TD24

Révisions d'algèbre

Polynômes

Exercice 24.1 (★★ - Division euclidienne)

Dans les cas suivants, déterminer le reste de la division euclidienne de A par B.

1. $A = 3x^5 + 4x^2 + 1$, $B = x^2 + 2x + 3$.
2. $A = x^n - 4x + 1$, $B = (x-1)^2$.

Exercice 24.2 (★★ - Équations polynomiales)

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[x]$ tels que $P'(x^2) = 4P(x)$.
2. Déterminer tous les $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant la relation $(x^2+1)P''(x) - 6P(x) = 0$.

Exercice 24.3 (★★ - Multiplicité d'une racine)

1. Déterminer a et b pour que $P(X) = ax^{n+1} + bx^n + 1$ admette 1 pour racine double. Quel est alors le quotient de $P(x)$ par $(x-1)^2$?
2. Considérons le polynôme $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ où n est un entier naturel impair.

   Montrer que P admet au moins une racine réelle et que celle-ci est une racine simple.

Exercice 24.4 (★★★ - QSP ESCP 2016)

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ est strictement monotone.
2. En déduire que si P est un polynôme réel tel que $P(0) = 0$ et $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$, alors $P = x$.

Espaces vectoriels, applications linéaires

Exercice 24.5 (★)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.

1. $F = \{(x, y, z, t),\ x + y + z - t = 0\}$.
2. $G = \text{Vect}((1, 1, 2), (0, 1, 0), (2, -3, 4))$.
3. $H = \{P \in \mathbb{R}_3[x],\ P(0) = P(1)\}$.
4. $I = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 24.6 (★★)

Soit $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[x],\ \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$, et en donner une base, sa dimension ainsi qu'un supplémentaire dans $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 24.7 (★)

Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y + 2z + t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, -1, 1, -1))$;
2. $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 0)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$, et $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$, $G = \text{Vect}(u_3, u_4)$;
3. (★) $E = \mathbb{R}[x]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[x] \ ; \ P(1) = P(2) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[x]$;
4. (★) $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \ ; \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(-x) = f(x)\}$ et $F = \{f \in E \ ; \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(-x) = -f(x)\}$.

Exercice 24.8 (★★)

Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer une base du noyau et de l'image de chacune d'elles ainsi que leur rang et leur matrice dans les bases canoniques :

$f_1 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x - y, 2z, x - z) \in \mathbb{R}^3$;

$f_2 : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto 2XP - (X^2 - 1)P' \in \mathbb{R}_2[X]$;

$f_3 : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P + P' \in \mathbb{R}_3[X]$;

$f_4 : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P(X + 1) - P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$;

$f_5 : M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$f_6 : M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 24.9 (★★)

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z), \ x + 2y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(u)$ où $u = (1, 1, 1)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. On note p le projecteur sur F parallèlement à G.
   (a) Déterminer la matrice de p dans une base adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
   (b) En déduire la matrice de p dans la base canonique.
   (c) Sans calcul supplémentaire, donner la matrice dans la base canonique de la projection sur G parallèlement à F.

Exercice 24.10 (★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
2. (★) Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

Exercice 24.11 (★★ - Sous-espaces vectoriels stables par la dérivation)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par $\varphi(P) = P'$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{R}_k[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$ stable par φ.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[x]$, non réduit au vecteur nul et stable par φ.
   (a) Soit $P \in F$ un polynôme de degré d. Montrer que $\mathbb{R}_d[x] \subset F$.
   (b) On note $p = \max\{\deg(P), \ P \in F\}$. Montrer que $F = \mathbb{R}_p[x]$.

Exercice 24.12 (★★)

Soit E un espace vectoriel de dimension 4, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 \neq 0$ et $f^4 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x), f^3(x))$ soit une base de E.
2. En déduire le rang de f.

Exercice 24.13 (★★★)

Soient $N_1, N_2, \dots, N_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes qui commutent deux à deux. Montrer que :

$$N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_n = 0_n.$$

Exercice 24.14 (★★★★ - QSP HEC 2018)

Soit un entier $n \geq 2$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.
Démontrer que, si f n'est pas une homothétie, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f a pour première colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 24.15 (★★★★ - Oral ESCP 2012)

On note $\mathbb{R}[x]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et pour tout $n > 1$, $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$. Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon.
Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $(a_1, \cdots, a_n)$ une famille de nombres réels distincts.

