TD25

Révisions de probabilité

Variables discrètes

Exercice 25.1 (★)

Aux championnats du monde 2015 d'athlétisme, trois français figurent parmi les huit finalistes du 110m haies. D'après les commentateurs de la télévision française, « cette finale va être très serrée, tous les finalistes sont du même niveau et ont les mêmes chances ».

Quelle est la probabilité qu'au moins un français figure sur le podium ?

> Les finalistes étant tous de même niveau, tous les podiums (non ordonné) ont la même probabilité de se réaliser : on est donc dans une situation d'**équiprobabilité**. On va donc dénombrer le nombre de cas favorables (nombre de podiums avec au moins un français) et le nombre de cas possible.
>
> Pour le nombre de cas possibles, choisir un podium, c'est choisir trois athlètes parmi les huit finalistes. Il y a donc $\binom{8}{3} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{6}$ podiums possibles.
>
> Pour le nombre de cas favorables, plutôt que de dénombrer le nombre de podiums contenant au moins un français (ce qui serait pénible et nous amènerait à faire des distinctions de cas...), on va dénombrer plutôt ceux ne comportant aucun français. Un tel podium est obtenu en choisissant trois athlètes parmi les cinq qui ne sont pas français. Il y a $\binom{5}{3} = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{6}$ tels podiums.
>
> La probabilité qu'aucun français ne soit sur le podium est donc $\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{8 \times 7 \times 6} = \dfrac{5}{28}$.
>
> Et donc en passant à l'évènement contraire, la probabilité qu'au moins un français figure sur le podium est $1 - \dfrac{5}{28} = \dfrac{23}{28} \approx 0.82$.
>
> **Remarque.** Et... le résultat de la finale en vidéo !

Exercice 25.2 (★)

On dispose de deux dés A et B. Le dé A comporte quatre faces rouges et deux faces jaunes. Le dé B comporte deux faces rouges et quatre faces jaunes. On lance une pièce de monnaie qui tombe sur pile avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$. Alors :

- si la pièce tombe sur « pile », on ne joue ensuite qu'avec le dé A,
- sinon, on ne joue ensuite qu'avec le dé B.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir « rouge » au premier lancer du dé.
2. On a obtenu « rouge » aux deux premiers lancers du dé. Quelle est la probabilité d'obtenir « rouge » au troisième ?
3. On a obtenu « rouge » aux n premiers lancers du dé. Quelle est la probabilité p_n que la pièce soit tombée sur « pile » ?

1. Introduisons les évènements « primaires » pour cette épreuve : notons P l'évènement « obtenir pile », et R_i l'évènement « obtenir une face rouge au i-ème lancer de dé ». On cherche ici $P(R_1)$. Notons que l'épreuve se déroule en deux temps : une première étape où l'un et un seul des évènements P ou $\overline{P}$ est réalisé, et une deuxième étape où R_1 est réalisé ou non. On est donc dans une situation type d'application de la formule des probabilités totales.

   À l'aide du SCE $(P, \overline{P})$, on a :

   $$P(R_1) = P(R_1 \cap P) + P(R_1 \cap \overline{P}) = P(P)P_P(R_1) + P(\overline{P})P_{\overline{P}}(R_1) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{6} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

2. La probabilité recherchée est $P_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \dfrac{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{P(R_1 \cap R_2)}$. On va là aussi utiliser la formule des probabilités totales avec le même système complet d'évènements :

   $$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) &= P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap P) + P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap \overline{P}) \\ &= P(P)P_P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(\overline{P})P_{\overline{P}}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) \\ &\underset{\text{lancers indép.}}{=} \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{80}{3 \times 6^3} \end{aligned}$$

   et de même :

   $$P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{24}{3 \times 6^2}$$

   On obtient :

   $$P_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{\frac{80}{3 \times 6^3}}{\frac{24}{3 \times 6^2}} = \frac{80}{6 \times 24} = \frac{5}{9}$$

