_{j=1}^n a_{j,i} a_{j,i} = \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

On en déduit que :

$$\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n [{}^tAA]_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

Pour  $n = 2$ , on a donc en particulier :

$$\langle A, A \rangle = a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 + a_{2,1}^2 + a_{2,2}^2 \geq 0$$

- *Défini positif.* Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle A, A \rangle = 0 &\Leftrightarrow \text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \underbrace{a_{j,i}^2}_{\geq 0} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall i, j \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, a_{j,i} = 0 \\ &\Leftrightarrow A = 0_{2,2} \end{aligned}$$

Ainsi  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire.

2. On a :

$$F = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$  est donc génératrice de  $F$ , et elle est libre car formée de **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de  $F$ , de sorte que  $\dim(F) = 2$ .

3. Quelques rappels pour commencer.

### Rappel. Orthogonal d'un sous-espace.

Si  $F$  est un sous-espace d'un espace euclidien  $E$ , on définit l'orthogonal de  $F$  par :

$$F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Rappelons que :

- $F^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  supplémentaire de  $F$ , de sorte que :

$$E = F \oplus F^\perp.$$

En particulier, on a  $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$ .

- Si  $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ , alors :

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \langle x, u_i \rangle = 0 \quad \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket.$$

- La concaténation d'une base orthonormée de  $F$  et d'une base orthonormée de  $F^\perp$  est une base orthonormée de  $E$ .

Tout d'abord, notons que  $\dim F^\perp = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim F = 4 - 2 = 2$ . On a :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a - d = 0 \\ c + b = 0 \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

De même,  $\left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$  est une famille génératrice de  $F^\perp$  et libre car formée de **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de  $F^\perp$ .

4. Commençons par rappeler les différentes méthodes pour calculer le projeté orthogonal sur un sous-espace.

**Rappel. Calcul du projeté orthogonal sur un s.e.v.  $F$ .**

On procédera différemment selon la situation dans laquelle on se trouve :

- si on dispose (facilement) d'une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $F$ , on utilisera la formule suivante :

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i.$$

- si on dispose d'une base  $(u_1, \dots, u_p)$  de  $F$  qui n'est pas orthonormée, alors on procédera comme suit :

- (i) on exprime que  $p_F(x) \in F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$  :

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad p_F(x) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p.$$

- (ii) on exprime que  $x - p_F(x) \in F^\perp$  :

$$\begin{cases} \langle x - p_F(x), u_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle x - p_F(x), u_p \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle x, u_1 \rangle = \lambda_1 \langle u_1, u_1 \rangle + \dots + \lambda_p \langle u_p, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, u_p \rangle = \lambda_1 \langle u_1, u_p \rangle + \dots + \lambda_p \langle u_p, u_p \rangle \end{cases}.$$

- (iii) on résout ce système linéaire pour obtenir  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ , et donc  $p_F(x)$ .

- enfin si  $F^\perp$  est de « petite » dimension (en pratique, si  $\dim(F^\perp) < \dim(F)$ ), on préférera calculer le projeté orthogonal sur  $F^\perp$ , puis utiliser le fait que  $p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x)$ .

Notons ici que  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ , donc on dispose d'une base orthogonale de  $F$ .

De plus, on a :

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1 + (-1)^2 = 2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2.$$

Posons  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .  $(e_1, e_2)$  est donc une base orthonormée de  $F$ . On a donc d'après le cours :

$$\begin{aligned} p_F(A) &= \langle A, e_1 \rangle e_1 + \langle A, e_2 \rangle e_2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Rappel. Distance à un sous-espace  $F$ .**

Le minimum  $\min\{\|x - y\|, y \in F\}$  existe et est atteint en un unique point de  $F$  qui est  $p_F(x)$ . On appelle distance de  $x$  à  $F$ , notée  $d(x, F)$ , ce minimum, de sorte que :

$$d(x, F) = \min\{\|x - y\|, y \in F\} = \|x - p_F(x)\|.$$

On a donc ici :

$$\begin{aligned} \min_{B \in F} \|A - B\| &= \|A - p_F(A)\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2} = 1. \end{aligned}$$

**Exercice 24.24 (★★ - Inégalité de Bessel)**

Soit  $E$  un espace euclidien, soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base orthonormée de  $F$ . On note  $p_F$  la projection orthogonale sur  $F$ .

Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$ .

Soit  $x \in E$ . Puisque  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée de  $F$ , on rappelle que :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$$

et on a de plus :

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle^2.$$

D'autre part par définition du projeté orthogonal, on a  $p_F(x) \in F$  et  $x - p_F(x) \in F^\perp$  de sorte que ces vecteurs sont orthogonaux. Par le théorème de Pythagore, on obtient :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \underbrace{\|x - p_F(x)\|^2}_{\geq 0} \geq \|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle^2.$$

D'où l'inégalité voulue.

**Exercice 24.25 (★★)**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ , et soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . On note  $F = \text{Vect}(e_1 + e_2 + \dots + e_n)$ . Déterminer la distance de  $e_1$  à  $F$ , c'est-à-dire  $\min_{x \in F} \|e_1 - x\|$ .

