TD24

Révisions d'algèbre

Polynômes

Exercice 24.1 (★★ - Division euclidienne)

Dans les cas suivants, déterminer le reste de la division euclidienne de A par B.

1. $A = 3x^5 + 4x^2 + 1$, $B = x^2 + 2x + 3$.
2. $A = x^n - 4x + 1$, $B = (x-1)^2$.

Rappelons pour commencer le théorème de division euclidienne :

Rappel. Théorème de division euclidienne pour les polynômes.

Soient A, B deux polynômes, avec $B \neq 0$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R, \\ \deg(R) < \deg(B). \end{cases}$$

Q et R sont appelés le *quotient* et le *reste* de la *division euclidienne* de A par B.

1. On procède à une division euclidienne « à la main ». On obtient après calculs :

$$(3X^5 + 4X^2 + 1) = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) + (-41X - 47).$$

2. Notons que $B = (X-1)^2$ a 1 comme racine double, de sorte que $B(1) = B'(1) = 0$. Par le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R, \\ R = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]. \end{cases}$$

En évaluant en $X = 1$, on obtient :

$$A(1) = B(1)Q(1) + a + b = a + b \quad \Rightarrow \quad a + b = -2.$$

En dérivant, $A' = B'Q + BQ' + a$, puis en évaluant en $X = 1$:

$$A'(1) = B'(1)Q(1) + B(1)Q'(1) + a = a \quad \Rightarrow \quad a = n - 4.$$

En substituant, $b = 2 - n$. On en déduit que le reste de la division euclidienne de P par Q est $(n-4)X + (2-n)$.

Exercice 24.2 (★★ - Équations polynomiales)

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que $P'(x^2) = 4P(x)$.
2. Déterminer tous les $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant la relation $(x^2+1)P''(x) - 6P(x) = 0$.

1. Tout d'abord, notons que $P = 0$ satisfait bien l'équation, et que c'est le seul polynôme constant solution de cette équation.

   Si $\deg(P) = 1$, alors $\deg(P') = 0$ et $\deg(P'(X^2)) = 0 \neq \deg(4P)$, donc P n'est pas solution de l'équation.

   Supposons à présent que $\deg(P) = n \geq 2$, et que P est solution de l'équation. On a :

   $$P'(X^2) = 4P(X) \quad \Rightarrow \quad \deg(P'(X^2)) = \deg(4P(X)).$$

   Or on a $\deg(P'(X^2)) = \deg(P') \times \deg(X^2) = 2n - 2$ et $\deg(4P) = \deg(P) = n$. On obtient :

   $$2n - 2 = n \quad \Rightarrow \quad n = 2.$$

   Écrivons donc $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. On substitue dans l'équation :

   $$2aX^2 + b = 4aX^2 + 4bX + 4c \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2a = 4a \\ 4b = 0 \\ 4c = b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = b = c = 0$$

   ce qui contredit que $a \neq 0$. Ainsi cette équation n'a pas de solution de degré $n \geq 2$.

   Finalement, l'ensemble des solutions de cette équation est $\{0\}$.

2. Soit P solution de l'équation.

   Tout d'abord, supposons que $\deg(P) \leq 1$. Dans ce cas, on a :

   $$P = \frac{1}{6}(X^2 + 1)P'' = 0.$$

   Donc $P = 0$ est le seul polynôme de degré ≤ 1 solution de cette équation.

   Supposons à présent que $\deg(P) = n \geq 2$. On a :

   $$\deg((X^2 + 1)P'') = 2 + n - 2 = n \quad \text{et} \quad \deg(P) = n.$$

   On n'obtient ici aucune information sur le degré de P, contrairement au cas précédent...

   Considérons plus précisément les coefficients dominants. Notons $a_n \neq 0$ le coefficient dominant de P. Alors le coefficient dominant de $(X^2 + 1)P''$ est $n(n-1)a_n X^n$ et celui de $6P$ est $6a_n X^n$. Puisque P est solution de l'équation, ces coefficients dominants sont égaux. Ainsi on a :

   $$n(n-1) = 6 \quad \Rightarrow \quad n^2 - n - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 3 \text{ ou } n = -2.$$

   Ainsi, on a nécessairement que $\deg(P) = 3$. Notons alors $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$ et substituons dans l'équation :

   $$\begin{aligned} (X^2 + 1)(6aX + 2b) = 6aX^3 + 6bX^2 + 6cX + d \quad &\Rightarrow \quad 6aX^3 + 2bX^2 + 6aX + 2b \\ &\qquad\qquad = 6aX^3 + 6bX^2 + 6cX + d \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} 6a = 6a \\ 2b = 6b \\ 6a = 6c \\ 2b = d \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = c \\ d = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi on obtient $P = a(X^3 + X)$.

Réciproquement, on vérifie que tous les polynômes de la forme $a(X^3 + X)$ avec $a \in \mathbb{C}$ sont bien solution de l'équation.

Ainsi l'ensemble des solutions de cette équation est $\{aX^3 + aX,\ a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(X^3 + X)$.

Exercice 24.3 (★★ - Multiplicité d'une racine)

1. Déterminer a et b pour que $P(X) = ax^{n+1} + bx^n + 1$ admette 1 pour racine double. Quel est alors le quotient de $P(x)$ par $(x-1)^2$?
2. Considérons le polynôme $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ où n est un entier naturel impair.

   Montrer que P admet au moins une racine réelle et que celle-ci est une racine simple.

Exercice 24.4 (★★★ - QSP ESCP 2016)

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1$ est strictement monotone.
2. En déduire que si P est un polynôme réel tel que $P(0) = 0$ et $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$, alors $P = x$.

1. On a pour tout $n \geq 0$:
$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 = P(u_n)$$
   où $P = X^2 - X + 1$. On a $\Delta = -3$, et donc P est de signe constant, du signe du coefficient dominant, c'est à dire positif. Ainsi on a :
$$u_{n+1} - u_n = P(u_n) > 0$$
   et (u_n) est strictement croissante.

2. Posons $Q = P(X) - X$ et montrons que $Q = 0$. Pour cela on va montrer que u_n est racine de Q pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Init. On a :
$$Q(u_0) = P(u_0) - u_0 = P(0) - 0 = 0.$$
   D'où la propriété au rang $n = 0$.

   Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que u_n soit racine de Q. On a :
$$\begin{aligned} Q(u_{n+1}) = P(u_{n+1}) - u_{n+1} &= P(u_n^2 + 1) - u_n^2 - 1 = P(u_n)^2 + 1 - u_n^2 - 1 \\ &= P(u_n)^2 - u_n^2 = (P(u_n) - u_n)(P(u_n) + u_n) = 0 \end{aligned}$$
   par hypothèse de récurrence. Ainsi u_{n+1} est aussi racine de Q, d'où la propriété au rang $n + 1$.

   On conclut par principe de récurrence que u_n est racine de Q pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme de plus (u_n) est strictement croissante, les termes de la suite sont deux à deux distincts. Q admet donc une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. D'où le résultat $P(X) = X$.

Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 24.5 (★)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $F = \{(x,y,z,t),\ x+y+z-t=0\}$.
2. $G = \mathrm{Vect}((1,1,2),(0,1,0),(2,-3,4))$.
3. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[x],\ P(0)=P(1)\}$.
4. $I = \left\{\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 24.6 (★★)
Soit $H = \left\{P \in \mathbb{R}_n[x],\ \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$, et en donner une base, sa dimension ainsi qu'un supplémentaire dans $\mathbb{R}_n[x]$.

On commence par montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$:

- $P=0$ est bien dans H puisque $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0$.
- Soient $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $P,Q \in H$, on a :

$$\int_0^1 (\lambda P + \mu Q)(t)\,\mathrm{d}t \underset{\text{lin. de l'int.}}{=} \lambda \underbrace{\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t}_{=0 \text{ car } P\in H} + \mu \underbrace{\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t}_{=0 \text{ car } P\in H} = 0.$$

Donc $\lambda P + \mu Q$ appartient bien à H.

H est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

On cherche à présent la dimension de H. Soit pour cela $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On a :

$$\begin{aligned} P \in H &\Leftrightarrow \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0 = -\frac{a_n}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{n} - \cdots - \frac{a_1}{2} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} H &= \left\{a_nX^n + \cdots + a_1X - \frac{a_n}{n+1} - \frac{a_{n-1}}{n} - \cdots - \frac{a_1}{2},\ a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(X^n - \frac{1}{n+1}, X^{n-1} - \frac{1}{n}, \ldots, X - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

$\left(X^n - \frac{1}{n+1}, X^{n-1} - \frac{1}{n}, \ldots, X - \frac{1}{2}\right)$ est donc une famille génératrice de H. Elle est également libre car étagée en degrés. C'est donc une base de H, et H est de dimension n.

Remarque. On dit alors que H est un hyperplan de $E = \mathbb{R}_n[X]$ puisque de dimension $\dim(E)-1$. On peut consulter à ce sujet le complément de cours sur les formes linéaires et hyperplans.

Un supplémentaire G de H est nécessairement de dimension 1, de la forme $G = \mathrm{Vect}(Q)$ où $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $Q \neq 0$. De plus, on doit choisir Q de telle sorte que $\left(X^n - \frac{1}{n+1}, X^{n-1} - \frac{1}{n}, \ldots, X - \frac{1}{2}, Q\right)$ soit une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On a l'embarras du choix (ou le choix de l'embarras...) : prenons Q constant égal à 1 par exemple, de sorte que la famille obtenue est encore étagée en degré, donc libre. Comme elle est de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Ceci prouve bien que $G = \text{Vect}(1)$ est un supplémentaire de H dans $E = \mathbb{R}_n[X]$:

$$\mathbb{R}_n[X] = H \oplus \text{Vect}(1).$$

Remarques. Toujours à propos du complément de cours sur les formes linéaires et hyperplans.

- On avait montré qu'il suffisait de prendre $Q \notin H$ pour avoir $G = \text{Vect}(Q)$ supplémentaire de H. C'est bien ce qui se produit ici puisque $1 \notin H$.
- Il est démontré qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. On le constate ici avec pour forme linéaire :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to \mathbb{R} \\ P & \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

On vérifie que φ est linéaire (par linéarité de l'intégrale), non nulle ($\varphi(1) = 1 \neq 0$) et que $H = \text{Ker}(\varphi)$. Ce qui prouve immédiatement que H est un sous-espace vectoriel de E, de dimension $\dim(E) - 1 = n$ (par le théorème du rang).

Exercice 24.7 (★)

Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y + 2z + t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, -1, 1, -1))$;
2. $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$, et $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$, $G = \text{Vect}(u_3, u_4)$;
3. (★) $E = \mathbb{R}[x]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[x] \ ; \ P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[x]$;
4. (★) $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \ ; \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(-x) = f(x)\}$ et $F = \{f \in E \ ; \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(-x) = -f(x)\}$.

4. Procédons par Analyse - Synthèse.

   Analyse. Soit $h \in E$. Supposons qu'il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que :

$$h = f + g, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) + g(x) \quad (*)$$

   On a alors par parité de f et imparité de g que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x) \quad (**)$$

   On obtient en faisant respectivement $(*) + (**)$ et $(*) - (**)$:

$$h(x) + h(-x) = 2f(x) \quad \text{et} \quad h(x) - h(-x) = 2g(x).$$

   Ainsi, f et g sont déterminés de manière unique par :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{h(x) + h(-x)}{2} \quad \text{et} \quad g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{h(x) - h(-x)}{2}.$$

Synthèse. Posons alors $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{h(x)+h(-x)}{2}$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{h(x)-h(-x)}{2}$, et vérifions les points suivants :

- $h = f + g$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que :
$$f(x)+g(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2} + \frac{h(x)-h(-x)}{2} = h(x).$$
- $f \in F$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que :
$$f(-x) = \frac{h(-x)+h(-(-x))}{2} = \frac{h(x)+h(-x)}{2}.$$
- $g \in G$. En effet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que :
$$g(-x) = \frac{h(-x)-h(-(-x))}{2} = \frac{h(-x)-h(x)}{2} = -\frac{h(x)-h(-x)}{2} = g(x).$$

On peut donc conclure que pour tout $h \in E$, il existe un unique couple $(f,g) \in F \times G$ tel que $h = f+g$. En d'autres termes, on a donc $E = F \oplus G$.

Exercice 24.8 (★★)
Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer une base du noyau et de l'image de chacune d'elles ainsi que leur rang et leur matrice dans les bases canoniques :

$f_1 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x-y, 2z, x-z) \in \mathbb{R}^3$;

$f_2 : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto 2XP - (X^2-1)P' \in \mathbb{R}_2[X]$;

$f_3 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P + P' \in \mathbb{R}_3[X]$;

$f_4 : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$;

$f_5 : M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$f_6 : M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrons que f est linéaire pour commencer : soient $u = (x,y,z), v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :
$$\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$
D'où :
$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= ((\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), 2(\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') - (\lambda z + \mu z')) \\ &= \lambda(x-y, 2z, x-z) + \mu(x'-y', 2z', x'-z') = \lambda f(u) + \mu f(v). \end{aligned}$$
Donc f est linéaire. De plus $E = F = \mathbb{R}^3$, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Pour montrer que f est un automorphisme, il suffit de montrer que f est injective. En effet, on rappelle le résultat important suivant.

Rappel.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors on a équivalence entre :

$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ bijective}$$

Rappelons également que :

- endomorphisme = linéaire + $E = F$,
- isomorphisme = linéaire + bijectif,
- automorphisme = linéaire + $E = F$ + bijectif.

On calcule donc son noyau (qui est bien souvent plus simple à déterminer que l'image) :

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. f est donc injective, et c'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Puisque f est un automorphisme, f est en particulier surjective, de sorte que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. On a donc que $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Enfin, donnons la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$:

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. A faire.

3. Montrons que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_3[X]$. Soit pour cela $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q) + (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P + \mu Q + \lambda P' + \mu Q' \\ &= \lambda(P + P') + \mu(Q + Q') = \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

De plus pour tout $P \in E$, on a $\deg(f(P)) \leq \max(\deg(P), \deg(P')) \leq 3$. Donc f est un endomorphisme de E.

On cherche le noyau de f. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a $P' = 3aX^2 + 2bX + c$, et :

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad f(P) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad aX^3 + (3a + b)X^2 + (2b + c)X + (c + d) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ 3a + b = 0 \\ 2b + c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = d = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, et f est injective. Comme de plus f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**, on en déduit que f est bijective. C'est un automorphisme de E. En particulier, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_3[X]$, et $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$.

Reste à déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de E. On calcule pour cela :

$$f(1) = 1, \quad f(X) = 1 + X, \quad f(X^2) = X^2 + 2X, \quad f(X^3) = X^3 + 3X^2.$$

La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons que A étant triangulaire supérieure avec des éléments non nuls sur la diagonale, A est inversible, ce qu'on savait puisque f est bijective.

Question supplémentaire. Est ce que f est diagonalisable ?

Comme A est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale, de sorte que $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Si A est diagonalisable, alors elle serait semblable et donc égale à I_4, ce qui n'est pas le cas. Donc A (et f) n'est pas diagonalisable.

4. Quelques exemples pour être sûr de bien comprendre qui est f :

- Si $P = \lambda \in \mathbb{R}$, $f(P) = P(X+1) - P(X) = \lambda - \lambda = 0$;
- Si $P = aX^2 + bX + c$, alors $f(P) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c - aX^2 - bX - c$.

Rappelons que $P(X+1)$ peut être vu comme la composée de deux polynômes : si on pose $A = X + 1$, on a $f(P) = P \circ A - P$.

Montrons que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_2[X]$. Soit pour cela $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) + \lambda P(X) + \mu Q(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

De plus pour tout $P \in E$, on a $\deg(f(P)) \leq \max(\deg(P \circ A), \deg(P)) = \max(\deg(P) \times \deg(A), \deg(P)) \leq 2$. Donc f est un endomorphisme de E.