3. On cherche la probabilité $p_n = P_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(P)$, c'est-à-dire la probabilité de la cause P sachant la conséquence $R_1 \cap \dots \cap R_n$. On applique donc ici la formule de Bayes. On a :

   $$p_n = \frac{P(R_1 \cap \dots \cap R_n \cap P)}{P(R_1 \cap \dots \cap R_n)} = \frac{P(P)P_P(R_1 \cap \dots \cap R_n)}{P(P)P_P(R_1 \cap \dots \cap R_n) + P(\overline{P})P_{\overline{P}}(R_1 \cap \dots \cap R_n)}$$

   Calculons à présent :

   $$P_P(R_1 \cap \dots \cap R_n) \underset{\text{lancers indép.}}{=} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{et} \quad P_{\overline{P}}(R_1 \cap \dots \cap R_n) \underset{\text{lancers indép.}}{=} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

   On obtient en substituant :

   $$p_n = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2^n}{3^n}}{\frac{1}{3} \times \frac{2^n}{3^n} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^n}} = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$

Exercice 25.3 (★)
Un candidat passe chaque année 3 concours indépendants, et la probabilité de réussite à chacun de ces concours vaut $\frac{1}{3}$. Soit X le nombre d'années nécessaires à la réussite d'au moins un concours. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

X représente le temps d'attente du premier succès lors d'une répétition d'épreuves de Bernoulli, à savoir A : « réussir au moins un concours au cours d'une année scolaire », identiques et indépendantes (les résultats d'une année à l'autre sont supposés indépendants). Donc X suit une loi géométrique de paramètre p égal à la probabilité de l'évènement A.

Reste à calculer $P(A)$. Pour une année donnée, le nombre Y de concours réussis par le candidat suit une loi binomiale $\mathscr{B}(3, \frac{1}{3})$, puisque cela correspond au nombre de succès « réussir au concours » dans une répétition de trois épreuves de Bernouli indépendantes. On a donc :

$$p = P(Y > 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}.$$

On a donc $X \hookrightarrow \mathscr{G}(19/27)$. En particulier $E(X)$ et $V(X)$ existent et valent :

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{27}{19} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{216}{361}.$$

Exercice 25.4 (★)

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, et soit $Y = \dfrac{1}{X}$. Y admet-t-elle une espérance ?
2. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Montrer que $E(Y)$ existe et la calculer.

Avant de commencer, rappelons le théorème de transfert qu'il va falloir utiliser ici.

Rappel. Théorème de transfert.

Soit X une variable aléatoire discrète et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $g(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète. De plus, on a :

- Si X est une variable aléatoire discrète **finie** :

  La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance, et on a :

  $$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P([X = x]) \quad \text{(somme finie)}.$$

- Si X est une variable aléatoire discrète **infinie** :

  La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance si et seulement si la série $\sum g(x_k)P([X = x_k])$ converge **absolument**. Dans ce cas, on a :

  $$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P([X = x]) \quad \text{(série absolument convergente)}.$$

1. Y admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}P(X = n) = \sum_{n \geq 1} p\frac{(1-p)^{n-1}}{n}$ converge absolument, donc converge puisque son terme général est positif.

   Or on a :

- pour tout $n \geq 1$, $0 \leq p\dfrac{(1-p)^{n-1}}{n} \leq p(1-p)^{n-1}$;
- la série $\sum_{n\geq 1}(1-p)^{n-1}$ converge en tant que série géométrique de raison $(1-p) \in]-1,1[$.

Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} p\dfrac{(1-p)^{n-1}}{n}$ converge donc (absolument). Donc $E(Y)$ existe.

Autre méthode. On pouvait aussi utiliser le résultat suivant.

> **Rappel. Existence de l'espérance par domination.**
> Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $|X| \leq Y$ presque sûrement.
> Si Y admet une espérance alors X admet aussi une espérance et on a $|E(X)| \leq E(Y)$.

