

Révisions d'algèbre

Polynômes

Exercice 24.1 (★★ - Division euclidienne)

Dans les cas suivants, déterminer le reste de la division euclidienne de A par B .

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1, B = X^2 + 2X + 3.$ | 2. $A = X^n - 4X + 1, B = (X - 1)^2.$
-

Exercice 24.2 (★★ - Équations polynomiales)

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P'(X^2) = 4P(X)$.
 2. Déterminer tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation $(X^2 + 1)P''(X) - 6P(X) = 0$
-

Exercice 24.3 (★★ - Multiplicité d'une racine)

1. Déterminer a et b pour que $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette 1 pour racine double. Quel est alors le quotient de $P(X)$ par $(X - 1)^2$?
 2. Considérons le polynôme $P(X) = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$ où n est un entier naturel impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle et que celle-ci est une racine simple.
-

Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 24.4 (★)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $F = \{(x, y, z, t), x + y + z - t = 0\}.$ | 3. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1)\}.$
 2. $G = \text{Vect}((1, 1, 2), (0, 1, 0), (2, -3, 4)).$ | 4. $I = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$
-

Exercice 24.5 (★★)

Soit $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 P(t)dt = 0 \right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, et en donner une base, sa dimension ainsi qu'un supplémentaire dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 24.6 (★)

Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 2z + t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, -1, 1, -1))$;
 2. $u_1 = (1, 0, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0, 0), u_3 = (1, 1, 1, 0), u_4 = (1, 1, 1, 1)$, et $F = \text{Vect}(u_1, u_2), G = \text{Vect}(u_3, u_4)$;
 3. (★) $E = \mathbb{R}[X], F = \{P \in \mathbb{R}[X] ; P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$;
 4. (★) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), F = \{f \in E ; \forall x \in \mathbb{R} f(-x) = f(x)\}$ et $G = \{f \in E ; \forall x \in \mathbb{R} f(-x) = -f(x)\}.$
-

Exercice 24.7 (★★)

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer une base du noyau et de l'image de chacune d'elles ainsi que leur rang et leur matrice dans les bases canoniques :

$f_1 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - y, 2z, x - z) \in \mathbb{R}^3 ;$	$f_5 : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ;$
$f_2 : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto 2XP - (X^2 - 1)P' \in \mathbb{R}_2[X] ;$	$f_6 : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$
$f_3 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P + P' \in \mathbb{R}_3[X] ;$	
$f_4 : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P(X + 1) - P(X) \in \mathbb{R}_2[X] ;$	

Exercice 24.8 (★★)

Dans \mathbb{R}^3 , on pose $F = \{(x, y, z), x + 2y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(u)$ où $u = (1, 1, 1)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. On note p le projecteur sur F parallèlement à G .
 - (a) Déterminer la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
 - (b) En déduire la matrice de p dans la base canonique.
 - (c) Sans calcul supplémentaire, donner la matrice dans la base canonique de la projection sur G parallèlement à F .

Exercice 24.9 (★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
2. (★) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

Exercice 24.10 (★★ - Sous-espaces vectoriels stables par la dérivation)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P'$.

1. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{R}_k[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par φ .
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, non réduit au vecteur nul et stable par φ .
 - (a) Soit $P \in F$ un polynôme de degré d . Montrer que $\mathbb{R}_d[X] \subset F$.
 - (b) On note $p = \max\{\text{deg}(P), P \in F\}$. Montrer que $F = \mathbb{R}_p[X]$.

Exercice 24.11 (★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension 4, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 \neq 0$ et $f^4 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x), f^3(x))$ soit une base de E .
2. En déduire le rang de f .

Exercice 24.12 (★★★★ - Oral ESCP 2012)

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et pour tout $n > 1$, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$. Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon.

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et (a_1, \dots, a_n) une famille de nombres réels distincts.

1. (a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
 (b) Montrer que la famille $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Soit $\pi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \pi(P) = \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i$.
 (a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.
 (b) Déterminer le noyau et l'image de π .
 (c) On note $F = \left\{ Q \prod_{i=1}^n (X - a_i), Q \in \mathbb{R}[X] \right\}$. Montrer que $F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathbb{R}[X]$.
 (d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.
3. Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n, P \mapsto (P(a_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.
 (a) Montrer que ε est un isomorphisme.
 (b) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points (a_1, \dots, a_n) .
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soient $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R}), a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que $a \leq a_1 < \dots < a_n \leq b$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points (a_1, \dots, a_n) .
 (a) Soit $x \in [a, b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ et K réel. On définit la fonction φ par

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t) - P(t) - K \prod_{i=1}^n (t - a_i).$$

Montrer qu'il existe K tel que $\varphi(x) = 0$.