On cherche le noyau de f. Soit $P = aX^2 + bX + c$, on a :

$$P(X+1) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c = aX^2 + (2a+b)X + (a+b+c).$$

D'où :

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad P(X+1) - P(X) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad 2aX + (a+b) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{c,\ c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1)$, et f n'est pas injective. Comme (1) est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$ et constituée d'**un** vecteur non nul, c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$, de sorte que $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 1$. Comme f est un endomorphisme en **dimension finie**, on en déduit directement que f n'est pas non plus surjective, et donc que $\mathrm{rg}(f) \leq 2$. Par le théorème du rang, on a :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2.$$

Pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$ (qui est donc de dimension 2), utilisons que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)).$$

On calcule :

$$f(1) = 0, \quad g(X) = 1 + X - X = 1, \quad g(X^2) = (1+X)^2 - X^2 = 2X + 1.$$

Ainsi on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(0, 1, 1 + 2X) = \mathrm{Vect}(1, 1 + 2X).$$

La famille $(1, 1 + 2X)$ est donc génératrice, de cardinal égal à $\dim(\mathrm{Im}(f))$, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Reste à donner la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ de E :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que B n'est pas inversible car triangulaire supérieure avec au moins un 0 sur la diagonale. Ce qu'on savait car f ne l'est pas non plus.

Question supplémentaire. Est ce que f est diagonalisable ?

Comme B est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale, de sorte que $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$. Si B est diagonalisable, alors elle serait semblable et donc égale à $0 \times I_3$, ce qui n'est pas le cas. Donc B (et f) n'est pas diagonalisable.

Notons enfin que B est triangulaire supérieure stricte, donc nilpotente. Donc f l'est aussi.

5. A faire.

6. f est clairement à valeurs dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De plus on a pour tout $M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)A = \alpha AM + \beta AN - \alpha MA - \beta NA \\ &= \alpha(AM - MA) + \beta(AN - NA) = \alpha f(M) + \beta f(N). \end{aligned}$$

Donc f est un endomorphisme de E.

Déterminons son noyau. Soit pour cela $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad AM - MA = 0_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = 0_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c & d-a \\ 0 & -c \end{pmatrix} = 0_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi on a $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(I_2, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$. La famille (I_2, B) est donc génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$, et libre car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$, et on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$. Ainsi f n'est pas injective, et elle n'est pas non plus surjective puisque c'est un endomorphisme en dimension finie.

Par le théorème du rang, on a :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - 2 = 2.$$

Déterminons l'image de f. On a (en notant $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'indice (i,j)) :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(E_{1,1}), f(E_{1,2}), f(E_{2,1}), f(E_{2,2})).$$

On calcule alors :

$$f(E_{1,1}) = -E_{1,2}, \quad f(E_{1,2}) = 0, \quad f(E_{2,1}) = E_{1,1} - E_{2,2}, \quad f(E_{2,2}) = E_{1,2}.$$

D'où :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(-E_{1,2}, 0, E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}) = \mathrm{Vect}(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}).$$

La famille $(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2})$ est génératrice, de cardinal 2 égal à la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Reste à donner la matrice de f dans la base canonique $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de E :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que C n'est pas inversible (par exemple parce que la deuxième colonne de C est nulle), ce qu'on savait car f n'est pas un automorphisme.

Exercice 24.9 (★★)

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x,y,z),\ x + 2y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(u)$ où $u = (1,1,1)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. On note p le projecteur sur F parallèlement à G.
   (a) Déterminer la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
   (b) En déduire la matrice de p dans la base canonique.
   (c) Sans calcul supplémentaire, donner la matrice dans la base canonique de la projection sur G parallèlement à F.

1. Cherchons pour commencer une base et la dimension de F. On a :

$$F = \{(-2y - z, y, z),\ y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((-2,1,0), (-1,0,1)).$$

La famille $((-2,1,0), (-1,0,1))$ est donc génératrice de F. Elle est de plus libre car constituée de **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de F, et $\dim(F) = 2$.

D'autre part, (u) est une famille génératrice de G (par définition de G) et libre car formée de **un** vecteur non nul. C'est donc une base de G.

Pour montrer que $E = F \oplus G$, on va par exemple montrer que la concaténation des bases de F et de G, $\mathscr{B}' = (e_1 = (-2,1,0), e_2 = (-1,0,1), e_3 = (1,1,1))$, est une base de $\mathbb{R}^3$.

Montrons pour cela qu'elle est libre. Soit donc $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a :

$$a(-2,1,0)+b(-1,0,1)+c(1,1,1)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-b+c=0 \\ a+c=0 \\ b+c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c+c+c=0 \\ a=-c \\ b=-c \end{cases} \qquad \Leftrightarrow a=b=c=0$$

Donc $\mathscr{B}'$ est bien une famille libre. Comme son cardinal est $3=\dim(\mathbb{R}^3)$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. On obtient finalement que $\mathbb{R}^3=F\oplus G$.

2. (a) Rappelons quelques propriétés des projecteurs.

Rappel. Projecteurs.

Soit $E=F\oplus G$, et soit p projecteur sur F parallèlement à G. On a :

- $F=\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Ker}(p-Id)=E_1(p)$, et donc :

$$\forall y\in F, \quad p(y)=y.$$

- $G=\mathrm{Ker}(p)=E_0(p)$, et donc :

$$\forall z\in G, \quad p(z)=0_E.$$

Comme $e_1, e_2\in F$ et $e_3\in G$, on a ici :

$$p(e_1)=e_1, \quad p(e_2)=e_2, \quad p(e_3)=0.$$

On obtient donc que :

$$A'=M_{\mathscr{B}'}(p)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) On utilise ici la formule de changement de bases. Rappelons le point de cours correspondant.

Rappel. Formules de changement de bases.

Supposons E de dimension finie, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. Notons :

- A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$;
- A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$;
- P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Alors on a :

$$A'=P^{-1}AP.$$

Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $A=M_{\mathscr{B}}(p)$. On a :

$$A'=P^{-1}AP$$

où P est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, c'est-à-dire :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

À l'aide du pivot de Gauss, on calcule P^{-1}. On obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/2 & 3/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Reste alors à calculer $A = PA'P^{-1}$. On trouve après calcul que :

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

(c) Encore un rappel :

Rappel. Projecteurs associés.
Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, alors $q = Id_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F. En effet si $z \in E$, alors en notant $(x, y) \in F \times G$ tels que $z = x + y$, on a :

$$q(z) = z - p(z) = x + y - x = y.$$

On a les relations :

$$p + q = Id_E \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

On dit que p et q sont les *projecteurs associés à la décomposition* $E = F \oplus G$.

Notons donc q le projecteur sur G par rapport à F, de sorte que p et q sont des *projecteurs associés*, et ils satisfont :

$$p + q = \mathrm{Id}.$$

En particulier on a $q = \mathrm{Id} - p$ et donc :

$$M_{\mathscr{B}}(q) = I_3 - M_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24.10 (★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
2. (★) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \Leftrightarrow E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

1. Prouvons ces inclusion :
   - Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$. D'où en composant par f, on obtient $f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Ainsi on a bien que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.

- Soit $z \in \mathrm{Im}(f^2)$. Il existe $x \in E$ tel que $z = f^2(x) = f(\underbrace{f(x)}_{\in E}) \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi on a bien $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Déjà vu ?
Cela vous fait peut-être penser aux suites de noyaux et images itérées ? Voir l'exercice classique 6.6 à ce sujet.

2. On procède par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. Montrons que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$. On a déjà l'égalité des dimensions par le théorème du rang :

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. Comme $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus, on a $y \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $0_E = f(y) = f(f(x)) = f^2(x)$. Ainsi on a $x \in \mathrm{Ker}(f^2) \underset{hyp.}{=} \mathrm{Ker}(f)$. Donc $y = f(x) = 0_E$. On a donc montré que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$.

On peut donc conclure que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

$\Leftarrow$ Supposons que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$. On a déjà une inclusion (qui est toujours vraie) :

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2).$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit pour cela $z \in \mathrm{Ker}(f^2)$. On a :

$$f(f(z)) = f^2(z) = 0_E \quad \Rightarrow \quad f(z) \in \mathrm{Ker}(f).$$

Et par définition, on a $f(z) \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi on a $f(z) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ car ces sous-espaces sont en somme directe par hypothèse. On peut donc conclure que $f(z) = 0_E$, et donc que z appartient à $\mathrm{Ker}(f)$. D'où l'inclusion $\mathrm{Ker}(f^2) \subset \mathrm{Ker}(f)$, et donc l'égalité.

Exercice 24.11 (★★ - Sous-espaces vectoriels stables par la dérivation)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par $\varphi(P) = P'$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{R}_k[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$ stable par φ.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$, non réduit au vecteur nul et stable par φ.
   (a) Soit $P \in F$ un polynôme de degré d. Montrer que $\mathbb{R}_d[x] \subset F$.
   (b) On note $p = \max\{\deg(P),\ P \in F\}$. Montrer que $F = \mathbb{R}_p[x]$.

1. Le fait que $\mathbb{R}_k[X]$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ est connu (cours). Montrons qu'il est stable par φ.

Rappels. Sous-espace stable.
Un sous-espace F de E est stable par $f \in \mathscr{L}(E)$ si :

$$\forall x \in F, \quad f(x) \in F.$$

Si $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, alors :

$$F \text{ stable par } f \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1,p]\!],\ f(e_i) \in F.$$

Ici, on a $\mathbb{R}_k[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^k)$, et pour tout $i \in [\![1,k]\!]$:

$$\varphi(X^i) = iX^{i-1} \in \mathbb{R}_k[X],$$

et $\varphi(1) = 0 \in \mathbb{R}_k[X]$. Donc $\mathbb{R}_k[X]$ est un sous-espace vectoriel stable par φ.

2. (a) Soit $P \in F$ de degré $d \geq 0$. Par une récurrence immédiate, on a que $\varphi^i(P) \in F$ pour tout $0 \leq i \leq d$ car F stable par φ. Comme de plus F est un sous-espace vectoriel, on en déduit que :

$$\text{Vect}(P, P', P^{(2)}, \dots, P^{(d)}) = \text{Vect}(P, \varphi(P), \varphi^2(P), \dots, \varphi^d(P)) \subset F.$$

Or $\mathscr{F} = (P, P', P^{(2)}, \dots, P^{(d)})$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_d[X]$, libre car échelonnée en degré ($\deg(P^{(i)}) = d - i$ pour tout $0 \leq i \leq d$). Comme $\text{Card}(\mathscr{F}) = \dim(\mathbb{R}_d[X]) = d + 1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_d[X]$. On obtient donc :

$$\mathbb{R}_d[X] = \text{Vect}(P, P', P^{(2)}, \dots, P^{(d)}) \subset F.$$

(b) Posons $p = \max\{\deg(P),\ P \in F\}$. Montrons que $F = \mathbb{R}_p[X]$ par double inclusion.

$\subset$ Pour tout $P \in F$, on a $\deg(P) \leq p$ par définition de p. Donc on a $F \subset \mathbb{R}_p[X]$.

$\supset$ Prenons $P_0 \in F$ tel que $\deg(P_0) = p$. D'après la question précédente, on a $\mathbb{R}_p[X] \subset F$.

D'où l'égalité voulue.

Exercice 24.12 (★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension 4, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 \neq 0$ et $f^4 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x), f^3(x))$ soit une base de E.
2. En déduire le rang de f.

1. Puisque $f^3 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, il existe $x \in E$ tel que $f^3(x) \neq 0_E$. Montrons alors que la famille $(x, f(x), f^2(x), f^3(x))$ est libre : soit pour cela $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$ax + bf(x) + cf^2(x) + df^3(x) = 0_E.$$

Composons cette égalité par f^3. On obtient par linéarité de f :

$$af^3(x) + \underbrace{bf^4(x) + cf^5(x) + df^6(x)}_{=0_E \text{ car } f^4=0} = f^3(0_E) = 0_E.$$

D'où $af^3(x) = 0_E$, et puisque $f^3(x) \neq 0_E$, on obtient que $a = 0$. On a donc :

$$bf(x) + cf^2(x) + df^3(x) = 0_E.$$

En composant par f^2, on obtient de même que :

$$bf^3(x) = 0_E.$$

D'où $b = 0$ puisque $f^3(x) \neq 0_E$. En répétant ce procédé, on montre de même que $c = d = 0$. Donc la famille est libre. Comme de plus son cardinal est $4 = \dim(E)$, c'est donc une base de E.

2. On écrit la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (x, f(x), f^2(x), f^3(x))$:

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M_{\mathscr{B}}(f)) = 3$, d'où le résultat.

Autre méthode. Rappelons que si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Ici $\mathscr{B} = (x, f(x), f^2(x), f^3(x))$ est une base de E, donc on a :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x), f(f(x)), f(f^2(x)), \underbrace{f(f^3(x))}_{=0_E}) = \mathrm{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x)).$$

La famille $(f(x), f^2(x), f^3(x))$ est libre, en tant que sous-famille de la famille libre $\mathscr{B}$. Donc on a :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Vect}(f(x), f^2(x), f^3(x))) = 3.$$

Exercice 24.13 (★★★)

Soient $N_1, N_2, \ldots, N_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes qui commutent deux à deux. Montrer que :

$$N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_n = 0_n.$$

On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si E est un espace vectoriel de dimension n et $f_1, \ldots, f_n$ sont des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux, alors :

$$f_1 \circ \cdots \circ f_n = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Init. Soit f un endomorphisme nilpotent d'un espace E de dimension 1. Puisque f est nilpotent, il est en particulier non bijectif (car sinon f^k serait bijectif, et donc non nul, pour tout $k \in \mathbb{N}$). Ainsi $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$, et puisque E est de dimension 1, $\mathrm{Ker}(f) = E$ et $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$. D'où la propriété au rang 1.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Soit donc E un espace vectoriel de dimension $n+1$, et $f_1, \ldots, f_{n+1}$ des endomorphismes de E qui commutent deux à deux. Puisque f_{n+1} n'est pas bijectif, $F = \mathrm{Im}(f_{n+1})$ est de dimension $0 \leq k \leq n$.

Si $k = 0$, $f_{n+1} = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et l'égalité voulue est bien satisfaite.

Sinon, les endomorphismes $f_{n-k+1}, \dots, f_{n+1}$ commutant deux à deux, le sous-espace F est stable par les endomorphismes $f_{n-k+1}, \dots, f_n$. Ils induisent sur F des endomorphismes $\widetilde{f_{n-k+1}}, \dots, \tilde{f_n}$ qui sont encore nilpotents et qui commutent deux à deux. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que :

$$\widetilde{f_{n-k+1}} \circ \dots \circ \tilde{f_n} = 0_{\mathscr{L}(F)}$$

Ainsi, $\mathrm{Im}(f_{n+1}) \subset \mathrm{Ker}(f_{n-k+1} \circ \dots \circ f_n)$, ce qui se récrit :

$$f_{n-k+1} \circ \dots \circ f_n \circ f_{n+1} = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

En particulier :

$$f_1 \circ \dots \circ f_n = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si E est un espace vectoriel de dimension n et $f_1, \dots, f_n$ sont des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux, alors :

$$f_1 \circ \dots \circ f_n = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

On en déduit alors le résultat voulu en appliquant cette propriété aux endomorphismes $f_1, \dots, f_n$ de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à $N_1, \dots, N_n$ (ces endomorphismes sont par hypothèse nilpotents et commutent deux à deux).

Exercice 24.14 (★★★★ - QSP HEC 2018)

Soit un entier $n \geq 2$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.
Démontrer que, si f n'est pas une homothétie, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f a pour première colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 24.15 (★★★★ - Oral ESCP 2012)

On note $\mathbb{R}[x]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et pour tout $n > 1$, $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$. Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon.
Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $(a_1, \cdots, a_n)$ une famille de nombres réels distincts.