1. (a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
   (b) Montrer que la famille $(L_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
2. Soit $\pi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}[x]$, $\pi(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$.
   (a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[x]$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de π.
   (c) On note $F = \left\{ Q \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (x - a_i),\ Q \in \mathbb{R}[x] \right\}$. Montrer que $F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[x] = \mathbb{R}[x]$.
   (d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.
3. Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[x] \to \mathbb{R}^n$, $P \mapsto (P(a_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$.
   (a) Montrer que ε est un isomorphisme.
   (b) Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
   Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points $(a_1, \cdots, a_n)$.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soient $f \in \mathscr{C}^n([a, b], \mathbb{R})$, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tels que $a \leq a_1 < \cdots < a_n \leq b$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points $(a_1, \cdots, a_n)$.

(a) Soit $x \in [a,b] \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$ et K réel. On définit la fonction φ par

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) - P(t) - K \prod_{i=1}^{n} (t - a_i).$$

Montrer qu'il existe K tel que $\varphi(x) = 0$.

(b) Montrer que pour cette valeur de K, il existe $\varsigma \in [a,b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\varsigma) = 0$.

(c) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\prod_{i=1}^{n} |x - a_i|}{n!} \sup_{[a,b]} |f^{(n)}|.$$

Diagonalisation

Exercice 24.16 (★)

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, en déterminer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24.17 (★★ - Edhec 2005)

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On note tr l'application linéaire qui à toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$.

   (b) En déduire la dimension de $\ker(\mathrm{tr})$.

   (c) Établir que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I)$.

2. Soit f l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I$

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Utiliser la première question pour déterminer les valeurs propres de f. En déduire que f est un automorphisme diagonalisable de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit g l'application qui, à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe $g(M) = M + \mathrm{tr}(M)J$, où J désigne une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

   On admet que g est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Établir que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.

   (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

   (c) g est-il diagonalisable ?

Exercice 24.18 (★★ - Extrait d'Edhec 2012)
Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. (a) Calculer A^2 et A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.
   (b) En déduire les valeurs propres de f.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. (★) Trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 24.19 (★★ - Extrait de EML 2013)
Soit $n \geq 2$ un entier. Soit L un élément non nul de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et C un élément non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On pose $A = CL$ et $a = \mathrm{Tr}(A)$.

1. Déterminer les coefficients de A à l'aide des coefficients de C et L.
2. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
3. Montrer que $LC = (a)$, puis $A^2 = aA$.
4. Montrer que si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
5. On suppose $a \neq 0$. Calculer AC. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.
6. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

Exercice 24.20 (★★)
Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $b \in \mathbb{R}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ $(n \geq 2)$ défini par $[f(P)](x) = P(ax+b)$.

1. Écrire la matrice de f dans la base canonique. En déduire les valeurs propres de f.
2. Montrer que si $a \notin \{-1, 1\}$, alors f est diagonalisable.
3. Si $a = 1$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 24.21 (★★)
Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 24.22 (★★ - Extrait d'Edhec 2012)
On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieurs ou égal à 2. On note e_0, e_1, e_2 les polynômes de E définis par $e_0 = 1$, $e_1 = x$ et $e_2 = x^2$. On rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.

On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe le reste dans la division euclidienne par $1 + x^3$ du polynôme $(1 - x + x^2)P$. Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que

$$(1 - x + x^2)P = (1 + x^3)Q + f(P) \text{ avec } \deg(f(P)) \leq 2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. (a) Déterminer $f(e_0), f(e_1), f(e_2)$, puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
   (b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. (a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\mathrm{Im}(f)$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que :
   $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 3Id).$$
   (b) Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 24.23 (★★ - Extrait d'Edhec 2006)
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe deux réels λ_1, λ_2 distincts tels que $(f - \lambda_1 \mathrm{Id}) \circ (f - \lambda_2 \mathrm{Id}) = 0$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}((f - \lambda_1 \mathrm{Id}) - (f - \lambda_2 \mathrm{Id})) = \mathrm{Id}$.
2. En déduire que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{Id})$.
3. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 24.24 (★★ - Racines carrées d'une matrice diagonalisable (EML 2009))

1. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.
   (a) Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g.
   (b) En déduire que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
   (c) Justifier que f est diagonalisable.
   Montrer que, pour toute base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f, la matrice de g relativement à la base $\mathscr{B}$ est diagonale. En déduire que g est diagonalisable.
2. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.
   On appelle racine carrée de A toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
   (a) Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
   (b) Donner un exemple de racine carrée de A (on l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D).
   (c) Soit R une racine carrée de A. Vérifier que $AR = RA$.
   En déduire que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.
   (d) Établir qu'il existe exactement 2^n racines carrées de A.