Ici on a $0 \leq Y = \dfrac{1}{X} \leq 1$. Comme la variable constante $Z = 1$ admet une espérance, on en déduit que $E(Y)$ existe et on a :

$$|E(Y)| \leq E(Z) = 1.$$

Comme de plus $Y \geq 0$, on a $E(Y) \geq 0$, et donc $0 \leq E(Y) \leq 1$.

2. Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n+1}P(X=n) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ converge absolument, donc converge car la série est à termes positifs.

   On a pour tout $n \geq 0$:
$$\frac{1}{n+1}\frac{\lambda^n}{n!} = \frac{1}{\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}$$
   qui est (à une constante près) le terme général d'une série exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc la série converge (absolument). Ainsi $E(Y)$ existe et vaut :
$$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n+1)!}e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda}-1) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

   Remarque. Si on voulait seulement l'existence de $E(Y)$, sans la calculer, on aurait aussi pu utiliser l'existence de l'espérance par domination, car on a là aussi $0 \leq Y = \dfrac{1}{1+X} \leq 1$.

Exercice 25.5 (★★)

Une urne contient au départ une boule verte et une boule rouge. On effectue des tirages successifs dans cette urne selon la procédure suivante : on tire une boule, si elle est rouge, on arrête les tirages, si elle est verte, on la remet dans l'urne en ajoutant une boule rouge. On note X le nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que $\dfrac{1}{X}$ admet une espérance et la calculer.
3. Montrer que X admet une espérance et la déterminer.

1. Commençons par noter que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Notons R_k l'évènement « la k-ème boule tirée est rouge ». On a pour tout $n\geq 1$:

$$[X=n]=\overline{R_1}\cap\overline{R_2}\cap\cdots\cap\overline{R_{n-1}}\cap R_n.$$

D'où par la formule des probabilités composées (les évènements n'étant pas indépendants !) :

$$P(X=n)=P(\overline{R_1})P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2})\dots P_{\overline{R_1}\cap\overline{R_2}\cap\cdots\cap\overline{R_{n-1}}}(R_n)=\frac{1}{2}\frac{1}{3}\dots\frac{1}{n}\frac{n}{n+1}=\frac{n}{(n+1)!}.$$

2. Rappelons le théorème de transfert.

> **Rappel. Théorème de transfert.**
> Soit X une variable aléatoire discrète et g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction $g(X):\Omega\to\mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète. De plus, on a :
>
> - Si X est une variable aléatoire discrète **finie** :
>   La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance, et on a :
> $$E(g(X))=\sum_{x\in X(\Omega)}g(x)P([X=x])\quad\text{(somme finie)}.$$
> - Si X est une variable aléatoire discrète **infinie** :
>   La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance si et seulement si la série $\sum g(x_k)P([X=x_k])$ converge **absolument**. Dans ce cas, on a :
> $$E(g(X))=\sum_{x\in X(\Omega)}g(x)P([X=x])\quad\text{(série absolument convergente)}.$$

Par le théorème de transfert, $Y=\dfrac{1}{X}$ admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}P(X=n)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}$ converge absolument, donc converge (car à termes positifs). On reconnait ici le terme général d'une série exponentielle de paramètre 1. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)!}$ converge (absolument) et $E(Y)$ existe bien. De plus on a :

$$E(Y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}=e-2.$$

3. X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\geq 1}nP(X=n)=\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{(n+1)!}$ converge absolument, donc converge car le terme général de la série est positif. Pour tout $n\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{(n+1)!}&=\frac{n(n+1)-n}{(n+1)!}=\frac{n(n+1)}{(n+1)!}-\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}\\&=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{(n+1)}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

On reconnait ici la somme de termes généraux de séries exponentielles de paramètre 1. Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{(n+1)!}$ converge, et $E(X)$ existe. De plus, on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \right) \underset{\text{tout conv.}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\ &= e + (e-1-1) - (e-1) = e-1 \end{aligned}$$

Exercice 25.6 (★)

On lance une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p, et on note N le rang d'apparition du premier pile. On place alors des boules numérotées de 0 à N dans une urne, et on effectue des tirages avec remise d'une boule au hasard jusqu'à obtenir la boule 0. On note X le nombre de tirages nécessaires.