1. (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
   (b) Montrer que la famille $(L_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
2. Soit $\pi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[x]$, $\pi(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$.
   (a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[x]$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de π.
   (c) On note $F = \left\{ Q \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (x - a_i),\ Q \in \mathbb{R}[x] \right\}$. Montrer que $F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[x] = \mathbb{R}[x]$.
   (d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.

3. Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[x] \to \mathbb{R}^n$, $P \mapsto (P(a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$.
   (a) Montrer que ε est un isomorphisme.
   (b) Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
   Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points $(a_1,\cdots,a_n)$.
4. Soient $a,b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soient $f \in \mathscr{C}^n([a,b],\mathbb{R})$, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ tels que $a \leq a_1 < \cdots < a_n \leq b$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points $(a_1,\cdots,a_n)$.
   (a) Soit $x \in [a,b] \setminus \{a_1,\cdots,a_n\}$ et K réel. On définit la fonction φ par
   $$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) - P(t) - K\prod_{i=1}^{n}(t-a_i).$$
   Montrer qu'il existe K tel que $\varphi(x) = 0$.
   (b) Montrer que pour cette valeur de K, il existe $\varsigma \in [a,b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\varsigma) = 0$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, on a :
   $$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\prod_{i=1}^{n}|x-a_i|}{n!}\sup_{[a,b]}|f^{(n)}|.$$

1. (a) Fixons $i \in [\![1,n]\!]$. On va procéder par Analyse - Synthèse.

Analyse On a $L_i(a_j) = 0$ pour tout $j \neq i$, donc a_j est racine de L_i de sorte qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$L_i = \left(\prod_{1\leq j\neq i\leq n}(X-a_j)\right)Q.$$
Prenons le degré de cette expression :
$$n-1 \geq \deg(L_i) = \deg(Q) + n - 1 \quad\Rightarrow\quad \deg(Q) \leq 0.$$
Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$L_i = \lambda\prod_{1\leq j\neq i\leq n}(X-a_j).$$
Enfin, on a :
$$L_i(a_i) = 1 \quad\Rightarrow\quad \lambda = \frac{1}{\prod_{1\leq j\neq i\leq n}(a_i-a_j)}.$$

Synthèse Posons $L_i = \prod_{1\leq j\neq i\leq n}\dfrac{X-a_j}{a_i-a_j}$. On a deg($L_i = n-1$, $L_i(a_j) = 0$ pour tout $j \neq i$ et :
$$L_i(a_i) = \prod_{1\leq j\neq i\leq n}\underbrace{\frac{a_i-a_j}{a_i-a_j}}_{=1} = 1.$$

D'où l'existence et l'unicité d'un polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

Déjà vu ?

Oui, et pas qu'un peu : ce sont les *polynômes de Lagrange* associés aux a_i, qui ont été introduit aux TD0, TD4 et TD6 par différentes méthodes.

(b) Montrons qu'elle est libre. Soit pour cela $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Résolvons :

$$\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}.$$

On évalue en a_i pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\underbrace{\lambda_1 L_1(a_i) + \cdots +}_{=0} \lambda_i \underbrace{L_i(a_i)}_{=1} \underbrace{+ \cdots + \lambda_n L_n(a_i)}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0.$$

La famille (L_i) est donc libre, de cardinal $n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

2. (a) Montrons que π est linéaire. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\pi(\lambda P + \mu Q) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda P + \mu Q)(a_i) L_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i + \mu \sum_{i=1}^{n} Q(a_i) L_i = \lambda \pi(P) + \mu \pi(Q)$$

Donc π est linéaire. De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\pi \circ \pi(P) = \pi \left(\sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i \right) \underset{=}{\pi \text{ lin.}} \sum_{i=1}^{n} P(a_i) \pi(L_i)$$

Or on a pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$\pi(L_i) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{L_i(a_j)}_{=\delta_{i,j}} L_j = L_i.$$

En substituant dans le calcul précédent, on obtient :

$$\pi \circ \pi(P) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i = \pi(P)$$

Ainsi on a $\pi \circ \pi = \pi$, et π est bien un projecteur.

(b) Déterminons $\mathrm{Ker}(\pi)$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\pi) \Leftrightarrow \pi(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Leftrightarrow P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0 \quad \text{car la famille } (L_i) \text{ est libre} \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ P = Q \prod_{i=1}^{n} (X - a_i). \end{aligned}$$

Ainsi on a $\mathrm{Ker}(\pi) = \{Q \prod_{i=1}^{n} (X - a_i),\ Q \in \mathbb{R}[X]\}$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\pi(P) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i \in \mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_n).$$

Donc $\mathrm{Im}(\pi)$ est inclus dans $\mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_n)$. De plus, on a vu que $L_i = \pi(L_i) \in \mathrm{Im}(\pi)$. D'où l'inclusion réciproque, et donc que $\mathrm{Im}(\pi) = \mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_n)$.

(c) Comme π est un projecteur, on a :

$$\mathbb{R}[X] = \mathrm{Ker}(\pi) \oplus \mathrm{Im}(\pi) = F \oplus \mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_n).$$

Comme de plus, (L_i) est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on en déduit que $\mathrm{Vect}(L_1, \dots, L_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'où le résultat.

(d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Im}(\pi)$. On a :

$$P = \pi(P) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)L_i.$$

Ce qui donne les coordonnées de P dans la base (L_i).

Autre méthode. Par un calcul direct, on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P = \lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n.$$

Évaluons cette égalité en a_i pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$P(a_i) = \underbrace{\lambda_1 L_1(a_i) + \cdots +}_{=0} \lambda_i \underbrace{L_i(a_i)}_{=1} \underbrace{+ \cdots + \lambda_n L_n(a_i)}_{=0} = \lambda_i.$$

3. (a) L'application ε, d'après ce qui précède, associe à $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ses coordonnées dans la base (L_i). Par le cours, ε est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ (on a ici identifié $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$...).

Autre méthode. On l'avait déjà fait en TD, voir l'exercice 6.4.

(b) On cherche $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ satisfaisant

$$(f(a_1), \dots, f(a_n)) = (P(a_1), \dots, P(a_n)) = \varepsilon(P).$$

Comme $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme, il existe bien un tel polynôme, et il est de plus unique.

4. (a) On cherche $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\varphi(x) = 0 \quad \underset{x \neq a_i}{\Leftrightarrow} \quad K = \frac{f(x) - P(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)}.$$

(b) Notons tout d'abord que φ est de classe $\mathscr{C}^n$ comme composée de fonctions qui le sont.

On a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(a_i) = 0$, et $\varphi(x) = 0$. Donc φ s'annule en $(n+1)$ réels distincts de $[a, b]$.

Par le théorème de Rolle appliqué entre chacune des racines de φ, on montre que $\varphi^{(1)}$ admet (au moins) $n = (n+1) - 1$ racines distinctes sur $[a, b]$. En répétant ce procédé (de « Rolle en cascade »), on en déduit que $\varphi^{(n)}$ admet (au moins) $(n+1) - n = 1$ racine réelle $\varsigma \in [a, b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\varsigma) = 0$.

(c) Ainsi on a $f^{(n)}(\varsigma) - n!K = 0$ (car $\deg(P) \leq n-1$), ce qui se réécrit :

$$\frac{f(x) - P(x)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)} = K = \frac{f^{(n)}(\varsigma)}{n!}.$$

Comme $|f^{(n)}|$ est continue sur le segment $[a, b]$, elle admet une borne supérieure. En prenant les valeurs absolues, on obtient donc que pour tout $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$:

$$|f(x) - P(x)| = \sup_{[a,b]} |f^{(n)}| \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} |x - a_i|}{n!}.$$

Le résultat est encore vrai si x est l'un des a_i, d'où la conclusion.

Diagonalisation

Exercice 24.16 (★)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, en déterminer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- La matrice B est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont donc sur sa diagonales, de sorte que $\mathrm{Sp}(B) = \{2, -1\}$.

  On a :

  $$B + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  de rang 1. Par le théorème du rang, $\dim(E_{-1}(B)) = 3 - 1 = 2$.

  D'autre part, on a :

  $$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

  de rang 2, d'où $\dim(E_2(B)) = 3 - 2 = 1$ toujours par le théorème du rang.

Comme $\dim(E_{-1}(B))+\dim(E_2(B)) = 2+1 = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, B est bien diagonalisable.

On cherche une base de vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(B) \Leftrightarrow x = 0$$

Ainsi, on a $E_{-1}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $E_{-1}(B)$, et libre car **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de cet espace.

D'autre part, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(B) \Leftrightarrow \begin{cases} -6x - 3y = 0 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

d'où $E_2(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $E_2(B)$, et libre car formée de **un** vecteur non nul. C'est donc une base de $E_2(B)$.

En notant $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage entre la base canonique et la base de diagonalisation de B, on obtient donc (par formule de changement de bases) :

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Observons tout d'abord que $C_2(C) = 3C_1(C)$ et $C_3(C) = 0_{3,1}$, de sorte que :

$$\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}(C_1(C), C_2(C), C_3(C)) = \mathrm{Vect}(C_1(C)).$$

Donc $\mathrm{rg}(C) = \dim \mathrm{Im}(C) = 1$, et 0 est valeur propre de C avec $\dim(E_0(C)) = 3 - 1 = 2$. On propose alors deux méthodes pour étudier la diagonalisabilité de C.

Méthode 1. À l'aide d'un polynôme annulateur.

On a $C^2 = 0_3$, de sorte que X^2 est un polynôme annulateur de C. 0 est donc la seule valeur propre possible de C, et c'est effectivement une valeur propre de C puisque $\dim(E_0(C)) = 2$. Comme $\dim(E_0(C)) < 3$, on peut donc conclure que C n'est pas diagonalisable.

Méthode 2. Par l'absurde.

Supposons que C soit diagonalisable. On a déjà une valeur propre 0 avec $\dim(E_0(C)) = 2$. Pour obtenir la dernière valeur propre λ, on utilise la trace :

$$0 + 0 + \lambda = \mathrm{Tr}(C) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.$$

Ainsi 0 serait l'unique valeur propre de C. Mais dans ce cas $\dim(E_0(C)) = 2 \neq 3$ et C ne serait pas diagonalisable... On peut donc conclure que C n'est pas diagonalisable.

- On observe que :

$$D - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 1. Donc 4 est valeur propre et $\dim(E_4(D)) = 3 - 1 = 2$.

Pour trouver la dernière valeur propre λ, faisons le raisonnement suivant : si D était diagonalisable, on aurait à l'aide de la trace :

$$4 + 4 + \lambda = \mathrm{Tr}(D) = 10 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2.$$

Tentons de voir si 2 est bien valeur propre de D :

$$D - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{rg}(D - 2I_3) = 2 < 3$, et 2 est valeur propre de D avec $\dim(E_2(D)) = 3 - 2 = 1$.

On obtient $\dim(E_4(D)) + \dim(E_2(D)) = 3$, donc D est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(D) = \{2, 4\}$.

On cherche une base de chacun des sous-espaces propres :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4(D) \Leftrightarrow -x + y - z = 0.$$

Ainsi $E_4(D) = \left\{ \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix}, \, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc génératrice de $E_4(D)$, et libre car **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $E_4(D)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(D) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}.$$

Ainsi $E_4(D) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc génératrice de $E_2(D)$, et libre car **un** vecteur non nul. C'est donc une base de $E_2(D)$.

On obtient donc comme matrice de passage entre la base canonique et la base de diagonalisation la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et par formule de changement de base :

$$P^{-1}DP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24.17 (★★ - Edhec 2005)

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On note tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.
   (b) En déduire la dimension de $\ker(\mathrm{tr})$.
   (c) Établir que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)$.
2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I$
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f. En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \mathrm{tr}(M)J$, où J désigne une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

   On admet que g est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Établir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.
   (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.
   (c) g est-il diagonalisable ?

1. (a) On sait que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. Il est donc de dimension 0 ou 1. Comme de plus Tr n'est pas l'application identiquement nulle (car par exemple $\mathrm{Tr}(I_n) = n \neq 0$), on en déduit que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) \neq \{0\}$. Ainsi on a $\dim \mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = 1$ et $\boxed{\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}}$.

   (b) Par le théorème du rang, on a :
   $$\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) + \dim \mathrm{Im}(\mathrm{Tr}).$$
   On en déduit donc que $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) \boxed{= n^2 - 1}$.

   Remarque. Ainsi $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On aurait pu le deviner, puisque c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Voir à ce propos le complément de cours **Complément 2. Formes linéaires et hyperplans**.

   (c) On a $\dim \mathrm{Vect}(I) = 1$ puisque $I \neq 0_{n,n}$, donc :
   $$\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) + \dim \mathrm{Vect}(I).$$
   Montrons que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \cap \mathrm{Vect}(I) = \{0\}$: soit $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \cap \mathrm{Vect}(I)$. On a :
   - $M \in \mathrm{Vect}(I)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I$.
   - D'autre part, M appartient à $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$, donc on a :
   $$0 = \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(\lambda I) = n\lambda.$$
   Donc $\lambda = 0$ et $M = \lambda I = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \cap \mathrm{Vect}(I) = \{0\}$.

   On peut donc conclure que :
   $$\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)}$$

2. (a) f est clairement à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que f est linéaire : soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda M + \mu N) &= (\lambda M + \mu N) + \mathrm{Tr}(\lambda M + \mu N)I \\ &= \lambda M + \mu N + (\lambda \mathrm{Tr}(M) + \mu \mathrm{Tr}(N))I \\ &= \lambda(M + \mathrm{Tr}(M)I) + \mu(N + \mathrm{Tr}(N)I) = \lambda f(M) + \mu f(N). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

(b) Pour tout $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$, on a :

$$f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)I = M.$$

Donc M est vecteur propre de f associé à la valeur propre 1. En particulier on a $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \subset E_1(f)$ et $\dim(E_1(f)) \geq n^2 - 1$.

D'autre part, on a :

$$f(I) = I + \mathrm{Tr}(I)I = I + nI = (n+1)I.$$

Donc I est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $n+1$. En particulier on a $\dim E_{n+1}(f) \geq 1$.

On obtient donc :

$$n^2 = (n^2 - 1) + 1 \leq \dim E_1(f) + \dim E_{n+1}(f) \underset{\text{cours}}{\leq} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f) \leq n^2.$$

On en déduit donc que $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{1, n+1\}}$, que $\dim E_1(f) = n^2 - 1$ et $\dim E_{n+1}(f) = 1$, et que $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$ (puisque $\dim E_1(f) + \dim E_{n+1}(f) = n^2$).

Notons enfin que $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$, donc f est injective. Comme c'est un endomorphisme en dimension finie, f est donc bijective. $\boxed{f \text{ est donc un automorphisme de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

3. (a) On doit montrer que $g^2 - 2g + \mathrm{Id} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Soit donc $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} g^2(M) - 2g(M) + M &= g(M + \mathrm{Tr}(M)J) - 2(M + \mathrm{Tr}(M)J) + M \\ &= g(M) + \mathrm{Tr}(M)g(J) - 2M - 2\mathrm{Tr}(M)J + M \qquad \text{car } g \text{ linéaire} \\ &= M + \mathrm{Tr}(M)J + \mathrm{Tr}(M)(J + 0J) - 2\mathrm{Tr}(M)J - M \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.