Exercice 24.25 (★★★)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable possédant p valeurs propres distinctes.

1. Montrer que A possède un polynôme annulateur P de degré p, et que tout polynôme annulateur non nul de A est de degré supérieur ou égal à p.
2. Montrer que la dimension de $\mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \ldots, A^k)$ vaut $k+1$ si $k < p$ et p sinon.

Exercice 24.26 (★★★ - QSP HEC 2015)
Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Considérons la matrice $M_x = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de x la matrice M_x est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_x est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 24.27 (★★★ - Polynômes minimaux (Oral ESCP 2016))

1. Soit un entier $n \geq 2$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de M.
   (a) Justifier que $\mathscr{A}$ n'est pas réduit au polynôme nul.
   (b) Vérifier que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
   (c) Montrer que : $\quad \forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathscr{A}, PQ \in \mathscr{A}$.
   (d) Montrer qu'il existe un polynôme non nul de $\mathscr{A}$ de degré minimal. Soit $K \in \mathscr{A}$ un polynôme unitaire de degré minimal.
   En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que K divise tout polynôme de $\mathscr{A}$. En déduire que
   $$\mathscr{A} = \{KQ,\ Q \in \mathbb{R}[X]\}.$$
   Un tel polynôme s'appelle polynôme minimal de M.
2. Exemples.
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Déterminer le polynôme minimal de λI_n, où I_n est la matrice identité d'ordre n.
   (b) Soit P la matrice d'un projecteur p distinct de 0 et Id. Déterminer le polynôme minimal de P.
3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal K. Montrer que l'ensemble des racines réelles de K est égal à l'ensemble des valeurs propres réelles de M.

Exercice 24.28 (★★★★ - Oral ESCP 2016)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs propres et $E_1, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres associés.
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f, tel que $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$. Soit x un vecteur de F.

1. Montrer qu'il existe un unique p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p$.
2. On suppose désormais $x \neq 0$. Montrer que, quitte à modifier l'ordre, on peut supposer qu'il existe $r \in [\![1, p]\!]$ tel que $x_i = 0$ pour $i > r$ et $x_i \neq 0$ pour $i \leqslant r$. On a alors $x = x_1 + \cdots + x_r$.
   On note V_x le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, \ldots, x_r)$.
3. (a) Montrer que $(x_1, \ldots, x_r)$ est une base de V_x.
   (b) Montrer que pour tout $j \geq 0$, $f^j(x) \in V_x$.
   (c) Déterminer la matrice A de la famille $(x, f(x), \ldots, f^{r-1}(x))$ dans la base $(x_1, \ldots, x_r)$ de V_x.
   Notons $C_1, \ldots, C_r$ les colonnes de A et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \alpha_j C_j = 0$.
   Montrer que le polynôme $P = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \alpha_j X^{j-1}$ est le polynôme nul. En déduire que A est inversible.

(d) Montrer que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $x_i \in F$, puis que $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

4. Soit g un endomorphisme de E, diagonalisable et commutant avec f (i.e. tel que $f \circ g = g \circ f$). Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à f et g.

Espaces euclidiens, endomorphismes symétriques

Exercice 24.29 (★)

Pour $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$. On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, en déterminer une base et la dimension.
3. Déterminer une base de $F^\perp$.
4. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le projeté orthogonal de A sur F et en déduire $\min_{B \in F} \|A - B\|$.

Exercice 24.30 (★★ - Inégalité de Bessel)

Soit E un espace euclidien, soit F un sous-espace vectoriel de E et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F. On note p_F la projection orthogonale sur F.

Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$.