**Exercice 24.26 (★★★ - QSP HEC 2018)**

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On note  $H$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les trois polynômes  $(X-1)(X-2)(X-4)$ ,  $(X-1)(X-3)(X-4)$  et  $(X-2)(X-3)(X-4)$ .

- (a) Justifier que  $H$  est un hyperplan de  $E$ .  
(b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à  $H$ . Est-elle unique ?
- On considère le produit scalaire sur  $E$  défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4).$$

Calculer, pour tout polynôme  $P \in E$ , la projection orthogonale de  $P$  sur  $H^\perp$ .

Commençons par quelques rappels sur les formes linéaires et hyperplans.

**Rappels. Formes linéaires et hyperplans.**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. On appelle :

- hyperplan de  $E$  tout espace vectoriel de dimension  $\dim(E) - 1$  ;
- forme linéaire sur  $E$  une application linéaire de  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Rappelons les résultats principaux sur le lien entre formes linéaires et hyperplans :

- $H$  est un hyperplan de  $E$  si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
- Si  $H = \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$  où  $\varphi$  et  $\psi$  sont des formes linéaires non nulle sur  $E$ , alors il existe  $\lambda \neq 0$  tel que  $\psi = \lambda\varphi$ .

Pour plus de détails, je vous renvoie au **Complément 2 - Formes linéaires et hyperplans**.

- (a) Notons  $P_3 = (X-1)(X-2)(X-4)$ ,  $P_2 = (X-1)(X-3)(X-4)$  et  $P_1 = (X-2)(X-3)(X-4)$ .

**Déjà vu ?**

Ces polynômes devraient vous faire penser aux polynômes de Lagrange associés aux réels 1, 2, 3, 4, même s'ils n'ont pas été normalisés (il faudrait changer le coefficient dominant de  $P_1$  par exemple pour que  $P_1(1) = 1$ ). Cela devrait nous aider d'avoir ça en tête pour la suite de l'exercice.

Montrons que  $(P_1, P_2, P_3)$  est une famille libre. Soient pour cela  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que :

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0.$$

On évalue cette relation en  $X = 1$ . On obtient :

$$\underbrace{a P_1(1)}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

De même en évaluant en  $X = 2, 3$ , on obtient  $b = c = 0$ . Donc la famille  $(P_1, P_2, P_3)$  est libre et  $H = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$  est de dimension  $3 = \dim(E) - 1$ . C'est donc un hyperplan de  $E$ .

- (b) On sait par le cours que  $H$  est le noyau d'une forme linéaire non nulle, mais le cours ne nous dit pas comment trouver cette forme linéaire.

Visiblement, les polynômes  $(P_1, P_2, P_3)$  sont liés aux polynômes de Lagrange (il faudrait les renormaliser) associés à  $1, 2, 3, 4$ . Manque donc le quatrième polynôme  $P_4 = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$ . Tous ces polynômes se caractérisent à l'aide de l'évaluation en  $1, 2, 3, 4$ . Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on considère donc la forme linéaire :

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ P & \mapsto P(a) \end{cases}.$$

Choisissons  $a$  de sorte que  $H = \text{Ker}(\varphi_a)$ . On remarque que pour  $a = 4$ , on a bien  $\varphi_4(P_i) = 0$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Donc on a  $H \subset \text{Ker}(\varphi)$ . Pour montrer l'égalité, on étudie les dimensions. On a par le théorème du rang :

$$4 = \dim \text{Ker}(\varphi_4) + \dim \text{Im}(\varphi_4).$$

Or  $\text{Im}(\varphi_4)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}$ , non nul car  $\varphi_4$  est non nul ( $\varphi_4(1) = 1$  par exemple). Donc  $\text{Im}(\varphi_4) = \mathbb{R}$  et on a :

$$\dim \text{Ker}(\varphi_4) = \dim(E) - 1.$$

Ainsi  $\text{Ker}(\varphi_4)$  est aussi un hyperplan de  $E$  (ce qu'on savait avec le **Complément 2 - Formes linéaires et hyperplans** puisque c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle). Par égalité des dimensions et l'inclusion  $H \subset \text{Ker}(\varphi_4)$ , on peut donc conclure que :

$$H = \text{Ker}(\varphi).$$

Il n'y a pas unicité de la forme linéaire : par exemple  $2\varphi_4$  convient aussi puisque  $\text{Ker}(2\varphi_4) = \text{Ker}(\varphi_4) = H$ .

**Remarque.** Et on a d'ailleurs montré dans le **Complément 2 - Formes linéaires et hyperplans** que toutes les formes linéaires qui conviennent sont de cette « forme », puisque si  $H = \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que  $\varphi = \lambda\psi$ .

2. Montrons que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ . La bilinéarité, la symétrie et la positivité ne posent pas de difficulté. Montrons le caractère défini positif. Soit pour cela  $P \in E$  tel que :

$$\langle P, P \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad P(1)^2 + P(2)^2 + P(3)^2 + P(4)^2 = 0.$$

On en déduit que  $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$ .  $P$  admet donc 4 racines distinctes, et est de degré  $\leq 3$ . C'est donc le polynôme nul.