(b) Les valeurs propres **possibles** sont **parmi** les racines de $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. Donc 1 est l'unique valeur propre possible de g. De plus on a pour tout $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$:

$$g(M) = M + \mathrm{Tr}(M)J = M.$$

Donc M est un vecteur propre de g associé à la valeur propre 1, et on a $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \subset E_1(g)$. Ainsi $\boxed{1 \text{ est bien valeur propre de } g, \text{ et c'est l'unique valeur propre de } g.}$

(c) Supposons que g soit diagonalisable. Puisque g n'a qu'une seule valeur propre 1, alors on aurait $g = \mathrm{Id}$. Or on a par exemple :

$$g(I) = I + \mathrm{Tr}(I)J = I + nJ \neq I.$$

Donc $\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Autre méthode. On calcule $E_1(g)$. On a :

$$g(M) = M \Leftrightarrow M + \mathrm{Tr}(M)J = M \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(M)J = 0 \underset{J\neq 0}{\Leftrightarrow} \mathrm{Tr}(M) = 0.$$

Ainsi $E_1(g) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \neq \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc g n'est pas diagonalisable.

Exercice 24.18 (★★ - Extrait d'Edhec 2012)
Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. (a) Calculer A^2 et A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.
   (b) En déduire les valeurs propres de f.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. (★) Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que $A^3 - 2A^2 = 0_n$. Ainsi $P = X^3 - 2X^2 = X^2(X-2)$ est un polynôme annulateur de A et donc aussi de f.

   (b) Les valeurs propres **possibles** de f sont **parmi** les racines de $P = X^2(X-2)$, c'est-à-dire 0 et 2. Vérifions que 0 et 2 sont effectivement valeurs propres de f :

   - A est de rang 2 car on a $C_2(A) = -C_3(A)$ et que $C_1(A)$ et $C_2(A)$ ne sont pas colinéaires. Donc $\dim(E_0(A)) = 3 - 2 = 1$ par le théorème du rang, et 0 est bien valeur propre de A (et de f).
   - On a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ de rang 2 car $C_1(A) = -C_2(A)$ et que $C_1(A)$ et $C_3(A)$ ne sont pas colinéaires. Donc $\dim(E_2(A)) = 3 - 2 = 1$ toujours par le théorème du rang, et 2 est aussi valeur propre de A (et de f).

   On peut donc conclure que $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 2\}$.

   (c) Comme $\dim(E_0(f)) + \dim(E_2(f)) = 1 + 1 = 2 < 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, f n'est pas diagonalisable.

2. Procédons par analyse-synthèse pour la recherche de cette base.

Analyse. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

On a donc $f(e_1) = 0_{3,1}$, $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = 2e_3$. Ainsi $e_1 \in E_0(f)$ et $e_3 \in E_2(f)$, et e_2 est un antécédent de e_1 par f.

Synthèse. Déterminons une base des sous-espaces propres $E_0(f)$ et $E_2(f)$. On a :

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0_{3,1} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Comme de plus $\dim(E_0(f)) = \dim(E_2(f)) = 1$, on obtient :

$$E_0(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Prenons donc $e_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. On cherche à présent $e_2 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tel que :

$$f(e_2) = e_1 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -x+3y-3z=1 \\ -2x+2y-2z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 4y-4z=1 & (2)+(1) \\ 4y-4z=1 & (3)+2(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/4 \\ y-z=1/4 \end{cases}$$

Prenons par exemple $e_2 = \begin{pmatrix}-1/4\\1/4\\0\end{pmatrix}$.

Montrons que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ convient :

- Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :
$$ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{3,1}.$$
En appliquant f, on a :
$$be_1 + 2ce_3 = 0_{3,1},$$
et en réappliquant f une seconde fois :
$$4ce_3 = 0_{3,1}.$$
Donc $c = 0$, puis en remplaçant dans la deuxième équation $b = 0$, et dans la première $a = 0$. Donc la famille $\mathscr{B}$ est libre. Comme est de plus de cardinal $3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, c'est donc une base de cet espace.
- On a par construction $f(e_1) = 0_{3,1}$, $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = 2e_3$. Donc on a bien $T = M_{\mathscr{B}}(f)$.

D'où le résultat.

Exercice 24.19 (★★ - Extrait de EML 2013)
Soit $n \geq 2$ un entier. Soit L un élément non nul de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On pose $A = CL$ et $a = \text{Tr}(A)$.

1. Déterminer les coefficients de A à l'aide des coefficients de C et L.
2. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
3. Montrer que $LC = (a)$, puis $A^2 = aA$.

4. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
5. On suppose $a \neq 0$. Calculer AC. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.
6. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

1. Notons $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{pmatrix}$ On a :
$$A = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 l_1 & \dots & c_1 l_n \\ \vdots & & \vdots \\ c_n l_1 & \dots & c_n l_n \end{pmatrix}.$$
2. Soit $1 \leq i \leq n$. On a $C_i(A) = l_i C$ où $C_i(A)$ désigne la i-ème colonne de la matrice A, de sorte que :
$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A)) \subset \mathrm{Vect}(C).$$
Ainsi $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A))) \leq \dim(\mathrm{Vect}(C)) = 1$ car $C \neq 0_{n,1}$. Comme de plus $C \neq 0_{n,1}$ et $L \neq 0_{1,n}$, il existe $1 \leq i, j \leq n$ tels que $c_i \neq 0$ et $l_j \neq 0$. En particulier, on a $[A]_{i,j} = c_i l_j \neq 0$ et $\mathrm{rg}(A) \geq 1$.

   Ainsi $\mathrm{rg}(A) = 1$, 0 est valeur propre de A et $\dim(E_0(A)) = n - 1$ par le théorème du rang.
3. On a :
$$LC = \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i l_i \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i} \right) = (a).$$
D'où :
$$A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = C(a)L = aCL = aA.$$
4. Si $a = 0$, alors $A^2 = 0_n$ et X^2 est un polynôme annulateur de A. 0 est donc l'unique valeur propre possible de A. Et elle est bien valeur propre de A d'après 2. On en déduit que :
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_0(A)) = n - 1 < n.$$
A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Supposons $a \neq 0$. On a :
$$AC = (CL)C = C(LC) = C(a) = aC.$$
Comme $C \neq 0_{n,1}$, C est donc vecteur propre de A associé à la valeur propre a, et $\dim(E_a(A)) \geq 1$.

   On obtient alors :
$$n = (n-1) + 1 \leq \dim(E_0(A)) + \dim(E_a(A)) \underset{\text{cours}}{\leq} n.$$
On en déduit que $\dim(E_0(A)) + \dim(E_a(A)) = n$. Ainsi A est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a\}$ et $\dim(E_a(A)) = 1$.
6. $A = CL$ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Exercice 24.20 (★★)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $b \in \mathbb{R}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ $(n \geq 2)$ défini par $[f(P)](x) = P(ax+b)$.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique. En déduire les valeurs propres de f.
2. Montrer que si $a \notin \{-1, 1\}$, alors f est diagonalisable.
3. Si $a = 1$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

> 1. Commençons tout d'abord par bien comprendre qui est f. Si on note $Q = aX + b$, on a :
>
> $$f : P = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i \mapsto P \circ Q = \sum_{i=0}^{n} p_i Q^i.$$
>
> Faisons quelques exemples, avec $P_1 = X^2 + 2X + 1$, $P_2 = X$ et $P_3 = 2$:
>
> $$f(P_1) = P_1 \circ Q = Q^2 + 2Q + 1 = (aX+b)^2 + 2(aX+b) + 1.$$
>
> $$f(P_2) = P_2 \circ Q = Q = (aX+b).$$
>
> $$f(P_3) = P_3 \circ Q = 2.$$
>
> Montrons que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient $P_1, P_2 \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :
>
> $$f(\alpha P_1 + \beta P_2) = (\alpha P_1 + \beta P_2) \circ Q = \alpha P_1 \circ Q + \beta P_2 \circ Q = \alpha f(P_1) + \beta f(P_2).$$
>
> Donc f est linéaire. De plus on a pour tout $P \in E$ (puisque $\deg(Q) \geq 1$) :
>
> $$\deg(f(P)) = \deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q) = \deg(P) \times 1 = \deg(P).$$
>
> Donc f est un endomorphisme de E.
>
> Reprenons le fil de l'exercice. Posons $P_k = X^k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Pour obtenir la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$, on calcule :
>
> $$f(P_k) = P_k \circ Q = Q^k = (aX+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i} X^i.$$
>
> On en déduit :
>
> $$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \dots & b^n \\ 0 & a & \binom{2}{1}ab & & \binom{n}{1}ab^{n-1} \\ 0 & \ddots & a^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1}a^{n-1}b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \binom{n}{n}a^n \end{pmatrix}$$
>
> Cette matrice étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont sur la diagonale. Ainsi $\mathrm{Sp}(f) = \{1, a, a^2, \dots, a^n\}$.

2. Soit $0 \leq k < \ell \leq n$, on a :
$$a^k = a^\ell \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} 1 = a^{\ell-k} \Rightarrow |a| = 1.$$
Si $a \neq \pm 1$, les a^k pour $0 \leq k \leq n$ sont donc deux à deux distincts. f admet donc $n+1$ valeurs propres distinctes et est un endomorphisme de E de dimension $n+1$. Donc f est diagonalisable.

3. Si $a = 1$, on a alors :
$$A = M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \dots & b^n \\ 0 & 1 & \binom{2}{1}b & & \binom{n}{1}b^{n-1} \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1}b \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On a dans ce cas $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$, et A est diagonalisable si et seulement si $A = I_{n+1}$. Or ceci est équivalent à $b = 0$, et à $Q = X$. Ainsi f est diagonalisable si et seulement si $b = 0$, et dans ce cas $f = Id_E$.

Exercice 24.21 (★★)

Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

On commence par chercher les valeurs propres de A, qui sont les racines du polynôme :
$$X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2X + (1 - 2\lambda).$$
On calcule le discriminant :
$$\Delta = 4 - 4(1 - 2\lambda) = 8\lambda.$$
On a alors trois cas possibles :

- Si $\lambda > 0$, alors $\Delta > 0$ et A admet 2 valeurs propres réelles distinctes. Comme $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- Si $\lambda = 0$, alors $\Delta = 0$ et $X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A) = (X-1)^2$. Donc A admet une unique valeur propre 1. Dans ce cas A est diagonalisable si et seulement si $A = 1I_2 = I_2$, ce qui n'est pas le cas. Donc A n'est pas diagonalisable dans ce cas (ni dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, ni dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$).
- Si $\lambda < 0$, alors $\Delta < 0$. Donc A n'a pas de valeur propre réelle, et n'est donc pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Elle admet cependant deux valeurs propres complexes distinctes. Comme $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit donc que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ (les valeurs propres et les vecteurs propres seront complexes dans ce cas).

Exercice 24.22 (★★ - Extrait d'Edhec 2012)

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieurs ou égal à 2. On note e_0, e_1, e_2 les polynômes de E définis par $e_0 = 1$, $e_1 = x$ et $e_2 = x^2$. On rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.

On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le reste dans la division euclidienne par $1 + x^3$ du polynôme $(1 - x + x^2)P$. Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que
$$(1 - x + x^2)P = (1 + x^3)Q + f(P) \text{ avec } \deg(f(P)) \leq 2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. (a) Déterminer $f(e_0), f(e_1), f(e_2)$, puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
   (b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. (a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\mathrm{Im}(f)$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que :
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 3Id).$$
   (b) Montrer que f est diagonalisable.

1. Il s'agit ici d'une question difficile qui nécessite de bien connaitre le théorème de division euclidienne des polynômes dont voici l'énoncé.

Rappel. Théorème de la division euclidienne.
Soient A, B deux polynômes tels que $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :
$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$
Q et R sont appelés le *quotient* et le *reste* de la *division euclidienne* de A par B.

Soient $P_1, P_2 \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. D'après le théorème de division euclidienne, il existe des couples (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) uniques tels que :
$$(1 - X + X^2)P_1 = (1 + X^3)Q_1 + R_1 \quad \text{avec} \quad \deg(R_1) \leq 2$$
et
$$(1 - X + X^2)P_2 = (1 + X^3)Q_2 + R_2 \quad \text{avec} \quad \deg(R_2) \leq 2.$$
Notons que par définition, on a $f(P_1) = R_1$ et $f(P_2) = R_2$.
En multipliant respectivement par λ_1 et λ_2 ces équations et en sommant, on obtient :
$$(1 - X + X^2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (1 + X^3)(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2).$$
De plus on a $\deg(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) \leq 2$. Par unicité dans le théorème de division euclidienne, $(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)$ est donc **le** reste de la division euclidienne du polynôme $(1 - X + X^2)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)$ par $1 + X^3$. Par définition de f, on a ainsi :
$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2).$$
D'où la linéarité de f. Comme de plus $f(P)$ est un polynôme de degré ≤ 2 en tant que reste de la division euclidienne par $(1+X^3)$, on a bien $f(P) \in E$. Ainsi $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2. (a) On effectue trois divisions euclidiennes (qu'on posera si nécessaire). On a :
$$(1 - X + X^2) \times 1 = (1 + X^3) \times 0 + (1 - X + X^2),$$
$$(1 - X + X^2) \times X = X - X^2 + X^3 = (1 + X^3) \times 1 + (-X^2 + X - 1),$$
$$(1 - X + X^2) \times X^2 = X^2 - X^3 + X^4 = (1 + X^3) \times (X - 1) + (X^2 - X + 1).$$

D'où :

$$\boxed{f(e_0) = 1 - X + X^2, \quad f(e_1) = -1 + X - X^2 \quad \text{et} \quad f(e_2) = 1 - X + X^2.}$$

En particulier, on a bien : $\boxed{f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2).}$

(b) On a $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_0), f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}(1 - X + X^2)$ d'après la question précédente. $(1 - X + X^2)$ est donc une famille génératrice de $\text{Im}(f)$, et libre car $1 - X + X^2 \neq 0_E$. $\boxed{(1 - X + X^2) \text{ est donc une base de } \text{Im}(f)}$, et $\dim \text{Im}(f) = 1$.

(c) Par le théorème du rang, on a :

$$\dim(E) = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) \quad \Rightarrow \quad \dim \text{Ker}(f) = \dim(E) - \dim \text{Im}(f) = 3 - 1 \boxed{= 2.}$$

De plus on a :

$$f(e_0) = -f(e_1) \quad \Rightarrow \quad f(e_0 + e_1) = f(1 + X) = 0_E$$

et

$$f(e_0) = f(e_2) \quad \Rightarrow \quad f(e_2 - e_0) = f(X^2 - 1) = 0_E$$

Ainsi $X^2 - 1$ et $X + 1$ appartiennent à $\text{Ker}(f)$. Puisque $(X + 1, X^2 - 1)$ est une famille de vecteurs de $\text{Ker}(f)$ libre car échelonnée en degré, de cardinal égal à $\dim \text{Ker}(f) = 2$, $\boxed{(X + 1, X^2 - 1) \text{ donc une base de } \text{Ker}(f).}$

3. (a) D'après ce qui précède, on a $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1 - X + X^2)$. Calculons $f(1 - X + X^2)$. Pour cela, on effectue la division euclidienne de $(1 - X + X^2)(1 - X + X^2) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$ par $1 + X^3$. On obtient (en posant la division) :

$$X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1 = (1 + X^3)(X - 2) + 3(X^2 - X + 1).$$

Ainsi on a $f(X^2 - X + 1) = 3(X^2 - X + 1)$. Plus généralement pour tout $P \in \text{Im}(f)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda(1 - X + X^2)$, et on a :

$$f(P) = \lambda f(X^2 - X + 1) = 3\lambda(X^2 - X + 1) \boxed{= 3\text{P}.}$$

Ainsi 3 est valeur propre de f et on a :

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f - 3\text{Id}). \qquad (*)$$

D'après ce qui précède, 0 et 3 sont donc valeurs propres de f et on a :

$$\dim(E_0(f)) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(E_3(f)) \geq 1.$$

Or d'après le cours, on a :

$$\dim(E_0(f)) + \dim(E_3(f)) \leq 3.$$

Ainsi $\dim(E_3(f)) = 1 = \dim \text{Im}(f)$, et on a donc avec $(*)$:

$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 3\text{Id}).}$$

(b) Avec ce qui précède, on a obtenu :

$$\dim(E_0(f)) + \dim(E_3(f)) = \dim(E).$$

Ainsi on a $\text{Sp}(f) = \{0, 3\}$ et $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$ d'après le cours.