1. (a) Quelle est la loi de N ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X conditionnellement à l'évènement $[N = n]$. En déduire que $E(X|[N = n])$ existe et la déterminer.
   (c) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
   (d) i. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulation(p)` renvoyant une réalisation de la variable X.
   ii. Écrire un script `Python` utilisant la fonction `simulation` et permettant d'obtenir une estimation de $E(X)$.
2. (★) Mêmes questions, si les tirages dans l'urne ont lieu sans remise.

1. (a) Notons N la variable aléatoire égale au nombre de lancers de la pièce jusqu'à obtenir pile. On a $N \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $[N = n]$ réalisé. L'urne contient alors $n+1$ boules numérotées de 0 à n. Les tirages étant indépendants (car effectués avec remise), X est le temps d'attente du premier succès (« obtenir la boule 0 ») lors de répétitions d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc la loi de X sachant l'évènement $[N = n]$ est une loi géométrique $\mathscr{G}(\frac{1}{n+1})$. En particulier, on a :
   $$E(X|[N = n]) = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = n + 1.$$
   (c) On va appliquer la formule de l'espérance totale.

Rappel. Théorème de l'espérance totale.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements tel que $P(A_n) \neq 0$ pour tout n.

Une variable discrète X admet une espérance si et seulement si :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X|A_n)$ existe ;

(2) $\sum_n P(A_n)E(|X||A_n)$ converge (absolument).

Dans ce cas, on a alors :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)E(X|A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{x\in X(\Omega)} xP_{A_n}(X = x)P(A_n).$$

Par la formule de l'espérance totale appliquée au système complet d'évènements $\{[N = n], n \in \mathbb{N}^*\}$, $E(X)$ existe si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} P(N = n)E(X|[N = n])$ converge (car $X \geq 0$). Or on a pour tout $n \geq 1$:

$$P(N = n)E(X|[N = n]) = (n + 1)p(1 - p)^{n-1} = p(n(1 - p)^{n-1} + (1 - p)^{n-1})$$

On reconnait la somme des termes généraux d'une série géométrique et d'une série géométrique dérivée, toutes deux de raison $(1 - p) \in] - 1, 1[$. Elles convergent donc toutes les deux. Ainsi $E(X)$ existe et on a :

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)E(X|[N = n]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(p(n(1 - p)^{n-1} + (1 - p)^{n-1})\right)\\
&= p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1 - p)^{n-1} + p\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - p)^{n-1}) \quad \text{car tout converge}\\
&= p\frac{1}{(1 - (1 - p))^2} + p\frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{1}{p} + 1\end{aligned}$$

(d) i. On peut procéder ainsi :

```python
def simulation(p):
    N = rd.geometric(p)
    X = rd.geometric(1/(N+1))
    return X
```