Exercice 24.31 (★★)

Soit E un espace euclidien de dimension n, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. On note $F = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)$. Déterminer la distance de e_1 à F, c'est-à-dire $\min_{x \in F} \|e_1 - x\|$.

Exercice 24.32 (★★ - Extrait de EML 2023)

On considère un espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Pour $a \in E$, on note f_a l'application qui à un élément x dans E associe le réel $f_a(x) = \langle a, x\rangle$.

1. Soit $a \in E$.
   (a) Démontrer que f_a est un élément de $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.
   (b) Déterminer le noyau de f_a.
   (c) Démontrer que si f_a est l'application nulle, alors $a = 0_E$.
2. **Théorème de représentation des formes linéaires.**
   On considère maintenant l'application $\Phi : E \to E^*$ définie, pour $a \in E$, par : $\quad \Phi(a) = f_a$.
   (a) Démontrer que Φ est linéaire.
   (b) Démontrer que Φ est un isomorphisme de E sur E^*.
   (c) Justifier que pour tout $\varphi \in E^*$, il existe un unique $a \in E$ tel que :
   $$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle a, x\rangle.$$

3. **Application aux formes linéaires sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.**

   Dans cette question, p est un entier naturel non nul et on considère $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille p.

   (a) Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle :, (A, B) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

   (b) Démontre que si $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire, alors il existe une matrice A dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on ait :

   $$\varphi(M) = \operatorname{tr}(AM).$$

Exercice 24.33 (★★★ - QSP HEC 2018)

Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
On note H le sous-espace vectoriel de E engendré par les trois polynômes $(x-1)(x-2)(x-4)$, $(x-1)(x-3)(x-4)$ et $(x-2)(x-3)(x-4)$.

1. (a) Justifier que H est un hyperplan de E.

   (b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à H. Est-elle unique ?

2. On considère le produit scalaire sur E défini par :

   $$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4).$$

   Calculer, pour tout polynôme $P \in E$, la projection orthogonale de P sur $H^\perp$.

Exercice 24.34 (★★★★ - Oral ESCP 2006)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On pose $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Un endomorphisme g de E est dit orthogonal si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

1. Soit g un endomorphisme de E. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) g et orthogonal

   (ii) Pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = \|x\|$.

   (iii) L'image par g d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E.

   On note $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est stable par tous les éléments de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $F = \{0_E\}$ ou $F = E$

   On pourra montrer que si $F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$, il existe un élément de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, que l'on exhibera, qui ne laisse pas F stable).

3. Soit f un endomorphisme de E. On suppose, pour toute la suite de l'exercice, que f commute avec tous les éléments de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ est stable par tous les éléments de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que pour tout réel λ, $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E)$ est stable par tous les éléments de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

   (c) En déduire que pour tout réel λ, $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E) = \{0_E\}$ ou $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E) = E$.

4. On suppose que n est impair, et on admet qu'alors tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admet au moins une valeur propre réelle.

   Montrer qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda_0 \operatorname{id}_E$.

Exercice 24.35 (★★)

Soit $n \geq 1$ et soit $E = \mathbb{R}_n[x]$. On définit $f : E \to \mathbb{R}[x]$ par $f(P) = -P''(x) + 2xP'(x) + P(x)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Montrer que pour tout $P, Q \in E$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge.
3. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
4. Prouver que $\forall P, Q \in E$, $\langle P', Q'\rangle = \langle f(P), Q\rangle - \langle P, Q\rangle$.
5. En déduire que f est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 24.36 (★★)

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = {}^tAA$. Montrer que S est symétrique, et que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
2. Soit S une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.
3. **Application**. $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

Exercice 24.37 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels de degré au plus n.

Étude d'un endomorphisme

On considère l'application u qui à $P \in \mathbb{R}_n[x]$ associe $u(P) = (x^2-1)P''(x) + 2xP'(x)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. (a) Déterminer les valeurs propres de u.
   (b) u est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$?
   (c) Montrer que u est diagonalisable. Préciser la dimension de chaque sous-espace propre.
4. (a) Prouver que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe un unique polynôme unitaire P_k dans $\mathbb{R}_n[x]$ tel que :
   $$u(P_k) = k(k+1)P_k.$$
   (b) Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, P_k est de degré k.
   (c) Déterminer P_0, P_1 et P_2.