Exercice 24.23 (★★ - Extrait d'Edhec 2006)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe deux réels λ_1, λ_2 distincts tels que $(f - \lambda_1 \mathrm{Id}) \circ (f - \lambda_2 \mathrm{Id}) = 0$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}((f - \lambda_1 \mathrm{Id}) - (f - \lambda_2 \mathrm{Id})) = \mathrm{Id}$.
2. En déduire que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{Id})$.
3. Montrer que f est diagonalisable.

1. On a :
$$\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}((f - \lambda_1 Id) - (f - \lambda_2 Id)) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}((\lambda_2 - \lambda_1) Id) = Id.$$
2. Montrons que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$.
   - Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id) \cap \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$. d'après l'identité de la question précédente que :
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}((f - \lambda_1 Id) - (f - \lambda_2 Id))(x) \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\underbrace{(f - \lambda_1 Id)(x)}_{=0_E \text{ car } x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id)} - \underbrace{(f - \lambda_2 Id)(x)}_{=0_E \text{ car } x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id))}\right) = 0_E. \end{aligned}$$
     Ainsi, on a bien $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id) \cap \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id) = \{0_E\}$.

     Autre méthode. Si $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id) \cap \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$, alors on a $f(x) = \lambda_1 x$ et $f(x) = \lambda_2 x$. D'où en soustrayant, $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0_E$, et donc $x = 0_E$ puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

     Soit $x \in E$, on a toujours par l'identité de la question précédente :
$$x = \underbrace{\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(f - \lambda_1 Id)(x)}_{=:y} + \underbrace{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(f - \lambda_2 Id)(x)}_{=:z}.$$
     On a :
$$(f - \lambda_2 Id)(y) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\underbrace{(f - \lambda_2 Id) \circ (f - \lambda_1 Id)}_{=0_{\mathscr{L}(E)}}(x) = 0_E$$
     de sorte que $y \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$. De même, on montre que $z \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id)$. Résumons : on a donc montré que pour tout $x \in E$, il existe $(y, z) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id) \times \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ tel que $x = y + z$. Ce qui signifie par définition que :
$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id) + \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id).$$

   Avec les deux points précédents, on peut donc conclure que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$.
3. On considère $\mathscr{B}_1$ une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ (éventuellement vide si $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id) = \{0_E\}$) et $\mathscr{B}_2$ une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$. Puisque $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$, la concaténation $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^n$, qui est constituée de vecteurs propres de f. Ainsi f est bien diagonalisable.

Exercice 24.24 (★★ - Racines carrées d'une matrice diagonalisable (EML 2009))

1. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.
   (a) Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g.
   (b) En déduire que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
   (c) Justifier que f est diagonalisable.
   Montrer que, pour toute base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f, la matrice de g relativement à la base $\mathscr{B}$ est diagonale. En déduire que g est diagonalisable.
2. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.
   On appelle racine carrée de A toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
   (a) Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
   (b) Donner un exemple de racine carrée de A (on l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D).
   (c) Soit R une racine carrée de A. Vérifier que $AR = RA$.
   En déduire que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.
   (d) Établir qu'il existe exactement 2^n racines carrées de A.

1. (a) C'est du cours (Chapitre 9). Redémontrons le malgré tout. Soit donc λ une valeur propre de f, $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé. On souhaite montrer que :
$$\forall x \in E_\lambda(f), \quad g(x) \in E_\lambda(f).$$
Soit donc $x \in E_\lambda(f)$, on a :
$$f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$
On a bien $g(x) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda Id) = E_\lambda(f)$. Donc le sous-espace $E_\lambda(f)$ est stable par g.
   (b) Notons pour commencer que comme f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes, les sous-espaces propres de f sont tous de dimension 1. Soit v un vecteur propre associé à une valeur propre λ de f, on a par conséquent (puisque $v \neq 0_E$ en tant que vecteur propre) que :
$$E_\lambda = \mathrm{Vect}(v).$$
D'après la question précédente, on a :
$$g(v) \in E_\lambda = \mathrm{Vect}(v) \quad \Rightarrow \quad \exists \mu \in \mathbb{R},\ g(v) = \mu v.$$
Donc v est bien vecteur propre de g.
   (c) f admettant n valeurs propres distinctes dans un espace $\mathbb{R}^n$ de dimension n, f est diagonalisable. Il existe donc une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_1$. Pour une telle base, notons $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_i) = \mu_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On a :
$$M_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Donc g est bien diagonalisable.

2. (a) Comme A admet n valeurs propres deux à deux distinctes, A est diagonalisable, et il existe une matrice P inversible et D diagonale telles que :

$$P^{-1}AP = D.$$

(b) Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A telles que $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Cherchons tout d'abord D' diagonale telle que $D'^2 = D$. Une solution évidente à cette équation est :

$$D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

puisqu'on a alors bien $D'^2 = D$. Et :

$$A = PDP^{-1} = PD'^2P^{-1} = PD'I_nD'P^{-1} = (PD'P^{-1})(PD'P^{-1}) = B^2$$

en posant $B = PD'P^{-1}$. On a donc obtenu une racine carrée B de A.

(c) Soit R telle que $R^2 = A$. On a :

$$AR = R^2R = RR^2 = RA.$$

Donc les matrices R et A commutent.

Si on note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à A et R, on est ramené au cas de la question 1. : f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes (et strictement positives), et g commute avec f. Si on note $\mathscr{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base de $\mathbb{R}^n$ telle que P soit la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$, on a par formule de changement de bases que :

$$D = P^{-1}AP = P^{-1}M_{\mathscr{B}_0}(f)P = M_{\mathscr{B}}(f).$$

Comme D est diagonale, $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres de f. D'après 1.(c), on en déduit que :

$$P^{-1}RP = P^{-1}M_{\mathscr{B}_0}(g)P = M_{\mathscr{B}}(g)$$

est une matrice diagonale également.

(d) Notons comme précédemment $M_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$. On a :

$$R^2 = A \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}R^2P = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad (P^{-1}RP)^2 = D,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mu_1^2 = \lambda_1 \\ \dots \\ \mu_n^2 = \lambda_n \end{cases} . \underset{\lambda_i > 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \mu_1 = \pm\sqrt{\lambda_1} \\ \dots \\ \mu_n = \pm\sqrt{\lambda_n} \end{cases} .$$

On a exactement 2^n solutions $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ de ce système. Par suite, il existe exactement 2^n solutions pour $P^{-1}RP$, et donc pour R. A possède donc exactement 2^n racines carrées qui sont :

$$P^{-1}\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} P$$

avec $\mu_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Exercice 24.25 (★★★)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable possédant p valeurs propres distinctes.

1. Montrer que A possède un polynôme annulateur P de degré p, et que tout polynôme annulateur non nul de A est de degré supérieur ou égal à p.

2. Montrer que la dimension de $\text{Vect}(I_n, A, A^2, \dots, A^k)$ vaut $k+1$ si $k < p$ et p sinon.

1. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A. Soit $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$.

   Soit Q un polynôme annulateur de A. D'après le cours, les valeurs propres de A sont parmi les racines de Q. Ainsi $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont racines de Q. Comme elles sont deux à deux distinctes, le polynôme $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ divise Q. Puisque $Q \neq 0$, on a donc $\deg(Q) \geq p$.

   Montrons à présent que P est annulateur de A. Puisque A est diagonalisable, elle est semblable à une matrice diagonale :

   $$D = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_p \text{ fois}})$$

   où m_i est la dimension du sous-espace propre associé à λ_i. Puisque A et D sont semblable, elles ont les mêmes polynômes annulateurs. Enfin on a (puisque D est diagonale) :

   $$P(D) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_p), \dots, P(\lambda_p)) = \text{diag}(0, \dots, 0) = 0_n.$$

   P est donc annulateur de D, et donc de A.

   Remarque. Nous avions déjà démontré une partie de ce résultat à la fin du Chapitre 13 : si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, alors $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ est un polynôme annulateur de A.

2. Commençons par montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{p-1})$ est libre. Soit pour cela $a_0, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ tels que :

   $$a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{p-1} A^{p-1} = 0.$$

   On a alors $Q(A) = 0$ avec $Q = a_0 + a_1 X + \dots + a_{p-1} X^{p-1}$. D'après la question précédente, on en déduit que Q est nécessairement le polynôme nul. Ainsi on a $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$. Donc la famille est libre.

   Pour tout $k < p$, on en déduit que la famille $(I_n, A, \dots, A^k)$ est libre en tant que sous-famille d'une famille libre. Donc on a :

   $$\dim \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^k) = \text{rg}(I_n, A, \dots, A^k) = k + 1.$$

Supposons à présent $k \geq p$, et montrons que :

$$\mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^k) = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1}).$$

Ceci permettra alors de conclure puisque $\dim(\mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})) = p$. Pour montrer cette égalité, il suffit de montrer que pour tout $k \geq p$, on a $A^k \in \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$. On propose deux méthodes.

Méthode 1. Par récurrence. Écrivons pour cela $P = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_p) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1 X + a_0$ (P est unitaire).

Init. Pour $k = p$, on a :

$$P(A) = 0 \Rightarrow A^p = -a_0 I_n - a_1 A - \dots - a_{p-1}A^{p-1} \in \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$$

D'où la propriété pour $k = p$.

Hér. Soit $k \geq p$ et supposons la propriété au rang k. On a par hypothèse de récurrence :

$$A^k \in \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$$

Donc il existe $b_0, b_1, \dots, b_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A^k = b_0 I_n + b_1 A + \dots + b_{p-1}A^{p-1}.$$

On multiplie par A cette égalité :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= b_0 A + b_1 A^2 + \dots + b_{p-2}A^{p-1} + b_{p-1}A^p \\ &= b_0 A + b_1 A^2 + \dots + b_{p-2}A^{p-1} + b_{p-1}(-a_0 I_n - a_1 A - \dots - a_{p-1}A^{p-1}) \\ &\in \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1}) \end{aligned}$$

D'où le résultat au rang $k+1$.

On conclut par principe de récurrence.

Méthode 2. Soit $k \geq p$. On effectue la division euclidienne de X^k par P. Il existe Q et R des polynômes tels que :

$$X^k = P \times Q + R \quad \text{avec } \deg(R) < p.$$

On évalue en A :

$$A^k = \underbrace{P(A)}_{=0_n} \times Q(A) + R(A) = R(A) \in \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1})$$

car $\deg(R) < p$. D'où le résultat.

Exercice 24.26 (★★★ - QSP HEC 2015)
Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Considérons la matrice $M_x = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de x la matrice M_x est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_x est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 24.27 (★★★ - Polynômes minimaux (Oral ESCP 2016))

1. Soit un entier $n \geq 2$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de M.
   (a) Justifier que $\mathscr{A}$ n'est pas réduit au polynôme nul.
   (b) Vérifier que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
   (c) Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathscr{A}, PQ \in \mathscr{A}$.
   (d) Montrer qu'il existe un polynôme non nul de $\mathscr{A}$ de degré minimal. Soit $K \in \mathscr{A}$ un polynôme unitaire de degré minimal.
   En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que K divise tout polynôme de $\mathscr{A}$. En déduire que
   $$\mathscr{A} = \{KQ,\ Q \in \mathbb{R}[X]\}.$$
   Un tel polynôme s'appelle polynôme minimal de M.

2. Exemples.
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Déterminer le polynôme minimal de λI_n, où I_n est la matrice identité d'ordre n.
   (b) Soit P la matrice d'un projecteur p distinct de 0 et Id. Déterminer le polynôme minimal de P.

3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal K. Montrer que l'ensemble des racines réelles de K est égal à l'ensemble des valeurs propres réelles de M.

1. (a) C'est du cours (plus précisément Chapitre 6 - Propriété 30). Rappelons l'argument utilisé : la famille $(I_n, M, M^2, \dots, M^{n^2})$ est de cardinal n^2+1 dans un espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension n^2. Cette famille est donc liée, de sorte qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n^2}) \neq (0, \dots, 0)$ tels que :
   $$a_0 I_n + a_1 M + \cdots + a_{n^2} M^{n^2} = 0_n.$$
   Le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n^2} X^{n^2}$ est donc annulateur de M, et est non nul. Ainsi $P \in \mathscr{A}$, et $\mathscr{A}$ n'est pas réduit au polynôme nul (qui est bien lui aussi annulateur de M).
   (b) On vient de montrer que $\mathscr{A} \neq \emptyset$. Montrons que cet ensemble est stable par combinaison linéaire. Soit pour cela $P, Q \in \mathscr{A}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On a :
   $$(\alpha P + \beta Q)(M) = \alpha P(M) + \beta Q(M) = \alpha 0_n + \beta 0_n = 0_n.$$
   Donc $(\alpha P + \beta Q) \in \mathscr{A}$, et $\mathscr{A}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
   (c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathscr{A}$. Montrons que $P \times Q \in \mathscr{A}$:
   $$(P \times_{\mathbb{C}[X]} Q)(M) = P(M) \times_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})} Q(M) = P(M) \times 0_n = 0_n.$$
   Donc $P \times Q$ appartient bien à $\mathscr{A}$.

   Remarque. Un sous-ensemble de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant 1.(b) et 1.(c) est appelé un *idéal* de $\mathbb{C}[X]$, notion qui dépasse le programme d'ECG.

   (d) L'ensemble $\{\deg(P),\ P \in \mathscr{A} \backslash \{0_{\mathbb{C}[X]}\}\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (d'après la question 1.(a)). Elle admet donc un plus petit élément $d \geq 0$. Considérons $P \in \mathscr{A}$ tel que $\deg(P) = d$. P est bien un polynôme non nul de $\mathscr{A}$ et de degré minimal. Quitte à le normaliser (c'est-à-dire à le diviser par son coefficient dominant), on peut supposer de plus qu'il est unitaire (il appartiendra alors toujours à $\mathscr{A}$ car $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel).

Dans la suite, on prend $K \in \mathscr{A}$ unitaire de degré minimal (on vient de voir qu'un tel polynôme existe bien). Montrons que :

$$\mathscr{A} = \{KQ,\ Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

- $\supset$ D'après la question 1.(b), on a $KQ \in \mathscr{A}$ pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$ puisque $K \in \mathscr{A}$. D'où l'inclusion $\{KQ,\ Q \in \mathbb{C}[X]\} \subset \mathscr{A}$.
- $\subset$ Soit $P \in \mathscr{A}$. Effectuons la division euclidienne de P par K. Il existe un unique coupe $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

  $$P = KQ + R \quad \text{avec } \deg(R) < \deg(K).$$

  En évaluant cette égalité en M, on obtient :

  $$0_n = P(M) = K(M) \times Q(M) + R(M) = 0_n \times Q(M) + R(M) = R(M).$$

  Ainsi on a $R \in \mathscr{A}$ avec $\deg(R) < \deg(K) = d$. Par définition de d (K de degré minimal parmi les polynômes non nuls de $\mathscr{A}$), on a donc nécessairement $R = 0$. On obtient donc :

  $$P = KQ + R = KQ \in \{KQ,\ Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

  D'où l'inclusion réciproque.

D'où l'égalité des deux ensembles.

Remarque. Cela permet en particulier de montrer que le polynôme minimal d'une matrice M est unique. En effet, si K_1 et K_2 sont deux polynômes minimaux de M, alors on aurait :

$$K_2 \in \mathscr{A} = \{K_1 Q, Q \in \mathbb{C}[X]\} \quad \Rightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{C}[X],\ K_2 = K_1 \times Q.$$

En prenant les degrés, on obtient :

$$\deg(K_2) = \deg(K_1) + \deg(Q).$$

Or $\deg(K_2)$ et $\deg(K_1)$ sont égaux par définition des polynômes minimaux. Donc $\deg(Q) = 0$, et il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que :

$$K_2 = \lambda K_1.$$

Comme enfin ces deux polynômes sont unitaires, $\lambda = 1$ et $K_1 = K_2$. On parlera donc **du** polynôme minimal de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (et non pas **d'un** polynôme minimal de M).