Ainsi  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est bien un produit scalaire sur  $E$ .



Commençons par déterminer  $H^\perp$ . On a :

$$Q \in H^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle P_1, Q \rangle = 0 \\ \langle P_2, Q \rangle = 0 \\ \langle P_3, Q \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(1) = 0 \\ Q(2) = 0 \\ Q(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_4 \text{ divise } Q$$

$$\Leftrightarrow_{Q \in \mathbb{R}_3[X]} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad Q = \lambda P_4$$

Ainsi on a  $H^\perp = \text{Vect}(P_4)$ . On dispose donc de la base orthonormée  $\left(e_4 = \frac{P_4}{\|P_4\|}\right)$  de  $H^\perp$ .

D'où l'expression du projeté orthogonal de  $P \in E$  sur  $H^\perp$  :

$$p_{H^\perp}(P) = \langle P, e_4 \rangle e_4 = \frac{\langle P, P_4 \rangle}{\|P_4\|^2} P_4.$$

Or on a :

$$\|P_4\|^2 = P_4(4)^2 = 36 \quad \text{et} \quad \langle P, P_4 \rangle = 6P(4).$$

Ainsi le projeté orthogonal de  $P \in E$  sur  $H^\perp$  est :

$$p_{H^\perp}(P) = \frac{6P(4)}{36} P_4 = \frac{P(4)}{6} P_4.$$

**Exercice 24.27 (★★)**

Soit  $n \geq 1$  et soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On définit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}[X]$  par  $f(P) = -P'' + 2XP' + P$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Montrer que pour tout  $P, Q \in E$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$  converge.
3. Montrer que  $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
4. Prouver que  $\forall P, Q \in E$ ,  $\langle P', Q' \rangle = \langle f(P), Q \rangle - \langle P, Q \rangle$ .
5. En déduire que  $f$  est un endomorphisme symétrique de  $E$ .

1. Pour tout  $P \in E$ , on a  $\deg(P) \leq n$  et donc :

$$\deg(f(P)) \leq \max(\deg(P''), \deg(XP'), \deg(P)) \leq n.$$

Donc  $f$  est bien à valeur dans  $E$ .

Montrons que  $f$  est linéaire. Pour tout  $P, Q \in E$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta Q) &= -(\alpha P + \beta Q)'' + 2X(\alpha P + \beta Q)' + (\alpha P + \beta Q) \\ &= -(\alpha P'' + \beta Q'') + 2X(\alpha P' + \beta Q') + (\alpha P + \beta Q) \\ &= \alpha(-P'' + 2XP' + P) + \beta(-Q'' + 2XQ' + Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q). \end{aligned}$$

Donc  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

2. Soit  $P$  et  $Q \in E$ , qu'on supposera non nul (sinon la convergence est évidente). Notons respectivement  $a_p X^p$  et  $b_q X^q$  les termes dominants de  $P$  et  $Q$ . La fonction  $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$  est continue comme produit de fonctions qui le sont. L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$  est donc généralisée en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

En  $+\infty$ , on a :

- $t^2 P(t)Q(t)e^{-t^2} \sim a_p b_q t^{2+p+q} e^{-t^2} \underset{u=t^2}{=} a_p b_q u^{1+\frac{p+q}{2}} e^{-u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$  par croissance comparées. Ainsi on a  $P(t)Q(t)e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ .
- $\frac{1}{t^2} > 0$  pour tout  $t > 0$ .
- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  converge en tant qu'intégrale de Riemann en  $+\infty$  d'exposant  $2 > 1$ .

Par théorème de comparaison, on en déduit que  $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$  converge. On montre de même la convergence en  $-\infty$ . D'où la convergence de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ .

3. Montrons que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .

- *Linéarité à gauche.*  $\forall P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t)Q(t)e^{-t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t))Q(t)e^{-t^2} dt \\ &= \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(t)Q(t)e^{-t^2} dt + \lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(t)Q(t)e^{-t^2} dt \\ &\text{par linéarité de l'intégrale (les intégrales convergent !)} \\ &= \lambda_1 \langle P_1, Q \rangle + \lambda_2 \langle P_2, Q \rangle \end{aligned}$$

- *Symétrie.*

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t^2} dt = \langle Q, P \rangle.$$

En particulier, on en déduit que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est linéaire à droite.

- *Positivité.* Pour tout  $P \in E$

$$\langle P, P \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2} dt \geq 0$$

en tant qu'intégrale d'une fonction positive.

- *Défini positif.* Soit  $P$  tel que  $\langle P, P \rangle = 0$ . On a :

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2} dt$$

Or  $t \mapsto P(t)^2 e^{-t^2}$  est **continue** et **positive** sur  $\mathbb{R}$ . Son intégrale est donc nulle si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t)^2 e^{-t^2} = 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = 0.$$

$P$  admet donc une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Donc  $P = 0_E$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est défini positif.

Ainsi  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .

4. Pour tout  $P, Q \in E$ , on a par linéarité à gauche :

$$\langle f(P), Q \rangle - \langle P, Q \rangle = -\langle P'', Q \rangle + \langle 2XP', Q \rangle. \quad (*)$$

Or on a :

$$\langle P'', Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2} dt.$$

Soit  $A < B$ . Effectuons une intégration par parties sur le **segment**  $[A, B]$ .

$$+ \left| \begin{array}{cc} Q(t)e^{-t^2} & P''(t) \\ \swarrow & \searrow \\ [Q'(t) - 2tQ(t)]e^{-t^2} & \int P'(t) \end{array} \right.$$

Les fonctions  $t \mapsto P'(t)$  et  $t \mapsto Q(t)e^{-t^2}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_A^B P''(t)Q(t)e^{-t^2} dt &= [P'(t)Q(t)e^{-t^2}]_A^B - \int_A^B P'(t) [Q'(t) - 2tQ(t)] e^{-t^2} dt \\ &= P'(B)Q(B)e^{-B^2} - P'(A)Q(A)e^{-A^2} - \int_A^B P'(t) [Q'(t) - 2tQ(t)] e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

On obtient lorsque  $B \rightarrow +\infty$  (tout converge d'après la question 2. et par croissance comparée) :

$$\int_A^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2} dt = -P'(A)Q(A)e^{-A^2} - \int_A^{+\infty} P'(t) [Q'(t) - 2tQ(t)] e^{-t^2} dt$$

Et lorsque  $A \rightarrow -\infty$  (de même, tout converge) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t) [Q'(t) - 2tQ(t)] e^{-t^2} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} 2tP'(t)Q(t)e^{-t^2} dt$$

soit encore :

$$\langle P'', Q \rangle = -\langle P', Q' \rangle + \langle 2XP', Q \rangle.$$

D'où en substituant dans (\*) :

$$\langle f(P), Q \rangle - \langle P, Q \rangle = \langle P', Q' \rangle - \langle 2XP', Q \rangle + \langle 2XP', Q \rangle = \langle P', Q' \rangle.$$

5. Commençons par rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique.

**Rappel. Endomorphisme symétrique.**

Un endomorphisme  $f$  d'un espace euclidien  $E$  est symétrique si :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle.$$

Ici on a pour tout  $P, Q \in E$  :

$$\begin{aligned} \langle f(P), Q \rangle &\stackrel{4.}{=} \langle P', Q' \rangle + \langle P, Q \rangle \\ &= \langle Q', P' \rangle + \langle Q, P \rangle \quad \text{par sym. du prod. scal.} \\ &\stackrel{4.}{=} \langle f(Q), P \rangle = \langle P, f(Q) \rangle \quad \text{toujours par sym.} \end{aligned}$$

Donc  $f$  est bien un endomorphisme symétrique de  $E$ .

**Exercice 24.28 (★★)**

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose  $S = {}^tAA$ . Montrer que  $S$  est symétrique, et que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
2. Soit  $S$  une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. Montrer qu'il existe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $S = {}^tAA$ .
3. **Application.**  $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Déterminer une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $S = {}^tAA$ .

1. Commençons par quelques rappels sur l'application transposée.

**Rappel. Application transposée.**

- |   |   |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})</math> est linéaire.</li> <li>• <math>{}^t({}^tA) = A</math>.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>{}^t(AB) = {}^tB {}^tA</math>.</li> <li>• <math>\text{Tr}({}^tA) = \text{Tr}(A)</math>.</li> </ul> |
|---|---|

En utilisant les propriétés de la transposée, on obtient que  $S$  est bien symétrique puisque  ${}^tS = {}^t({}^tAA) = ({}^tA)({}^t({}^tA)) = {}^tAA$ .

Montrons à présent que les valeurs propres de  $S$  sont toutes positives. Soit pour cela  $\lambda$  une valeur propre de  $S$ , et  $X \neq 0_{n,1}$  un vecteur propre associé. On a :

$${}^tAAX = \lambda X \quad \Rightarrow \quad {}^t(AX)(AX) = {}^tX {}^tAAX = \lambda {}^tXX.$$

D'où en notant  $\|\cdot\|$  la norme sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  associée au produit scalaire canonique :

$$\|AX\|^2 = \lambda \|X\|^2 \quad \stackrel{\|X\| \neq 0}{\Rightarrow} \quad \lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0.$$

Les valeurs propres de  $S$  sont donc positives ou nulles.

2. Quelques rappels tout d'abord sur la réduction des endomorphismes et matrices symétriques.

### Rappel. Réduction des endomorphismes et matrices symétriques.

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ .

- Les valeurs propres de  $f$  sont réelles.
- Les sous-espaces propres de  $f$  sont deux à deux orthogonaux. En particulier, une famille de vecteurs associés à des valeurs propres distinctes est orthogonale.
- **Théorème spectral.**  
 $f$  est diagonalisable, à valeurs propres réelles, et il existe une **base orthonormée** de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ .
- **Traduction matricielle du théorème spectral.**  
Si  $A$  est symétrique réelle, alors  $A$  est diagonalisable, à valeurs propres réelles, et il existe  $P$  orthogonale et  $D$  diagonale telles que :

$$D = P^{-1}AP = {}^tPAP.$$

Comme  $S$  est symétrique réelle, elle diagonalise en base orthonormée, et il existe  $P$  orthogonale, et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  diagonale telles que :

$$S = PDP^{-1} = PD{}^tP.$$

Notons  $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$  (existe bien car les  $\lambda_i$  sont positif par hypothèse). On a :

$$S = PD'^2{}^tP = (PD'{}^tP)(PD'{}^tP) = (PD'{}^tP)^2.$$

Posons  $A = PD'{}^tP$ . On a  ${}^tA = {}^t(PD'{}^tP) = {}^t({}^tP)D'P = PD'{}^tP = A$ , et donc :

$$S = A^2 = {}^tAA.$$

D'où le résultat voulu.

3.  $S$  étant symétrique réelle, on sait qu'il existe bien une telle matrice  $A$ . Procédons comme à la question 2., en diagonalisant  $S$  en base orthonormée.

Commençons par chercher les valeurs propres de  $S$ . On a :

$$S - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 1. Donc 1 est valeur propre de  $S$  et  $\dim(E_1(S)) = 2 - 1 = 1$ . De plus on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(S) \Leftrightarrow x + y = 0.$$

$$\text{Donc } E_1(S) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Pour obtenir l'autre valeur propre, on peut au choix prendre la trace de  $S$  (qui est diagonalisable car symétrique réelle), ou remarquer (comme d'habitude pour ce « type » de matrices) que :

$$S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc 3 est valeur propre de  $S$ , et  $1 \leq \dim(E_3(S)) \leq 1$  (car on a déjà  $\dim(E_1(S)) = 1$ ), de sorte que  $E_3(S) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

On a donc une base de vecteurs propres de  $S$ , reste à obtenir une base orthonormée de vecteurs propres. Comme  $S$  est symétrique réelle, ces sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, ce qu'on remarque d'ailleurs dans notre situation. Donc  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est orthogonale. Il reste à normaliser les vecteurs pour obtenir une base orthonormée de vecteurs propres de  $S$  :

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2.$$

En posant  $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \text{diag}(1, 3)$ , on a donc que  $P$  est orthogonale et que :

$$S = PD^tP.$$

En posant  $D' = \text{diag}(1, \sqrt{3})$  et  $A = PD'^tP$ , on a donc :

$$S = {}^tAA.$$

Après calculs, on obtient  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$ .

### Exercice 24.29 (★★)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus  $n$ .

#### Étude d'un endomorphisme

On considère l'application  $u$  qui à  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  associe  $u(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ .

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Déterminer la matrice  $A$  de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
3. (a) Déterminer les valeurs propres de  $u$ .  
 (b)  $u$  est-il un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  ?  
 (c) Montrer que  $u$  est diagonalisable. Préciser la dimension de chaque sous-espace propre.
4. (a) Prouver que pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , il existe un unique polynôme unitaire  $P_k$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que :

$$u(P_k) = k(k+1)P_k.$$

- (b) Montrer que pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $P_k$  est de degré  $k$ .
- (c) Déterminer  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ .

#### Polynômes de Legendre

Soit  $k \in \{0, \dots, n\}$ . On note  $Q_k = (X^2 - 1)^k$  et  $L_k$  la dérivée  $k$ -ième de  $Q_k$  :  $L_k = Q_k^{(k)}$ .

5. Montrer que  $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$  et déterminer son coefficient dominant.
6. Vérifier que  $(X^2 - 1)Q_k' = 2kXQ_k$  puis en dérivant  $(k+1)$  fois cette égalité à l'aide de la formule de Leibniz, montrer que :

$$(X^2 - 1)L_k'' + 2XL_k' = k(k+1)L_k.$$

7. En déduire que  $P_k = \frac{k!}{(2k)!}L_k$ .

**Produit scalaire et orthogonalité**

8. Montrer que  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

9. Montrer que  $u$  est un endomorphisme symétrique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

On pourra pour cela noter que  $u(P) = \frac{d}{dX} \left( (1 - X^2) \frac{dP}{dX} \right)$ .

10. En déduire que la famille  $L_k$  des polynômes de Legendre est orthogonale pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

1. Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a :

$$\deg(u(P)) \leq \max(\deg((X^2-1)P''), \deg(2XP')) = \max(\deg(P'')+2, \deg(P')+1) \leq \deg(P) \leq n.$$

Donc  $u$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Montrons que  $u$  est linéaire. Soit pour cela  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} u(\alpha P + \beta Q) &= (X^2 - 1)(\alpha P + \beta Q)'' + 2X(\alpha P + \beta Q)' = (X^2 - 1)(\alpha P'' + \beta Q'') + 2X(\alpha P' + \beta Q') \\ &= \alpha [(X^2 - 1)P'' + 2XP'] + \beta [(X^2 - 1)Q'' + 2XQ'] \end{aligned}$$

Donc  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. On a :

$$u(1) = 0, \quad u(X) = 2X,$$

et pour tout  $2 \leq k \leq n$  :

$$\begin{aligned} u(X^k) &= (X^2 - 1) [k(k-1)X^{k-2}] + 2X [kX^{k-1}] = [k(k-1) + 2k] X^k - k(k-1)X^{k-2} \\ &= k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2} \end{aligned}$$

La matrice  $A$  de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

3. (a)  $A$  étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres se trouvent sur sa diagonale. Ainsi on a  $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(u) = \{k(k+1), 0 \leq k \leq n\}$ .