- (b) Montrer que pour cette valeur de K , il existe $\varsigma \in [a, b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\varsigma) = 0$.
- (c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\prod_{i=1}^n |x - a_i|}{n!} \sup_{[a,b]} |f^{(n)}|.$$

Diagonalisation

Exercice 24.13 (★)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, en déterminer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24.14 (★★ - Extrait d'Edhec 2012)

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On note

Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. (a) Calculer A^2 et A^3 , puis déterminer un polynôme annulateur de f .
- (b) En déduire les valeurs propres de f .
- (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. (★) Trouver une base \mathcal{B} de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 24.15 (★★ - Extrait de EML 2013)

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit L un élément non nul de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On pose $A = CL$ et $a = \text{Tr}(A)$.

1. Déterminer les coefficients de A à l'aide des coefficients de C et L .
2. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
3. Montrer que $LC = (a)$, puis $A^2 = aA$.
4. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. On suppose $a \neq 0$. Calculer AC . Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.
6. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 24.16 (★★)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $b \in \mathbb{R}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ($n \geq 2$) défini par $[f(P)](X) = P(aX + b)$.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique. En déduire les valeurs propres de f .
2. Montrer que si $a \notin \{-1, 1\}$, alors f est diagonalisable.
3. Si $a = 1$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 24.17 (★★)

Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 24.18 (★★ - Extrait d'Edhec 2012)

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieurs ou égal à 2. On note e_0, e_1, e_2 les polynômes de E définis par $e_0 = 1$, $e_1 = X$ et $e_2 = X^2$. On rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E .

On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E , associe le reste dans la division euclidienne par $1 + X^3$ du polynôme $(1 - X + X^2)P$. Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que

$$(1 - X + X^2)P = (1 + X^3)Q + f(P) \text{ avec } \deg(f(P)) \leq 2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. (a) Déterminer $f(e_0), f(e_1), f(e_2)$, puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
 (b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$.
 (c) Donner la dimension de $\text{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\text{Ker}(f)$.
3. (a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\text{Im}(f)$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que :

$$\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 3Id).$$

- (b) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 24.19 (★★ - Extrait d'Edhec 2006)

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^n . On suppose qu'il existe deux réels λ_1, λ_2 distincts tels que $(f - \lambda_1 \text{Id}) \circ (f - \lambda_2 \text{Id}) = 0$.

1. Montrer que $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}((f - \lambda_1 \text{Id}) - (f - \lambda_2 \text{Id})) = \text{Id}$.
2. En déduire que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})$.
3. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 24.20 (★★ - Racines carrées d'une matrice diagonalisable (EML 2009))

1. Soient f et g deux endomorphismes de \mathbb{R}^n vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.
 - (a) Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g .
 - (b) En déduire que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g .
 - (c) Justifier que f est diagonalisable.
 Montrer que, pour toute base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de f , la matrice de g relativement à la base \mathcal{B} est diagonale. En déduire que g est diagonalisable.
2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.

On appelle racine carrée de A toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

- (a) Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
- (b) Donner un exemple de racine carrée de A (on l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D).
- (c) Soit R une racine carrée de A . Vérifier que $AR = RA$.
 En déduire que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.
- (d) Établir qu'il existe exactement 2^n racines carrées de A .

Exercice 24.21 (★★★)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable possédant p valeurs propres distinctes.

1. Montrer que A possède un polynôme annulateur P de degré p , et que tout polynôme annulateur non nul de A est de degré supérieur ou égal à p .
2. Montrer que la dimension de $\text{Vect}(I_n, A, A^2, \dots, A^k)$ vaut $k + 1$ si $k < p$ et p sinon.

Exercice 24.22 (★★★★ - Polynômes minimaux (Oral ESCP 2016))

1. Soit un entier $n \geq 2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note \mathcal{A} l'ensemble des polynômes annulateurs de M .
 - (a) Justifier que \mathcal{A} n'est pas réduit au polynôme nul.
 - (b) Vérifier que \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
 - (c) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathcal{A}, PQ \in \mathcal{A}$.
 - (d) Montrer qu'il existe un polynôme non nul de \mathcal{A} de degré minimal. Soit $K \in \mathcal{A}$ un polynôme unitaire de degré minimal.

En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que K divise tout polynôme de \mathcal{A} . En déduire que

$$\mathcal{A} = \{KQ, Q \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Un tel polynôme s'appelle polynôme minimal de M .

2. Exemples.

- (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Déterminer le polynôme minimal de λI_n , où I_n est la matrice identité d'ordre n .
- (b) Soit P la matrice d'un projecteur p distinct de 0 et Id. Déterminer le polynôme minimal de P .