2. (a) Le polynôme $K = X - \lambda$ est annulateur de λI_n, unitaire. Et il est de degré minimal : en effet si P est annulateur de λI_n et $\deg(P) < 1$, alors P est constant de la forme a avec $a \in \mathbb{C}$. Et on a dans ce cas $0_n = P(\lambda I_n) = aI_n$ qui est nul si et seulement si $a = 0$. P est le polynôme nul alors.

   (b) Comme $P^2 = P$, $K = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de P.

   Montrons que c'est le polynôme minimal de P. Notons pour cela que comme p est distinct de 0 et Id, $G = E_0(p) \leq \{0\}$ et $F = E_1(p) \neq \{0\}$, et donc 0 et 1 sont valeurs propres de p, et de P aussi. Si Q est un polynôme annulateur non nul de p, 0 et 1 sont donc parmi ses racines. Ainsi il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ non nul tel que :

   $$Q = X(X-1)R = K \times R \quad \text{de degré } \geq 2.$$

   Ainsi K est bien unitaire et de degré minimal parmi les polynômes annulateurs non nuls de P. C'est donc le polynôme minimal.

3. Comme K est annulateur de M, les valeurs propres de M sont parmi les racines de K. On souhaite montrer que ce sont exactement les racines de K. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de K. Supposons par l'absurde que a ne soit pas valeur propre de M. Comme $K(a) = 0$, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ non nul (car K est non nul) tel que :
$$K = (X - a)Q \quad \text{ce qui donne} \quad 0_n = (M - aI_n)Q(M).$$
Mais comme a n'est pas valeur propre de M, la matrice $M - aI_n$ est inversible, de sorte que $Q(M) = 0_n$. Q serait alors un polynôme annulateur de M non nul et de degré $< \deg(K)$. C'est contradictoire avec la définition de polynôme minimal.

   Ainsi l'ensemble des racines de K est égal à $\mathrm{Sp}(M)$.

Exercice 24.28 (★★★★ - Oral ESCP 2016)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs propres et $E_1, \dots, E_p$ les sous-espaces propres associés.
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f, tel que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. Soit x un vecteur de F.

1. Montrer qu'il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p$.
2. On suppose désormais $x \neq 0$. Montrer que, quitte à modifier l'ordre, on peut supposer qu'il existe $r \in [\![1, p]\!]$ tel que $x_i = 0$ pour $i > r$ et $x_i \neq 0$ pour $i \leqslant r$. On a alors $x = x_1 + \cdots + x_r$.
   On note V_x le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, \dots, x_r)$.
3. (a) Montrer que $(x_1, \dots, x_r)$ est une base de V_x.
   (b) Montrer que pour tout $j \geq 0$, $f^j(x) \in V_x$.
   (c) Déterminer la matrice A de la famille $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ dans la base $(x_1, \dots, x_r)$ de V_x.
   Notons $C_1, \dots, C_r$ les colonnes de A et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des réels tels que $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j C_j = 0$.
   Montrer que le polynôme $P = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j X^{j-1}$ est le polynôme nul. En déduire que A est inversible.
   (d) Montrer que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \in F$, puis que $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.
4. Soit g un endomorphisme de E, diagonalisable et commutant avec f (i.e. tel que $f \circ g = g \circ f$). Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à f et g.

Espaces euclidiens, endomorphismes symétriques

Exercice 24.29 (★)
Pour $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$. On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, en déterminer une base et la dimension.
3. Déterminer une base de $F^\perp$.
4. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le projeté orthogonal de A sur F et en déduire $\min_{B \in F} \|A - B\|$.

1. Montrons que l'application $(M, N) \mapsto \langle M, N\rangle = Tr({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   - *Linéarité à gauche.* Soient $(M_1, M_2, N) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^3$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a :

   $$\begin{aligned}\langle \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2, N\rangle &= \mathrm{Tr}({}^t(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)N)\\ &= \mathrm{Tr}((\lambda_1\, {}^tM_1 + \lambda_2\, {}^tM_2)N) \text{ par lin. de la transposition}\\ &= \mathrm{Tr}(\lambda_1\, {}^tM_1 N + \lambda_2\, {}^tM_2 N)\\ &= \lambda_1 \mathrm{Tr}({}^tM_1 N) + \lambda_2 \mathrm{Tr}({}^tM_2 N) \text{ par lin. de la trace}\\ &= \lambda_1 \langle M_1, N\rangle + \lambda_2 \langle M_2, N\rangle\end{aligned}$$

   D'où la linéarité à gauche.

   - *Symétrie.* Soient $M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

   $$\langle N, M\rangle = \mathrm{Tr}({}^tNM) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tMN)) = \mathrm{Tr}({}^tMN) = \langle M, N\rangle$$

   D'où la symétrie, et par conséquent la linéarité à droite également.

   - *Positif.* Commençons par rappeler le calcul classique de $\mathrm{Tr}({}^tAA)$ dans le cas général où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (à savoir refaire). Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

   $$[{}^tAA]_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} [{}^tA]_{i,j}[A]_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}a_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2.$$

   On en déduit que :

   $$Tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} [{}^tAA]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2.$$

   Pour $n = 2$, on a donc en particulier :

   $$\langle A, A\rangle = a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 + a_{2,1}^2 + a_{2,2}^2 \geq 0$$

   - *Défini positif.* Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

   $$\begin{aligned}\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \underbrace{a_{j,i}^2}_{\geq 0} = 0\\ \Leftrightarrow \forall i, j \in [\![1, 2]\!],\ a_{j,i} = 0\\ \Leftrightarrow A = 0_{2,2}\end{aligned}$$

   Ainsi $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire.

2. On a :

   $$F = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

   La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est donc génératrice de F, et elle est libre car formée de **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de F, de sorte que $\dim(F) = 2$.

3. Quelques rappels pour commencer.

Rappel. Orthogonal d'un sous-espace.
Si F est un sous-espace d'un espace euclidien E, on définit *l'orthogonal de F* par :

$$F^\perp = \{x \in E,\, \forall y \in F,\, \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Rappelons que :

- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E supplémentaire de F, de sorte que :

$$E = F \oplus F^\perp.$$

  En particulier, on a $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.
- Si $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$, alors :

$$x \in F^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, u_i\rangle = 0 \quad \forall k \in [\![1, p]\!].$$

- La concaténation d'une base orthonormée de F et d'une base orthonormée de $F^\perp$ est une base orthonormée de E.

Tout d'abord, notons que $\dim F^\perp = \dim \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) - \dim F = 4 - 2 = 2$. On a :

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F^\perp &\Leftrightarrow \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - d = 0 \\ c + b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

De même, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $F^\perp$ et libre car formée de **deux** vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $F^\perp$.

4. Commençons par rappeler les différentes méthodes pour calculer le projeté orthogonal sur un sous-espace.

Rappel. Calcul du projeté orthogonal sur un s.e.v. F.

On procèdera différemment selon la situation dans laquelle on se trouve :

- si on dispose (facilement) d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ de F, on utilisera la formule suivante :

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

- si on dispose d'une base $(u_1, \dots, u_p)$ de F qui n'est pas orthonormée, alors on procèdera comme suit :
  (i) on exprime que $p_F(x) \in F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$:

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}, \quad p_F(x) = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p.$$

  (ii) on exprime que $x - p_F(x) \in F^\perp$:

$$\begin{cases} \langle x - p_F(x), u_1 \rangle = 0 \\ \quad \vdots \\ \langle x - p_F(x), u_p \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle x, u_1 \rangle = \lambda_1 \langle u_1, u_1 \rangle + \cdots + \lambda_p \langle u_p, u_1 \rangle \\ \quad \vdots \\ \langle x, u_p \rangle = \lambda_1 \langle u_1, u_p \rangle + \cdots + \lambda_p \langle u_p, u_p \rangle \end{cases}.$$

  (iii) on résout ce système linéaire pour obtenir $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, et donc $p_F(x)$.
- enfin si $F^\perp$ est de « petite » dimension (en pratique, si $\dim(F^\perp) < \dim(F)$), on préférera calculer le projeté orthogonal sur $F^\perp$, puis utiliser le fait que $p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x)$.

Notons ici que $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$, donc on dispose d'une base orthogonale de F. De plus, on a :

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 1 + (-1)^2 = 2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2.$$

Posons $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (e_1, e_2) est donc une base orthonormée de F. On a donc d'après le cours :

$$\begin{aligned} p_F(A) &= \langle A, e_1 \rangle e_1 + \langle A, e_2 \rangle e_2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rappel. Distance à un sous-espace F.

Le minimum $\min\{\|x - y\|, \, y \in F\}$ existe et est atteint en un unique point de F qui est $p_F(x)$. On appelle distance de x à F, notée $d(x, F)$, ce minimum, de sorte que :

$$d(x, F) = \min\{\|x - y\|, \, y \in F\} = \|x - p_F(x)\|.$$

On a donc ici :

$$\min_{B\in F}\|A-B\| = \|A-p_F(A)\| = \left\|\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\|$$
$$= \left\|\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2+1^2} = 1.$$

Exercice 24.30 (★★ - Inégalité de Bessel)

Soit E un espace euclidien, soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base orthonormée de F. On note p_F la projection orthogonale sur F.

Montrer que pour tout $x\in E$, $\|p_F(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\langle x,e_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$.

Soit $x\in E$. Puisque $(e_1,\cdots,e_p)$ est une base orthonormée de F, on rappelle que :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p}\langle x,e_i\rangle e_i$$

et on a de plus :

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{p}\langle x,e_i\rangle^2.$$

D'autre part par définition du projeté orthogonal, on a $p_F(x)\in F$ et $x-p_F(x)\in F^\perp$ de sorte que ces vecteurs sont orthogonaux. Par le théorème de Pythagore, on obtient :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \underbrace{\|x-p_F(x)\|^2}_{\geq 0} \geq \|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{p}\langle x,e_i\rangle^2.$$

D'où l'inégalité voulue.

Exercice 24.31 (★★)

Soit E un espace euclidien de dimension n, et soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E. On note $F=\mathrm{Vect}(e_1+e_2+\cdots+e_n)$. Déterminer la distance de e_1 à F, c'est-à-dire $\displaystyle\min_{x\in F}\|e_1-x\|$.

Exercice 24.32 (★★ - Extrait de EML 2023)

On considère un espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Pour $a\in E$, on note f_a l'application qui à un élément x dans E associe le réel $f_a(x)=\langle a,x\rangle$.

1. Soit $a\in E$.
   (a) Démontrer que f_n est un élément de $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer le noyau de f_a.
   (c) Démontrer que si f_a est l'application nulle, alors $a=0_E$.
2. **Théorème de représentation des formes linéaires.**
   On considère maintenant l'application $\Phi : E\to E^*$ définie, pour $a\in E$, par : $\Phi(a)=J_\alpha$.
   (a) Démontrer que Φ est linéaire.
   (b) Démontrer que Φ est un isomorphisme de E sur E^*.

(c) Justifier que pour tout $\varphi \in E^*$, il existe un unique $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle a, x\rangle.$$

3. **Application aux formes linéaires sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.**

Dans cette question, p est un entier naturel non nul et on considère $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille p.

(a) Démontrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle :, (A, B) \mapsto \text{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

(b) Démontre que si $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire, alors il existe une matrice A dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on ait :

$$\varphi(M) = \text{tr}(AM).$$

Exercice 24.33 (★★★ - QSP HEC 2018)

Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
On note H le sous-espace vectoriel de E engendré par les trois polynômes $(x-1)(x-2)(x-4)$, $(x-1)(x-3)(x-4)$ et $(x-2)(x-3)(x-4)$.

1. (a) Justifier que H est un hyperplan de E.
   (b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à H. Est-elle unique ?
2. On considère le produit scalaire sur E défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4).$$

Calculer, pour tout polynôme $P \in E$, la projection orthogonale de P sur $H^\perp$.

Commençons par quelques rappels sur les formes linéaires et hyperplans.

Rappels. Formes linéaires et hyperplans.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On appelle :

- hyperplan de E tout espace vectoriel de dimension $\dim(E) - 1$;
- forme linéaire sur E une application linéaire de E à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Rappelons les résultats principaux sur le lien entre formes linéaires et hyperplans :

- H est un hyperplan de E si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
- Si $H = \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$ où φ et ψ sont des formes linéaires non nulle sur E, alors il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Pour plus de détails, je vous renvoie au **Complément 2 - Formes linéaires et hyperplans**.

1. (a) Notons $P_3 = (X-1)(X-2)(X-4)$, $P_2 = (X-1)(X-3)(X-4)$ et $P_1 = (X-2)(X-3)(X-4)$.

Déjà vu ?

Ces polynômes devraient vous faire penser aux polynômes de Lagrange associés aux réels $1, 2, 3, 4$, même s'ils n'ont pas été normalisés (il faudrait changer le coefficient dominant de P_1 par exemple pour que $P_1(1) = 1$). Cela devrait nous aider d'avoir ça en tête pour la suite de l'exercice.

Montrons que (P_1, P_2, P_3) est une famille libre. Soient pour cela $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0.$$

On évalue cette relation en $X = 1$. On obtient :

$$a \underbrace{P_1(1)}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

De même en évaluant en $X = 2, 3$, on obtient $b = c = 0$. Donc la famille (P_1, P_2, P_3) est libre et $H = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ est de dimension $3 = \dim(E) - 1$. C'est donc un hyperplan de E.

(b) On sait par le cours que H est le noyau d'une forme linéaire non nulle, mais le cours ne nous dit pas comment trouver cette forme linéaire.

Visiblement, les polynômes (P_1, P_2, P_3) sont liés aux polynômes de Lagrange (il faudrait les renormaliser) associés à $1, 2, 3, 4$. Manque donc le quatrième polynôme $P_4 = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$. Tous ces polynômes se caractérisent à l'aide de l'évaluation en $1, 2, 3, 4$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère donc la forme linéaire :

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \to \mathbb{R} \\ P & \mapsto P(a) \end{cases}.$$

Choisissons a de sorte que $H = \text{Ker}(\varphi_a)$. On remarque que pour $a = 4$, on a bien $\varphi_4(P_i) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Donc on a $H \subset \text{Ker}(\varphi)$. Pour montrer l'égalité, on étudie les dimensions. On a par le théorème du rang :

$$4 = \dim \text{Ker}(\varphi_4) + \dim \text{Im}(\varphi_4).$$

Or $\text{Im}(\varphi_4)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, non nul car φ_4 est non nul ($\varphi_4(1) = 1$ par exemple). Donc $\text{Im}(\varphi_4) = \mathbb{R}$ et on a :

$$\dim \text{Ker}(\varphi_4) = \dim(E) - 1.$$

Ainsi $\text{Ker}(\varphi_4)$ est aussi un hyperplan de E (ce qu'on savait avec le **Complément 2 - Formes linéaires et hyperplans** puisque c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle). Par égalité des dimensions et l'inclusion $H \subset \text{Ker}(\varphi_4)$, on peut donc conclure que :

$$H = \text{Ker}(\varphi).$$

Il n'y a pas unicité de la forme linéaire : par exemple $2\varphi_4$ convient aussi puisque $\text{Ker}(2\varphi_4) = \text{Ker}(\varphi_4) = H$.

Remarque. Et on a d'ailleurs montré dans le **Complément 2 - Formes linéaires et hyperplans** que toutes les formes linéaires qui conviennent sont de cette « forme », puisque si $H = Ker(\varphi) = Ker(\psi)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.

2. Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E. La bilinéarité, la symétrie et la positivité ne posent pas de difficulté. Montrons le caractère défini positif. Soit pour cela $P \in E$ tel que :
$$\langle P, P \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad P(1)^2 + P(2)^2 + P(3)^2 + P(4)^2 = 0.$$
On en déduit que $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$. P admet donc 4 racines distinctes, et est de degré ≤ 3. C'est donc le polynôme nul.

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.

Commençons par déterminer $H^{\perp}$. On a :
$$Q \in H^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle P_1, Q \rangle = 0 \\ \langle P_2, Q \rangle = 0 \\ \langle P_3, Q \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(1) = 0 \\ Q(2) = 0 \\ Q(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P_4 \text{ divise } Q$$
$$\underset{Q \in \mathbb{R}_3[X]}{\Leftrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad Q = \lambda P_4$$
Ainsi on a $H^{\perp} = \text{Vect}(P_4)$. On dispose donc de la base orthonormée $\left(e_4 = \dfrac{P_4}{\|P_4\|}\right)$ de $H^{\perp}$. D'où l'expression du projeté orthogonal de $P \in E$ sur $H^{\perp}$:
$$p_{H^{\perp}}(P) = \langle P, e_4 \rangle e_4 = \frac{\langle P, P_4 \rangle}{\|P_4\|^2} P_4.$$
Or on a :
$$\|P_4\|^2 = P_4(4)^2 = 36 \quad \text{et} \quad \langle P, P_4 \rangle = 6P(4).$$
Ainsi le projeté orthogonal de $P \in E$ sur $H^{\perp}$ est :
$$p_{H^{\perp}}(P) = \frac{6P(4)}{36} P_4 = \frac{P(4)}{6} P_4.$$

Exercice 24.34 (★★★★ - Oral ESCP 2006)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On pose $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. Un endomorphisme g de E est dit orthogonal si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :
$$\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

1. Soit g un endomorphisme de E. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) g et orthogonal
   (ii) Pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = \|x\|$.
   (iii) L'image par g d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E.

   On note $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est stable par tous les éléments de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $F = \{0_E\}$ ou $F = E$

   On pourra montrer que si $F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$, il existe un élément de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, que l'on exhibera, qui ne laisse pas F stable).

3. Soit f un endomorphisme de E. On suppose, pour toute la suite de l'exercice, que f commute avec tous les éléments de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\text{Ker}(f)$ est stable par tous les éléments de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que pour tout réel λ, $\operatorname{Ker}(f-\lambda \mathrm{id}_E)$ est stable par tous les éléments de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

(c) En déduire que pour tout réel λ, $\operatorname{Ker}(f-\lambda \mathrm{id}_E)=\{0_E\}$ ou $\operatorname{Ker}(f-\lambda \mathrm{id}_E)=E$.

4. On suppose que n est impair, et on admet qu'alors tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admet au moins une valeur propre réelle.

   Montrer qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f=\lambda_0 \mathrm{id}_E$.

Exercice 24.35 (★★)

Soit $n \geq 1$ et soit $E=\mathbb{R}_n[x]$. On définit $f : E \to \mathbb{R}[x]$ par $f(P)=-P''(x)+2xP'(x)+P(x)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que pour tout $P, Q \in E$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.
3. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
4. Prouver que $\forall P, Q \in E$, $\langle P', Q'\rangle = \langle f(P), Q\rangle - \langle P, Q\rangle$.
5. En déduire que f est un endomorphisme symétrique de E.

1. Pour tout $P \in E$, on a $\deg(P) \leq n$ et donc :

$$\deg(f(P)) \leq \max(\deg(P''), \deg(XP'), \deg(P)) \leq n.$$

   Donc f est bien à valeur dans E.

   Montrons que f est linéaire. Pour tout $P, Q \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\alpha P+\beta Q) &= -(\alpha P+\beta Q)''+2X(\alpha P+\beta Q)'+(\alpha P+\beta Q) \\ &= -(\alpha P''+\beta Q'')+2X(\alpha P'+\beta Q')+(\alpha P+\beta Q) \\ &= \alpha(-P''+2XP'+P)+\beta(-Q''+2XQ'+Q)=\alpha f(P)+\beta f(Q). \end{aligned}$$

   Donc f est un endomorphisme de E.

2. Soit P et $Q \in E$, qu'on supposera non nul (sinon la convergence est évidente). Notons respectivement a_pX^p et b_qX^q les termes dominants de P et Q. La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue comme produit de fonctions qui le sont. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est donc généralisée en $+\infty$ et en $-\infty$.

   En $+\infty$, on a :

   - $t^2P(t)Q(t)e^{-t^2} \sim a_pb_qt^{2+p+q}e^{-t^2} \underset{u=t^2}{=} a_pb_qu^{1+\frac{p+q}{2}}e^{-u} \underset{u\to+\infty}{\to} 0$ par croissance comparées. Ainsi on a $P(t)Q(t)e^{-t^2}=o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   - $\dfrac{1}{t^2}>0$ pour tout $t>0$.
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $2>1$.

   Par théorème de comparaison, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. On montre de même la convergence en $-\infty$. D'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

3. Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

   - *Linéarité à gauche.* $\forall P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t) Q(t) e^{-t^2} \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t)) Q(t) e^{-t^2} \mathrm{d}t \\
&= \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(t) Q(t) e^{-t^2} \mathrm{d}t + \lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(t) Q(t) e^{-t^2} \mathrm{d}t \\
&\text{par linéarité de l'intégrale (les intégrales convergent !)} \\
&= \lambda_1 \langle P_1, Q \rangle + \lambda_2 \langle P_2, Q \rangle
\end{aligned}$$

   - *Symétrie.*

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t^2} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t) P(t) e^{-t^2} \mathrm{d}t = \langle Q, P \rangle.$$

     En particulier, on en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite.

   - *Positivité.* Pour tout $P \in E$

$$\langle P, P \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2} \mathrm{d}t \geq 0$$

     en tant qu'intégrale d'une fonction positive.

   - *Défini positif.* Soit P tel que $\langle P, P \rangle = 0$. On a :

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

     Or $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est **continue** et **positive** sur $\mathbb{R}$. Son intégrale est donc nulle si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t)^2 e^{-t^2} = 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad P(t) = 0.$$

     P admet donc une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Donc $P = 0_E$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positif.

   Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

4. Pour tout $P, Q \in E$, on a par linéarité à gauche :

$$\langle f(P), Q \rangle - \langle P, Q \rangle = -\langle P'', Q \rangle + \langle 2XP', Q \rangle. \qquad (*)$$

   Or on a :

$$\langle P'', Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P''(t) Q(t) e^{-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

   Soit $A < B$. Effectuons une intégration par parties sur le **segment** $[A, B]$.

$$\begin{array}{c|ccc}
+ & Q(t)e^{-t^2} & & P''(t) \\
 & & \searrow & \\
- & [Q'(t) - 2tQ(t)]\, e^{-t^2} & \overset{\int}{\longleftarrow} & P'(t)
\end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto P'(t)$ et $t \mapsto Q(t)e^{-t^2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_A^B P''(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[P'(t)Q(t)e^{-t^2}\right]_A^B - \int_A^B P'(t)\left[Q'(t) - 2tQ(t)\right]e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= P'(B)Q(B)e^{-B^2} - P'(A)Q(A)e^{-A^2} - \int_A^B P'(t)\left[Q'(t) - 2tQ(t)\right]e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On obtient lorsque $B \to +\infty$ (tout converge d'après la question 2. et par croissance comparée) :

$$\int_A^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -P'(A)Q(A)e^{-A^2} - \int_A^{+\infty} P'(t)\left[Q'(t) - 2tQ(t)\right]e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Et lorsque $A \to -\infty$ (de même, tout converge) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)\left[Q'(t) - 2tQ(t)\right]e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} 2tP'($$

soit encore :

$$\langle P'', Q\rangle = -\langle P', Q'\rangle + \langle 2XP', Q\rangle.$$

D'où en substituant dans $(*)$:

$$\langle f(P), Q\rangle - \langle P, Q\rangle = \langle P', Q'\rangle - \langle 2XP', Q\rangle + \langle 2XP', Q\rangle = \langle P', Q'\rangle.$$

5. Commençons par rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique.

> **Rappel. Endomorphisme symétrique.**
> Un endomorphisme f d'un espace euclidien E est symétrique si :
> $$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle.$$

Ici on a pour tout $P, Q \in E$:

$$\begin{aligned}\langle f(P), Q\rangle &\overset{4.}{=} \langle P', Q'\rangle + \langle P, Q\rangle \\ &= \langle Q', P'\rangle + \langle Q, P\rangle \quad \text{par sym. du prod. scal.} \\ &\overset{4.}{=} \langle f(Q), P\rangle = \langle P, f(Q)\rangle \quad \text{toujours par sym.}\end{aligned}$$

Donc f est bien un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 24.36 (★★)

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = {}^tAA$. Montrer que S est symétrique, et que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.

2. Soit S une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

3. **Application**. $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

1. Commençons par quelques rappels sur l'application transposée.

Rappel. Application transposée.

- $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto^t A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est linéaire.
- ${}^t({}^tA) = A$.
- ${}^t(AB) =^t B^tA$.
- $\mathrm{Tr}({}^tA) = \mathrm{Tr}(A)$.

En utilisant les propriétés de la transposée, on obtient que S est bien symétrique puisque ${}^tS =^t ({}^tAA) = ({}^tA)^t({}^tA) =^t AA$.

Montrons à présent que les valeurs propres de S sont toutes positives. Soit pour cela λ une valeur propre de S, et $X \neq 0_{n,1}$ un vecteur propre associé. On a :

$$ {}^tAAX = \lambda X \quad \Rightarrow \quad {}^t(AX)(AX) =^t X^tAAX = \lambda^tXX. $$

D'où en notant $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique :

$$ \|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2 \underset{\|X\|\neq 0}{\Rightarrow} \lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0. $$

Les valeurs propres de S sont donc positives ou nulles.

2. Quelques rappels tout d'abord sur la réduction des endomorphismes et matrices symétriques.

Rappel. Réduction des endomorphismes et matrices symétriques.
Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E.

- Les valeurs propres de f sont réelles.
- Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux. En particulier, une famille de vecteurs associés à des valeurs propres distinctes est orthogonale.
- **Théorème spectral.**
  f est diagonalisable, à valeurs propres réelles, et il existe une **base orthonormée** de E formée de vecteurs propres de f.
- **Traduction matricielle du théorème spectral.**
  Si A est symétrique réelle, alors A est diagonalisable, à valeurs propres réelles, et il existe P orthogonale et D diagonale telles que :

$$ D = P^{-1}AP = {}^tPAP. $$

Comme S est symétrique réelle, elle diagonalise en base orthonormée, et il existe P orthogonale, et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale telles que :

$$ S = PDP^{-1} = PD\,{}^tP. $$

Notons $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ (existe bien car les λ_i sont positif par hypothèse). On a :

$$ S = PD'^2\,{}^tP = (PD'\,{}^tP)(PD'\,{}^tP) = (PD'\,{}^tP)^2. $$

Posons $A = PD'\,{}^tP$. On a ${}^tA = {}^t(PD'\,{}^tP) = {}^t({}^tP)\,{}^tD'\,{}^tP = PD'\,{}^tP = A$, et donc :

$$S = A^2 = {}^tAA.$$

D'où le résultat voulu.

3. S étant symétrique réelle, on sait qu'il existe bien une telle matrice A. Procèdons comme à la question 2., en diagonalisant S en base orthonormée.

Commençons par chercher les valeurs propres de S. On a :

$$S - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 1. Donc 1 est valeur propre de S et $\dim(E_1(S)) = 2 - 1 = 1$. De plus on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(S) \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 0.$$

Donc $E_1(S) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Pour obtenir l'autre valeur propre, on peut au choix prendre la trace de S (qui est diagonalisable car symétrique réelle), ou remarquer (comme d'habitude pour ce « type » de matrices) que :

$$S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc 3 est valeur propre de S, et $1 \leq \dim(E_3(S)) \leq 1$ (car on a déjà $\dim(E_1(S)) = 1$), de sorte que $E_3(S) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

On a donc une base de vecteurs propres de S, reste à obtenir une base orthonormée de vecteurs propres. Comme S est symétrique réelle, ces sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, ce qu'on remarque d'ailleurs dans notre situation. Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est orthogonale. Il reste à normaliser les vecteurs pour obtenir une base orthonormée de vecteurs propres de S :

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2.$$

En posant $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(1, 3)$, on a donc que P est orthogonale et que :

$$S = PD{}^tP.$$

En posant $D' = \text{diag}(1, \sqrt{3})$ et $A = PD'\,{}^tP$, on a donc :

$$S = {}^tAA.$$

Après calculs, on obtient $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 24.37 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels de degré au plus n.

Étude d'un endomorphisme

On considère l'application u qui à $P \in \mathbb{R}_n[x]$ associe $u(P) = (x^2-1)P''(x) + 2xP'(x)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. (a) Déterminer les valeurs propres de u.
   (b) u est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$?
   (c) Montrer que u est diagonalisable. Préciser la dimension de chaque sous-espace propre.
4. (a) Prouver que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe un unique polynôme unitaire P_k dans $\mathbb{R}_n[x]$ tel que :
   $$u(P_k) = k(k+1)P_k.$$
   (b) Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, P_k est de degré k.
   (c) Déterminer P_0, P_1 et P_2.

Polynômes de Legendre

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. On note $Q_k = (x^2-1)^k$ et L_k la dérivée k-ième de Q_k : $L_k = Q_k^{(k)}$.

5. Montrer que $L_k \in \mathbb{R}_n[x]$ et déterminer son cœfficient dominant.
6. Vérifier que $(x^2-1)Q_k'(x) = 2kxQ_k(x)$ puis en dérivant $(k+1)$ fois cette égalité à l'aide de la formule de Leibniz, montrer que :
   $$(x^2-1)L_k''(x) + 2xL_k'(x) = k(k+1)L_k(x).$$
7. En déduire que $P_k = \dfrac{k!}{(2k)!}L_k$.

Produit scalaire et orthogonalité

8. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
9. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[x]$.
   On pourra pour cela noter que $u(P) = \dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{dP}{dx}\right)$.
10. En déduire que la famille L_k des polynômes de Legendre est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

   $$\deg(u(P)) \leq \max(\deg((X^2-1)P''), \deg(2XP')) = \max(\deg(P'')+2, \deg(P')+1) \leq \deg(P) \leq n.$$

   Donc u est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

   Montrons que u est linéaire. Soit pour cela $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

   $$\begin{aligned} u(\alpha P + \beta Q) &= (X^2-1)(\alpha P + \beta Q)'' + 2X(\alpha P + \beta Q)' = (X^2-1)((\alpha P'' + \beta Q'') + 2X(\alpha P' + \beta Q') \\ &= \alpha\left[(X^2-1)P'' + 2XP'\right] + \beta\left[(X^2-1)Q'' + 2XQ'\right] \end{aligned}$$

   Donc u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On a :

$$u(1) = 0, \quad u(X) = 2X,$$

et pour tout $2 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} u(X^k) &= (X^2-1)\left[k(k-1)X^{k-2}\right] + 2X\left[kX^{k-1}\right] = [k(k-1)+2k]\,X^k - k(k-1)X^{k-2} \\ &= k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2} \end{aligned}$$

La matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

3. (a) A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres se trouvent sur sa diagonale. Ainsi on a $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u) = \{k(k+1),\ 0 \leq k \leq n\}$.
   (b) u n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ car $0 \in \mathrm{Sp}(u)$.
   (c) u admet $n+1$ valeurs propres distinctes dans un espace de dimension $n+1$. u est donc diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

4. (a) Soit $0 \leq k \leq n$. Comme nous venons de le dire, le sous-espace propre $E_{k(k+1)}(u)$ est de dimension 1, donc il existe Q_k un polynôme non nul tel que :

$$E_{k(k+1)}(u) = \mathrm{Vect}(Q_k).$$

Si on note α_k son coefficient dominant (qui est non nul car $Q_k \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$), le polynôme $P_k = \dfrac{1}{\alpha_k} Q_k$ est unitaire et on a :

$$E_{k(k+1)}(u) = \mathrm{Vect}(P_k).$$

D'où l'existence d'un tel polynôme P_k.