ii. Considérons $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes et identiquement distribuées de même loi que X. Rappelons que par la loi faible des grands nombres (dont on n'a pas vérifié toutes les hypothèses car on n'a pas démontré que $V(X)$ existe...), $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge en probabilité vers $E(X)$. Utilisons ce résultat pour obtenir une estimation de $E(X)$.

```python
p = float(input('entrer p :'))
S = 0 ; n = 10000
for k in range(n):
    S = S + simulation(p)
print(S/n)
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va chercher la loi de X sachant $[N = n]$, les tirages se faisant à présent sans remise. On a $X([N = n]) = [\![1, n+1]\!]$ car l'urne contient $n+1$ boules numérotées de 0 à n. Les tirages se faisant sans remise, on obtient la boule numéro 0 entre le premier tirage et le $(n+1)$-ème tirage.

Pour $i \geq 1$, notons A_i l'évènement « obtenir la boule 0 au i-ème tirage ». On a pour tout $1 \leq k \leq n+1$:
$$[X = k] = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k.$$
Par la formule des probabilités composées (qu'on utilise car les évènements ne sont pas indépendants), on obtient :
$$\begin{aligned}
P_{[N=n]}(X = k) &= \frac{P([N = n] \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k)}{P(N = n)} \\
&= \frac{P(N = n)P_{[N=n]}(\overline{A_1})P_{[N=n]\cap\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \ldots P_{[N=n]\cap\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k)}{P(N = n)} \\
&= P_{[N=n]}(\overline{A_1})P_{[N=n]\cap\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \ldots P_{[N=n]\cap\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k) \\
&= \frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-(k-2)}{n+1-(k-2)} \frac{1}{(n+1)-(k-1)} = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$
Ainsi la loi de X sachant $[N = n]$ est une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$. En particulier, on a $E(X|[N = n]) = \dfrac{1+(n+1)}{2} = \dfrac{n+2}{2}$.

Par le théorème de l'espérance totale appliquée avec le système complet d'évènements $\{[N = n],\, n \in \mathbb{N}^*\}$, $E(X)$ existe si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} P(N = n)E(X|[N = n])$ converge (car $|X| = X$ puisque $X \geq 0$). Or on a pour tout $n \geq 1$:
$$P(N = n)E(X|[N = n]) = p(1-p)^{n-1}\frac{n+2}{2} = \frac{p}{2}\left(n(1-p)^{n-1}\right) + p(1-p)^{n-1}$$
On reconnait ici aussi une combinaison linéaire des termes généraux de séries géométriques et géométriques dérivées, toutes deux convergentes car $1-p \in]-1, 1[$. Ainsi $E(X)$ existe bien, et on a :
$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)E(X|[N = n]) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{p}{2}\left(n(1-p)^{n-1}\right) + p(1-p)^{n-1}\right) \\
&\underset{\text{tout conv.}}{=} \frac{p}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n(1-p)^{n-1}\right) + p\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}) = \frac{p}{2}\frac{1}{(1-(1-p))^2} + p\frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{2p} + 1.
\end{aligned}$$

Pour les simulations `Python`, seule la fonction `simulation` est à modifier comme suit :

```python
def simulation(p):
    N = rd.geometric(p)
    X = rd.randint(1,(N+1))
    return X
```

Exercice 25.7 (★★)
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. La valeur de cette variable est affichée sur un compteur détraqué :

- lorsque X est non nul, le compteur affiche X ;

- lorsque $X = 0$, le compteur affiche un nombre aléatoire compris entre 1 et n, tiré suivant une loi uniforme $\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

On note Y la variable aléatoire égale au numéro affiché par le compteur.

1. Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.
2. (a) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulation(n,p)` renvoyant une réalisation de la variable Y.
   (b) Écrire un script `Python` utilisant la fonction `simulation` et renvoyant une estimation de $E(Y)$.

1. Notons tout d'abord que $Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, et donc que Y admet bien une espérance. On dispose du SCE $([X = i])_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, déterminons la loi de Y sachant $[X = i]$:
   - Si $i \neq 0$, alors la loi de Y sachant $[X = i]$ est la loi de la variable certaine égale à i. En particulier $E(Y|[X = i])$ (existe et) vaut i.
   - Si $i = 0$, alors la loi de Y sachant $[X = 0]$ est la loi uniforme $\mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. En particulier, $E(Y|[X = 0])$ (existe et) vaut $\dfrac{n+1}{2}$.

   On va appliquer le théorème de l'espérance totale qu'on rappelle ici.

   Rappel. Théorème de l'espérance totale.
   Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements tel que $P(A_n) \neq 0$ pour tout n.

   Une variable discrète X admet une espérance si et seulement si :

   (1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X|A_n)$ existe ;
   (2) $\displaystyle\sum_n P(A_n) E(|X||A_n)$ converge (absolument).

   Dans ce cas, on a alors :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) E(X|A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{x \in X(\Omega)} x P_{A_n}(X = x) P(A_n).$$

   Les conditions (1) et (2) sont immédiatement vérifiées pour la variable Y qui est finie, et on a :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{i=0}^{n} P(X = i) E(Y|[X = i]) = P(X = 0) E(Y|[X = 0]) + \sum_{i=1}^{n} P(X = i) E(Y|[X = i]) \\
&= (1-p)^n \frac{n+1}{2} + \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (1-p)^n \frac{n+1}{2} + \sum_{i=1}^{n} n \binom{n-1}{i-1} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= (1-p)^n \frac{n+1}{2} + n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i+1} (1-p)^{n-1-i} = (1-p)^n \frac{n+1}{2} + np(p + (1-p))^{n-1} \\
&= (1-p)^n \frac{n+1}{2} + np
\end{aligned}$$

2. (a) On peut procéder ainsi :