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal K . Montrer que l'ensemble des racines réelles de K est égal à l'ensemble des valeurs propres réelles de M .

Espaces euclidiens, endomorphismes symétriques**Exercice 24.23 (★)**

Pour $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$. On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en déterminer une base et la dimension.
3. Déterminer une base de F^\perp .

4. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le projeté orthogonal de A sur F et en déduire $\min_{B \in F} \|A - B\|$.

Exercice 24.24 (★★ - Inégalité de Bessel)

Soit E un espace euclidien, soit F un sous-espace vectoriel de E et soit (e_1, \dots, e_p) une base orthonormée de F . On note p_F la projection orthogonale sur F .

Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$.

Exercice 24.25 (★★)

Soit E un espace euclidien de dimension n , et soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormée de E . On note $F = \text{Vect}(e_1 + e_2 + \dots + e_n)$. Déterminer la distance de e_1 à F , c'est-à-dire $\min_{x \in F} \|e_1 - x\|$.

Exercice 24.26 (★★★ - QSP HEC 2018)

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On note H le sous-espace vectoriel de E engendré par les trois polynômes $(X-1)(X-2)(X-4)$, $(X-1)(X-3)(X-4)$ et $(X-2)(X-3)(X-4)$.

- (a) Justifier que H est un hyperplan de E .
(b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à H . Est-elle unique ?
- On considère le produit scalaire sur E défini par :

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4).$$

Calculer, pour tout polynôme $P \in E$, la projection orthogonale de P sur H^\perp .

Exercice 24.27 (★★)

Soit $n \geq 1$ et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit $f : E \rightarrow \mathbb{R}[X]$ par $f(P) = -P'' + 2XP' + P$.

- Montrer que f est un endomorphisme de E .
- Montrer que pour tout $P, Q \in E$, $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ converge.
- Montrer que $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ définit un produit scalaire sur E .
- Prouver que $\forall P, Q \in E$, $\langle P', Q' \rangle = \langle f(P), Q \rangle - \langle P, Q \rangle$.
- En déduire que f est un endomorphisme symétrique de E .

Exercice 24.28 (★★)

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = {}^tAA$. Montrer que S est symétrique, et que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
- Soit S une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.
- Application.** $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

Exercice 24.29 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n .

Étude d'un endomorphisme

On considère l'application u qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $u(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'$.

- Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (a) Déterminer les valeurs propres de u .
(b) u est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
(c) Montrer que u est diagonalisable. Préciser la dimension de chaque sous-espace propre.
- (a) Prouver que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe un unique polynôme unitaire P_k dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$u(P_k) = k(k+1)P_k.$$

- Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, P_k est de degré k .
- Déterminer P_0 , P_1 et P_2 .

Polynômes de Legendre

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. On note $Q_k = (X^2 - 1)^k$ et L_k la dérivée k -ième de Q_k : $L_k = Q_k^{(k)}$.

5. Montrer que $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ et déterminer son coefficient dominant.
6. Vérifier que $(X^2 - 1)Q_k' = 2kXQ_k$ puis en dérivant $(k + 1)$ fois cette égalité à l'aide de la formule de Leibniz, montrer que :

$$(X^2 - 1)L_k'' + 2XL_k' = k(k + 1)L_k.$$

7. En déduire que $P_k = \frac{k!}{(2k)!}L_k$.

Produit scalaire et orthogonalité

8. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

9. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$.

On pourra pour cela noter que $u(P) = \frac{d}{dX} \left((1 - X^2) \frac{dP}{dX} \right)$.

10. En déduire que la famille L_k des polynômes de Legendre est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 24.30 (★★)

Soit E un espace euclidien et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Montrer qu'il y a équivalence entre :

$$(1) \quad \forall \lambda \in \text{Spec}(f), |\lambda| \leq 1, \quad \Bigg| \quad (2) \quad \forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|.$$

Exercice 24.31 (★★★★)

Trouver toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $X^t X X = I_n$.

Exercice 24.32 (★★★★ - QSP HEC 2009)

Soient f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien E , dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

1. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique ϕ tel que $f = \phi^2$.
2. Montrer que $\text{Ker}(f + g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$.

Exercice 24.33 (★)

Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :

$$q((x_1, x_2, x_3)) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

1. Déterminer la matrice M canoniquement associée à q .
2. Justifier que M est diagonalisable dans une base orthonormale.
3. Déterminer le signe de q .
4. Construire une base orthonormée de \mathbb{R}^3 constituée de vecteurs propres de M .
5. Retrouver le signe de q par une autre méthode.