Supposons que l'on ait R_k un polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$u(R_k) = k(k+1)R_k.$$

Alors on aurait $R_k \in E_{k(k+1)}(u) = \mathrm{Vect}(P_k)$, de sorte qu'il existerait $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$R_k = \alpha_k P_k.$$

Les polynômes R_k et P_k étant unitaire, on aurait alors $\alpha_k = 1$, et donc $R_k = P_k$. D'où l'unicité d'un tel polynôme P_k.

   (b) Soit toujours $0 \leq k \leq n$ fixé. Écrivons le polynôme P_k sous la forme (en rappelant qu'il est unitaire !) :

$$P_k = X^d + R$$

où $d = \deg(P_k)$ et R polynôme de degré $< d$. On a par linéarité de u (et en utilisant les calculs effectués à la question 2.) :

$$u(P_k) = d(d+1)X^d \underbrace{-d(d-1)X^{d-2} + u(R)}_{\text{poly. de deg. } <d}.$$

Ainsi le coefficient dominant de $u(P_k)$ est égal à $d(d+1)$. Or on a :

$$u(P_k) = k(k+1)P_k = k(k+1)X^d + \underbrace{k(k+1)R}_{\text{poly. de deg. } <d}.$$

En identifiant les coefficients dominants, on obtient donc (la fonction $x \mapsto x(x+1)$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et donc injective) :

$$d(d+1) = k(k+1) \quad \Rightarrow \quad d = k.$$

Ainsi le polynôme P_k est bien de degré k.

(c) On a vu que $u(1) = 0 = 0(0+1) \times 1$, et donc par unicité $P_0 = 1$. De même, on a $u(X) = 2X = 1(1+1)X$, et donc $P_1 = X$.

On cherche $P_2 = X^2 + bX + c$ satisfaisant $u(P_2) = 6P_2$, ce qui se réécrit (en utilisant la linéarité de u) :

$$6X^2 + 6bX + 6c = u(X^2) + bu(X) + cu(1) = 6X^2 - 2 + 2bX.$$

D'où le système :

$$\begin{cases} 6b = 2b \\ 6c = -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Ainsi on a $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.

5. On a $\deg(Q_k) = 2k$, d'où en dérivant k fois, $\deg(L_k) = 2k - k = k$.

De plus, Q_k est unitaire de terme dominant X^{2k}. En dérivant k fois, le terme dominant de L_k est donc :

$$(2k)(2k-1)\dots(k+1)X^k = \frac{(2k)!}{k!}X^k.$$

Ainsi le coefficient dominant de L_k est $\dfrac{(2k)!}{k!}$.

6. On a :

$$(X^2-1)Q_k' = (X^2-1)\left[k(2X)(X^2-1)^{k-1}\right] = 2kX(X^2-1)^k = 2kXQ_k.$$

Notons $R = X^2 - 1$ et $S = 2kX$, de sorte que l'égalité précédente se réécrit :

$$RQ_k' = SQ_k.$$

On va dériver cette expression $(k+1)$ fois à l'aide de la formule de Leibniz :

$$\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} R^{(i)} Q_k^{(k+2-i)} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} S^{(i)} Q_k^{(k+1-i)}$$

Or on a $R^{(i)} = 0$ pour tout $i \geq 3$ et $S^{(i)} = 0$ pour tout $i \geq 2$. Ce qui donne donc :

$$\binom{k+1}{0} R^{(0)} Q_k^{(k+2)} + \binom{k+1}{1} R^{(1)} Q_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{2} R^{(2)} Q_k^{(k)} = \binom{k+1}{0} S^{(0)} Q_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{1} S^{(1)} Q_k^{(k)}$$

Soit en substituant :

$$(X^2-1) Q_k^{(k+2)} + (k+1) 2X Q_k^{(k+1)} + \frac{(k+1)k}{2} 2 Q_k^{(k)} = 2kX Q_k^{(k+1)} + (k+1) 2k Q_k^{(k)}$$

D'où :

$$(X^2-1) L_k'' + 2(k+1) X L_k' + k(k+1) L_k = 2kX L_k' + 2k(k+1) L_k$$

On obtient donc bien l'identité voulue :

$$(X^2-1) L_k'' + 2X L_k' = k(k+1) L_k.$$

7. L'égalité précédente se réécrit :

$$u(L_k) = k(k+1) L_k.$$

Comme de plus $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $L_k \in E_{k(k+1)}(u) = \mathrm{Vect}(P_k)$. Il existe donc $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$L_k = \alpha_k P_k.$$

En identifiant les coefficients dominants, on a $\dfrac{(2k)!}{k!} = \alpha_k$, et donc $P_k = \dfrac{k!}{(2k)!} L_k$.

8. Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

- *Linéarité à gauche.* $\forall P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q \rangle &= \int_{-1}^{1} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t) Q(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} (\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t)) Q(t) \mathrm{d}t \\
&= \lambda_1 \int_{-1}^{1} P_1(t) Q(t) \mathrm{d}t + \lambda_2 \int_{-1}^{1} P_2(t) Q(t) \mathrm{d}t \\
&= \lambda_1 \langle P_1, Q \rangle + \lambda_2 \langle P_2, Q \rangle
\end{aligned}$$

- *Symétrie.*

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t) Q(t) \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} Q(t) P(t) \mathrm{d}t = \langle Q, P \rangle.$$

  En particulier, on en déduit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite.

- *Positif.*

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2 \mathrm{d}t \geq 0$$

  en tant qu'intégrale d'une fonction positive.

- *Défini positif.* Soit P tel que $\langle P, P \rangle = 0$. On a :

$$0 = \int_{-1}^{1} P(t)^2 \mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto P(t)^2$ étant **continue** et **positive** sur $[-1,1]$, son intégrale est nulle si et seulement si :

$$\forall t \in [-1,1], \quad P(t)^2 = 0 \Rightarrow \forall t \in [-1,1], \quad P(t) = 0.$$

P admet donc une **infinité de racines** (tous les réels entre -1 et 1). C'est donc le polynôme nul. Donc $P = 0$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positif.

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

9. Pour montrer que u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$, on va revenir à la définition, en notant que $u(P) = \left[(X^2-1)P'\right]'$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Soit donc $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$\langle u(P), Q \rangle = \int_{-1}^{1} \left[(t^2-1)P'(t)\right]' Q(t)\,\mathrm{d}t$$

On effectue une intégration par parties.

$$\begin{array}{c|ccc} + & Q(t) & & \left[(t^2-1)P'(t)\right]' \\ & & \searrow & \\ - & Q'(t) & \overset{\int}{\leftarrow} & (t^2-1)P'(t) \end{array}$$

Les fonctions $t \mapsto Q(t)$ et $t \mapsto (t^2-1)P'(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1,1]$. Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle u(P), Q \rangle &= \left[Q(t)(t^2-1)P'(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q'(t)(t^2-1)P'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-1}^{1} Q'(t)(t^2-1)P'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En inversant les rôles de P et de Q dans la formule précédente, on obtient :

$$\langle P, u(Q) \rangle = \langle u(Q), P \rangle = -\int_{-1}^{1} P'(t)(t^2-1)Q'(t)\,\mathrm{d}t = \langle u(P), Q \rangle.$$

Donc u est un endomorphisme symétrique de $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

10. $(L_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes. Comme u est un endomorphisme symétrique de $(\mathbb{R}_n[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$, on en déduit par le cours que $(L_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est donc une famille orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 24.38 (★★)

Soit E un espace euclidien et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(1) $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, $|\lambda| \leq 1$,

(2) $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit λ une valeur propre de f, et x un vecteur propre associé. On a par hypothèse :

$$\|f(x)\| \leq \|x\| \quad \Rightarrow \quad |\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| \leq \|x\| \quad \underset{x \neq 0_E}{\Rightarrow} \quad |\lambda| \leq 1.$$

(1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que $\mathrm{Spec}(f) \subset [-1,1]$. Puisque f est symétrique, il existe une base orthonormée

$(e_1,\dots,e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f. Notons $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres associées. Soit $x\in E$. Il existe $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, décomposition de x dans notre base orthonormée. Rappelons alors quelques résultats de cours :

Rappel. Formules dans une base orthonormée

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien rapporté à une **base orthonormée** $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$.

- Pour tout x de E, on a :
$$x=\langle e_1,x\rangle\, e_1+\ldots+\langle e_n,x\rangle\, e_n.$$
Autrement dit, on a $M_{\mathscr{B}}(x)=\begin{pmatrix}\langle x,e_1\rangle\\ \vdots\\ \langle x,e_n\rangle\end{pmatrix}$.
- Pour tout $x=x_1e_1+\ldots+x_ne_n$ et $y=y_1e_1+\ldots+y_ne_n$ de E, on a :
$$\langle x,y\rangle=x_1y_1+\ldots+x_ny_n=\langle x,e_1\rangle\langle y,e_1\rangle+\cdots+\langle x,e_n\rangle\langle y,e_n\rangle.$$
- Pour tout $x=x_1e_1+\ldots+x_ne_n$ de E, on a :
$$\|x\|^2=x_1^2+\ldots+x_n^2=\langle x,e_1\rangle^2+\cdots+\langle x,e_n\rangle^2.$$

On a donc ici :
$$\|x\|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$$
et :
$$\|f(x)\|^2=\left\|\sum_{i=1}^n x_if(e_i)\right\|^2=\left\|\sum_{i=1}^n x_i\lambda_ie_i\right\|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2\lambda_i^2\le\sum_{i=1}^n x_i^2=\|x\|^2$$
D'où le résultat voulu.

Exercice 24.39 (★★★ - QSP ESCP 2021)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble $\mathscr{N}=\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M^n=0_n\}$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathscr{N}$.

1. Quelles sont les matrices symétriques qui appartiennent à $\mathscr{N}$?
2. En déduire que $\dim(F)\le\dfrac{n(n-1)}{2}$. Existe-t-il un sous-espace F de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathscr{N}$ qui réalise l'égalité ?

Exercice 24.40 (★★★)

Trouver toutes les matrices $X\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\quad X\,{}^tXX=I_n$.

En multipliant par ${}^tX$ à gauche, on obtient :
$${}^tXX\,{}^tXX={}^tX.$$
Ainsi ${}^tX$ est symétrique, et donc X aussi. Et l'équation de l'énoncé se réécrit alors :
$$X^3=I_n$$

Comme X est symétrique, X est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. De plus, si λ est valeur propre de X, alors $\lambda^3 = 1$, et λ est une racine cubique de l'unité. Or 1 est la seule racine cubique de l'unité dans $\mathbb{R}$ (qui rappelons le sont les $\exp\left(\dfrac{2ik\pi}{3}\right)$ avec $k = 0, 1, 2$). Ainsi $\mathrm{Sp}(X) = \{1\}$ et X étant diagonalisable, on a donc $X = I_n$. Réciproquement, $X = I_n$ est bien solution de l'équation.

Exercice 24.41 (★★★ - QSP HEC 2009)

Soient f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien E, dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

1. Monter qu'il existe un endomorphisme symétrique ϕ tel que $f = \phi^2$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.

1. Comme f est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes, mais toutes strictement positives par hypothèse) tel que :

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}^2 .$$

   Soit ϕ l'unique endomorphisme de E tel que $M_{\mathscr{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$. Un tel endomorphisme existe et est unique car l'application

$$\Phi_{\mathscr{B}} : \phi \in \mathscr{L}(E) \mapsto M_{\mathscr{B}}(\phi) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$$

   est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Puisque cette matrice est symétrique dans une base orthonormée, on a que ϕ est un endomorphisme symétrique, à valeurs propres strictement positives, et tel que $M_{\mathscr{B}}(\phi^2) = M_{\mathscr{B}}(\phi)^2 = M_{\mathscr{B}}(f)$. Ainsi on a bien $\phi^2 = f$ (par injectivité de $\Phi_{\mathscr{B}}$).

2. L'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$ est immédiate puisque si $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$, alors on a $f(x) = g(x) = 0_E$, et donc $(f+g)(x) = 0_E$.

   On étudie l'inclusion réciproque : soit donc $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$. On a :

$$(f+g)(x) = 0_E \quad \Rightarrow \quad f(x) = -g(x).$$

   Utilisons la question 1., et prenons ϕ et ψ des endomorphismes symétriques tels que $\phi^2 = f$ et $\psi^2 = g$. On a alors :

$$\langle x, f(x) \rangle = \langle x, \phi^2(x) \rangle = \langle \phi(x), \phi(x) \rangle = \|\phi(x)\|^2$$

   car ϕ est symétrique. De même on a $\langle x, g(x) \rangle = \|\psi(x)\|^2$. D'où avec la première inégalité :

$$\|\phi(x)\|^2 = \langle x, f(x) \rangle = -\langle x, g(x) \rangle = -\|\psi(x)\|^2.$$

> Ainsi on a $\phi(x) = \psi(x) = 0_E$, et donc $f(x) = \phi^2(x) = 0_E$ et $g(x) = \psi^2(x) = 0_E$. Par suite x appartient bien à $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$. D'où $\mathrm{Ker}(f+g) \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$, et donc l'égalité entre ces deux ensembles.

Exercice 24.42 (★★★ - Oral ESCP 2022)
Pour $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels. Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux éléments de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on pose $C = A \star B$ la matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad \forall j \in [\![1,q]\!], \quad c_{i,j} = a_{i,j}\, b_{i,j}.$$

Une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive si :

- A est symétrique;
- pour tout $U \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tUAU \geq 0$.

On note $S_p^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ symétriques positives.

1. Montrer que si $(M,N) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \geq 0$, alors $\lambda M + N \in S_p^+(\mathbb{R})$.
2. Soit $U \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $A = U{}^tU \in S_p^+(\mathbb{R})$
3. Montrer que si $U \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors $(U\,{}^tU) \star (V\,{}^tV) = (U \star V){}^t(U \star V)$.
4. Soit $A \in S_p^+(\mathbb{R})$. On note $(U_1, \dots, U_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A et on note $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ les valeurs propres correspondantes.
   (a) Montrer que $\lambda_j \geq 0$ pour tout $j \in [\![1,p]\!]$.
   (b) Montrer que $A = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j\, {}^tU_j$.
5. Montrer que si A et B appartiennent à $S_p^+(\mathbb{R})$, alors $A \star B$ appartient à $S_p^+(\mathbb{R})$.

Exercice 24.43 (★)
Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :

$$q((x_1,x_2,x_3)) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

1. Déterminer la matrice M canoniquement associée à q.
2. Justifier que M est diagonalisable dans une base orthonormale.
3. Déterminer le signe de q.
4. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de M.
5. Retrouver le signe de q par une autre méthode.

Exercice 24.44 (★★★)
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$.
On appelle *matrice de Gram* d'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E la matrice $G(x_1, \dots, x_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient général $\langle x_i, x_j \rangle$.

1. Montrer que $G(x_1, \dots, x_n)$ est une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes positives.

2. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, et A la matrice figurant la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.
   (a) Exprimer $G(x_1, \ldots, x_n)$ en fonction de A et ${}^tA$.
   (b) En déduire que le rang de la matrice $G(x_1, \ldots, x_n)$ est égal au rang de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$.
3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. À quelle(s) condition(s) existe-t-il une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E telle que $M = G(x_1, \ldots, x_n)$?
4. **Application.** On suppose $n \geq 2$. Pour quelle valeurs de c réelles existe-t-il une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs unitaires de E vérifiant $\langle x_i, x_j \rangle = c$ pour tous les indices i et j distincts.