Polynômes de Legendre

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. On note $Q_k = (x^2-1)^k$ et L_k la dérivée k-ième de Q_k : $L_k = Q_k^{(k)}$.

5. Montrer que $L_k \in \mathbb{R}_n[x]$ et déterminer son cœfficient dominant.
6. Vérifier que $(x^2-1)Q_k'(x) = 2kxQ_k(x)$ puis en dérivant $(k+1)$ fois cette égalité à l'aide de la formule de Leibniz, montrer que :
   $$(x^2-1)L_k''(x) + 2xL_k'(x) = k(k+1)L_k(x).$$
7. En déduire que $P_k = \dfrac{k!}{(2k)!}L_k$.

Produit scalaire et orthogonalité

8. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

9. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[x]$.

   On pourra pour cela noter que $u(P) = \dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{dP}{dx}\right)$.

10. En déduire que la famille L_k des polynômes de Legendre est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle$.

Exercice 24.38 (★★)

Soit E un espace euclidien et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(1) $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(f),\ |\lambda| \leq 1$,

(2) $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 24.39 (★★★ - QSP ESCP 2021)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble $\mathscr{N} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M^n = 0_n\}$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathscr{N}$.

1. Quelles sont les matrices symétriques qui appartiennent à $\mathscr{N}$?

2. En déduire que $\dim(F) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$. Existe-t-il un sous-espace F de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inclus dans $\mathscr{N}$ qui réalise l'égalité ?

Exercice 24.40 (★★★)

Trouver toutes les matrices $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\quad X\,{}^tXX = I_n$.

Exercice 24.41 (★★★ - QSP HEC 2009)

Soient f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien E, dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

1. Monter qu'il existe un endomorphisme symétrique ϕ tel que $f = \phi^2$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 24.42 (★★★ - Oral ESCP 2022)

Pour $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels. Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux éléments de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on pose $C = A \star B$ la matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \forall j \in [\![1, q]\!], \quad c_{i,j} = a_{i,j}\, b_{i,j}.$$

Une matrice $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive si :

- A est symétrique;
- pour tout $U \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tUAU \geq 0$.

On note $S_p^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ symétriques positives.

1. Montrer que si $(M, N) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \geq 0$, alors $\lambda M + N \in S_p^+(\mathbb{R})$.
2. Soit $U \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $A = U{}^tU \in S_p^+(\mathbb{R})$
3. Montrer que si $U \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors $(U\,{}^tU) \star (V\,{}^tV) = (U \star V){}^t(U \star V)$.
4. Soit $A \in S_p^+(\mathbb{R})$. On note $(U_1, \dots, U_p)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A et on note $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ les valeurs propres correspondantes.
   (a) Montrer que $\lambda_j \geq 0$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.
   (b) Montrer que $A = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j U_j\,{}^tU_j$.
5. Montrer que si A et B appartiennent à $S_p^+(\mathbb{R})$, alors $A \star B$ appartient à $S_p^+(\mathbb{R})$.

Exercice 24.43 (★)

Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :

$$q((x_1, x_2, x_3)) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$$

1. Déterminer la matrice M canoniquement associée à q.
2. Justifier que M est diagonalisable dans une base orthonormale.
3. Déterminer le signe de q.
4. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de M.
5. Retrouver le signe de q par une autre méthode.

Exercice 24.44 (★★★)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$.
On appelle *matrice de Gram* d'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E la matrice $G(x_1, \dots, x_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient général $\langle x_i, x_j \rangle$.

1. Montrer que $G(x_1, \dots, x_n)$ est une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes positives.
2. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, et A la matrice figurant la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.
   (a) Exprimer $G(x_1, \dots, x_n)$ en fonction de A et ${}^tA$.
   (b) En déduire que le rang de la matrice $G(x_1, \dots, x_n)$ est égal au rang de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.
3. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. À quelle(s) condition(s) existe-t-il une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E telle que $M = G(x_1, \dots, x_n)$?
4. **Application.** On suppose $n \geq 2$. Pour quelle valeurs de c réelles existe-t-il une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs unitaires de E vérifiant $\langle x_i, x_j \rangle = c$ pour tous les indices i et j distincts.