```python
def simulation(n,p):
    X = rd.binomial(n,p)
```

```
    if X == 0 :
        X = rd.randint(1,n+1)
    return X
```

(b) Soient $Y_1, \dots, Y_n$ des variables indépendantes et identiquement distribuées de même loi que Y. Par la loi faible des grands nombres ($E(Y)$ et $V(Y)$ puisque Y est finie), $\overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$ converge en probabilité vers $E(Y)$. Utilisons ce résultat pour obtenir une estimation de $E(Y)$.

```
n = int(input("n :"))
p = float(input("p :"))
S = 0 ; m = 10000
for k in range(m):
    S = S + simulation(n,p)
print(S/n)
```

Exercice 25.8 (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de deux urnes. L'urne 1 contient n boules rouges, l'urne 2 contient n boules blanches. On tire une boule de l'urne 1 que l'on place dans l'urne 2, puis on tire une boule de l'urne 2 que l'on place dans l'urne 1. On répète ainsi indéfiniment ces tirages.
On pose $X_0 = n$ et, pour tout $k \geq 1$, on note X_k le nombre de boules rouges dans l'urne 1 après avoir remis pour la k-ième fois une boule dans l'urne 1.

1. Soit $i \in [\![0, n]\!]$.

   (a) Montrer que $P_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i) = \dfrac{2i(n-i)+n}{n(n+1)}$.

   (b) Montrer que $P_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i-1) = \dfrac{i^2}{n(n+1)}$.

   (c) Montrer que $P_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i+1) = \dfrac{(n-i)^2}{n(n+1)}$.

2. En déduire que $E(X_{k+1}|[X_k = i]) = \dfrac{i(n-1)+n}{n+1}$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

3. Exprimer $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$. En déduire une expression de $E(X_k)$ en fonction de k.

1. Pour tout $k \geq 1$, notons A_k l'évènement « tirer une boule rouge dans l'urne U_1 lors du k-ème allé-retour » et B_k l'évènement « tirer une boule rouge dans l'urne U_2 lors du k-ème allé-retour ».

   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. L'évènement $[X_k = i] \cap [X_{k+1} = i]$ correspond à avoir i boules rouges dans l'urne U_1 après k allés-retours et tirer une boule rouge dans l'urne U_1 et une boule rouge dans l'urne U_2 ou tirer une boule blanche dans l'urne U_1 et une boule blanche dans l'urne U_2, ce qui se traduit ensemblistement par :

$$[X_k = i] \cap [X_{k+1} = i] = [X_k = i] \cap \Big[(A_{k+1} \cap B_{k+1}) \cup (\overline{A_{k+1}} \cap \overline{B_{k+1}})\Big].$$

On a :