(b)  $u$  n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  car  $0 \in \text{Sp}(u)$ .

(c)  $u$  admet  $n+1$  valeurs propres distinctes dans un espace de dimension  $n+1$ .  $u$  est donc diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

4. (a) Soit  $0 \leq k \leq n$ . Comme nous venons de le dire, le sous-espace propre  $E_{k(k+1)}(u)$  est de dimension 1, donc il existe  $Q_k$  un polynôme non nul tel que :

$$E_{k(k+1)}(u) = \text{Vect}(Q_k).$$

Si on note  $\alpha_k$  son coefficient dominant (qui est non nul car  $Q_k \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ ), le polynôme  $P_k = \frac{1}{\alpha_k}Q_k$  est unitaire et on a :

$$E_{k(k+1)}(u) = \text{Vect}(P_k).$$

D'où l'existence d'un tel polynôme  $P_k$ .

Supposons que l'on ait  $R_k$  un polynôme unitaire de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que :

$$u(R_k) = k(k+1)R_k.$$

Alors on aurait  $R_k \in E_{k(k+1)}(u) = \text{Vect}(P_k)$ , de sorte qu'il existerait  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  tel que :

$$R_k = \alpha_k P_k.$$

Les polynômes  $R_k$  et  $P_k$  étant unitaire, on aurait alors  $\alpha_k = 1$ , et donc  $R_k = P_k$ . D'où l'unicité d'un tel polynôme  $P_k$ .

- (b) Soit toujours  $0 \leq k \leq n$  fixé. Écrivons le polynôme  $P_k$  sous la forme (en rappelant qu'il est unitaire !) :

$$P_k = X^d + R$$

où  $d = \deg(P_k)$  et  $R$  polynôme de degré  $< d$ . On a par linéarité de  $u$  (et en utilisant les calculs effectués à la question 2.) :

$$u(P_k) = d(d+1)X^d \underbrace{-d(d-1)X^{d-2} + u(R)}_{\text{poly. de deg. } < d}.$$

Ainsi le coefficient dominant de  $u(P_k)$  est égal à  $d(d+1)$ . Or on a :

$$u(P_k) = k(k+1)P_k = k(k+1)X^d + \underbrace{k(k+1)R}_{\text{poly. de deg. } < d}.$$

En identifiant les coefficients dominants, on obtient donc (la fonction  $x \mapsto x(x+1)$  étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , et donc injective) :

$$d(d+1) = k(k+1) \quad \Rightarrow \quad d = k.$$

Ainsi le polynôme  $P_k$  est bien de degré  $k$ .

- (c) On a vu que  $u(1) = 0 = 0(0+1) \times 1$ , et donc par unicité  $P_0 = 1$ . De même, on a  $u(X) = 2X = 1(1+1)X$ , et donc  $P_1 = X$ .

On cherche  $P_2 = X^2 + bX + c$  satisfaisant  $u(P_2) = 6P_2$ , ce qui se réécrit (en utilisant la linéarité de  $u$ ) :

$$6X^2 + 6bX + 6c = u(X^2) + bu(X) + cu(1) = 6X^2 - 2 + 2bX.$$

D'où le système :

$$\begin{cases} 6b = 2b \\ 6c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Ainsi on a  $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$ .



5. On a  $\deg(Q_k) = 2k$ , d'où en dérivant  $k$  fois,  $\deg(L_k) = 2k - k = k$ .

De plus,  $Q_k$  est unitaire de terme dominant  $X^{2k}$ . En dérivant  $k$  fois, le terme dominant de  $L_k$  est donc :

$$(2k)(2k-1)\dots(k+1)X^k = \frac{(2k)!}{k!}X^k.$$

Ainsi le coefficient dominant de  $L_k$  est  $\frac{(2k)!}{k!}$ .

6. On a :

$$(X^2 - 1)Q'_k = (X^2 - 1) \left[ k(2X)(X^2 - 1)^{k-1} \right] = 2kX(X^2 - 1)^k = 2kXQ_k.$$

Notons  $R = X^2 - 1$  et  $S = 2kX$ , de sorte que l'égalité précédente se réécrit :

$$RQ'_k = SQ_k.$$

On va dériver cette expression  $(k+1)$  fois à l'aide de la formule de Leibniz :

$$\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} R^{(i)} Q_k^{(k+2-i)} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} S^{(i)} Q_k^{(k+1-i)}$$

Or on a  $R^{(i)} = 0$  pour tout  $i \geq 3$  et  $S^{(i)} = 0$  pour tout  $i \geq 2$ . Ce qui donne donc :

$$\binom{k+1}{0} R^{(0)} Q_k^{(k+2)} + \binom{k+1}{1} R^{(1)} Q_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{2} R^{(2)} Q_k^{(k)} = \binom{k+1}{0} S^{(0)} Q_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{1} S^{(1)} Q_k^{(k)}$$

Soit en substituant :

$$(X^2 - 1)Q_k^{(k+2)} + (k+1)2XQ_k^{(k+1)} + \frac{(k+1)k}{2}2Q_k^{(k)} = 2kXQ_k^{(k+1)} + (k+1)2kQ_k^{(k)}$$

D'où :

$$(X^2 - 1)L''_k + 2(k+1)XL'_k + k(k+1)L_k = 2kXL'_k + 2k(k+1)L_k$$

On obtient donc bien l'identité voulue :

$$(X^2 - 1)L''_k + 2XL'_k = k(k+1)L_k.$$

7. L'égalité précédente se réécrit :

$$u(L_k) = k(k+1)L_k.$$

Comme de plus  $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a  $L_k \in E_{k(k+1)}(u) = \text{Vect}(P_k)$ . Il existe donc  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  tel que :

$$L_k = \alpha_k P_k.$$

En identifiant les coefficients dominants, on a  $\frac{(2k)!}{k!} = \alpha_k$ , et donc  $P_k = \frac{k!}{(2k)!} L_k$ .

8. Montrons que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

- *Linéarité à gauche.*  $\forall P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_n[X], \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q \rangle &= \int_{-1}^1 (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t) Q(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t)) Q(t) dt \\ &= \lambda_1 \int_{-1}^1 P_1(t) Q(t) dt + \lambda_2 \int_{-1}^1 P_2(t) Q(t) dt \\ &= \lambda_1 \langle P_1, Q \rangle + \lambda_2 \langle P_2, Q \rangle \end{aligned}$$

- *Symétrie.*

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt = \int_{-1}^1 Q(t) P(t) dt = \langle Q, P \rangle.$$

En particulier, on en déduit que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est linéaire à droite.

- *Positif.*

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \geq 0$$

en tant qu'intégrale d'une fonction positive.

- *Défini positif.* Soit  $P$  tel que  $\langle P, P \rangle = 0$ . On a :

$$0 = \int_{-1}^1 P(t)^2 dt$$

La fonction  $t \mapsto P(t)^2$  étant **continu** et **positive** sur  $[-1, 1]$ , son intégrale est nulle si et seulement si :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad P(t)^2 = 0 \Rightarrow \forall t \in [-1, 1], \quad P(t) = 0.$$

$P$  admet donc une **infinité de racines** (tous les réels entre  $-1$  et  $1$ ). C'est donc le polynôme nul. Donc  $P = 0$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est défini positif.

Ainsi  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

9. Pour montrer que  $u$  est un endomorphisme symétrique de  $\mathbb{R}_n[X]$ , on va revenir à la définition, en notant que  $u(P) = [(X^2 - 1)P']'$  pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

Soit donc  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ . On a :

$$\langle u(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)P'(t)]' Q(t) dt$$

On effectue une intégration par parties.

$$\begin{array}{r} + \left| \begin{array}{l} Q(t) \\ Q'(t) \end{array} \right. \begin{array}{l} \searrow \\ \swarrow \end{array} \begin{array}{l} [(t^2 - 1)P'(t)]' \\ (t^2 - 1)P'(t) \end{array} \end{array}$$

Les fonctions  $t \mapsto Q(t)$  et  $t \mapsto (t^2 - 1)P'(t)$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[-1, 1]$ . Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle u(P), Q \rangle &= \left[ Q(t)(t^2 - 1)P'(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q'(t)(t^2 - 1)P'(t) dt \\ &= - \int_{-1}^1 Q'(t)(t^2 - 1)P'(t) dt \end{aligned}$$

En inversant les rôles de  $P$  et de  $Q$  dans la formule précédente, on obtient :

$$\langle P, u(Q) \rangle = \langle u(Q), P \rangle = - \int_{-1}^1 P'(t)(t^2 - 1)Q'(t) dt = \langle u(P), Q \rangle.$$

Donc  $u$  est un endomorphisme symétrique de  $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

10.  $(L_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une famille de vecteurs propres de  $u$  associés à des valeurs propres distinctes. Comme  $u$  est un endomorphisme symétrique de  $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , on en déduit par le cours que  $(L_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est donc une famille orthogonale pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

### Exercice 24.30 (★★)

Soit  $E$  un espace euclidien et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme symétrique. Montrer qu'il y a équivalence entre :

$$(1) \quad \forall \lambda \in \text{Spec}(f), |\lambda| \leq 1, \quad | \quad (2) \quad \forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|.$$

(2)  $\Rightarrow$  (1) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ , et  $x$  un vecteur propre associé. On a par hypothèse :

$$\|f(x)\| \leq \|x\| \quad \Rightarrow \quad |\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| \leq \|x\| \quad \underset{x \neq 0_E}{\Rightarrow} \quad |\lambda| \leq 1.$$

(1)  $\Rightarrow$  (2) Supposons que  $\text{Spec}(f) \subset [-1, 1]$ . Puisque  $f$  est symétrique, il existe une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres associées. Soit  $x \in E$ . Il existe  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , décomposition de  $x$  dans notre base orthonormée. Rappelons alors quelques résultats de cours :

#### Rappel. Formules dans une base orthonormée

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien rapporté à une **base orthonormée**  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

– Pour tout  $x$  de  $E$ , on a :

$$x = \langle e_1, x \rangle e_1 + \dots + \langle e_n, x \rangle e_n.$$

Autrement dit, on a  $M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix}$ .

– Pour tout  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  et  $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$  de  $E$ , on a :

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \langle x, e_1 \rangle \langle y, e_1 \rangle + \dots + \langle x, e_n \rangle \langle y, e_n \rangle.$$

– Pour tout  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  de  $E$ , on a :

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \langle x, e_1 \rangle^2 + \dots + \langle x, e_n \rangle^2.$$

On a donc ici :

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

et :

$$\|f(x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|x\|^2$$

D'où le résultat voulu.

**Exercice 24.31 (★★★)**

Trouver toutes les matrices  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que :  $X {}^t X X = I_n$ .

En multipliant par  ${}^t X$  à gauche, on obtient :

$${}^t X X {}^t X X = {}^t X.$$

Ainsi  ${}^t X$  est symétrique, et donc  $X$  aussi. Et l'équation de l'énoncé se réécrit alors :

$$X^3 = I_n$$

Comme  $X$  est symétrique,  $X$  est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. De plus, si  $\lambda$  est valeur propre de  $X$ , alors  $\lambda^3 = 1$ , et  $\lambda$  est une racine cubique de l'unité. Or 1 est la seule racine cubique de l'unité dans  $\mathbb{R}$  (qui rappelons le sont les  $\exp\left(\frac{2ik\pi}{3}\right)$  avec  $k = 0, 1, 2$ ). Ainsi  $\text{Sp}(X) = \{1\}$  et  $X$  étant diagonalisable, on a donc  $X = I_n$ . Réciproquement,  $X = I_n$  est bien solution de l'équation.

**Exercice 24.32 (★★★ - QSP HEC 2009)**

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien  $E$ , dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

1. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique  $\phi$  tel que  $f = \phi^2$ .
2. Montrer que  $\text{Ker}(f + g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ .

1. Comme  $f$  est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$  associés respectivement aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (non nécessairement distinctes, mais toutes strictement positives par hypothèse) tel que :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}^2.$$

Soit  $\phi$  l'unique endomorphisme de  $E$  tel que  $M_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ . Un tel endomorphisme existe et est unique car l'application

$$\Phi_{\mathcal{B}} : \phi \in \mathcal{L}(E) \mapsto M_{\mathcal{B}}(\phi) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Puisque cette matrice est symétrique dans une

base orthonormée, on a que  $\phi$  est un endomorphisme symétrique, à valeurs propres strictement positives, et tel que  $M_{\mathcal{B}}(\phi^2) = M_{\mathcal{B}}(\phi)^2 = M_{\mathcal{B}}(f)$ . Ainsi on a bien  $\phi^2 = f$  (par injectivité de  $\Phi_{\mathcal{B}}$ ).

2. L'inclusion  $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f + g)$  est immédiate puisque si  $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ , alors on a  $f(x) = g(x) = 0_E$ , et donc  $(f + g)(x) = 0_E$ .

On étudie l'inclusion réciproque : soit donc  $x \in \text{Ker}(f + g)$ . On a :

$$(f + g)(x) = 0_E \quad \Rightarrow \quad f(x) = -g(x).$$

Utilisons la question 1., et prenons  $\phi$  et  $\psi$  des endomorphismes symétriques tels que  $\phi^2 = f$  et  $\psi^2 = g$ . On a alors :

$$\langle x, f(x) \rangle = \langle x, \phi^2(x) \rangle = \langle \phi(x), \phi(x) \rangle = \|\phi(x)\|^2$$

car  $\phi$  est symétrique. De même on a  $\langle x, g(x) \rangle = \|\psi(x)\|^2$ . D'où avec la première inégalité :

$$\|\phi(x)\|^2 = \langle x, f(x) \rangle = -\langle x, g(x) \rangle = -\|\psi(x)\|^2.$$

Ainsi on a  $\phi(x) = \psi(x) = 0_E$ , et donc  $f(x) = \phi^2(x) = 0_E$  et  $g(x) = \psi^2(x) = 0_E$ . Par suite  $x$  appartient bien à  $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ . D'où  $\text{Ker}(f + g) \subset \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ , et donc l'égalité entre ces deux ensembles.

### Exercice 24.33 (★)

Soit  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forme quadratique définie par :

$$q((x_1, x_2, x_3)) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

1. Déterminer la matrice  $M$  canoniquement associée à  $q$ .
2. Justifier que  $M$  est diagonalisable dans une base orthonormale.
3. Déterminer le signe de  $q$ .
4. Construire une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  constituée de vecteurs propres de  $M$ .
5. Retrouver le signe de  $q$  par une autre méthode.