$$(*)\qquad P_{[X_k=i]}(X_{k+1}=i) = P_{[X_k=i]}((A_{k+1}\cap B_{k+1})\cup(\overline{A_{k+1}}\cap\overline{B_{k+1}}))$$
$$\underset{\text{incomp.}}{=} P_{[X_k=i]}(A_{k+1}\cap B_{k+1}) + P_{[X_k=i]}(\overline{A_{k+1}}\cap\overline{B_{k+1}}))$$
$$= P_{[X_k=i]}(A_{k+1})P_{[X_k=i]\cap A_{k+1}}(B_{k+1}) + P_{[X_k=i]}(\overline{A_{k+1}})P_{[X_k=i]\cap\overline{A_{k+1}}}(\overline{B_{k+1}})$$

par la formule des probabilités composées (qu'on utilise puisque les évènements ne sont pas indépendants). Reste à noté que si $[X_k=i]$ est réalisé, alors l'urne U_1 contient i boules rouges et $n-i$ boules blanches, et l'urne U_2 l'inverse. On obtient donc :

$$P_{[X_k=i]}(X_{k+1}=i) = \frac{i}{n}\times\frac{n-i+1}{n+1} + \frac{n-i}{n}\frac{i+1}{n+1} = \frac{i(n-i+1)+(n-i)(i+1)}{n(n+1)}$$
$$= \frac{2i(n-i)+i+n-i}{n(n+1)} = \frac{2i(n-i)+n}{n(n+1)}$$

(b) Pour $i\in[\![1,n]\!]$, l'évènement $[X_k=i]\cap[X_{k+1}=i-1]$ correspond à avoir i boules rouges dans l'urne U_1 après k allés-retours et tirer une boule rouge dans l'urne U_1 et une boule blanche dans l'urne U_2. D'où :

$$P_{[X_k=i]}(X_{k+1}=i-1) = P_{[X_k=i]}(A_{k+1}\cap\overline{B_{k+1}}) = P_{[X_k=i]}(A_{k+1})P_{[X_k=i]\cap A_{k+1}}(\overline{B_{k+1}})$$
$$= \frac{i}{n}\frac{i}{n+1} = \frac{i^2}{n(n+1)}$$

Notons que cette formule est encore valable pour $i=0$.

(c) Pour $i\in[\![0,n-1]\!]$, l'évènement $[X_k=i]\cap[X_{k+1}=i+1]$ correspond à avoir i boules rouges dans l'urne U_1 après k allés-retours et tirer une boule blanche dans l'urne U_1 et une boule rouge dans l'urne U_2. D'où :

$$P_{[X_k=i]}(X_{k+1}=i-1) = P_{[X_k=i]}(\overline{A_{k+1}}\cap B_{k+1}) = P_{[X_k=i]}(\overline{A_{k+1}})P_{[X_k=i]\cap\overline{A_{k+1}}}(B_{k+1})$$
$$= \frac{(n-i)}{n}\frac{(n-i)}{n+1} = \frac{(n-i)^2}{n(n+1)}$$

Notons là aussi que cette formule est valable pour $i=n$.

2. Notons tout d'abord que $X_{k+1}(\Omega)=[\![0,n]\!]$, et donc que $E(X_{k+1}|[X_k=i])$ existe bien car X_{k+1} est finie. Soit $i\in[\![0,n]\!]$. On a par définition de l'espérance conditionnelle :

$$E(X_{k+1}|[X_k=i]) = \sum_{j=0}^{n} jP_{[X_k=i]}(X_{k+1}=j)$$

On a $P_{[X_k=i]}(X_{k+1}=j)=0$ si $j\notin\{i-1,i,i+1\}$ car la composition de l'urne U_1 varie de 0 ou ±1 boule rouge en un allé-retour. On obtient :

$$E(X_{k+1}|[X_k=i]) = (i-1)P_{[X_k=i]}(X_{k+1}=i-1) + iP_{[X_k=i]}(X_{k+1}=i) + (i+1)P_{[X_k=i]}(X_{k+1}=i+1)$$
$$= \frac{i^2(i-1)+2i^2(n-i)+ni+(i+1)(n-i)^2}{n(n+1)}$$
$$= \frac{i^3-i^2+2i^2n-2i^3+ni+in^2-2i^2n+i^3+n^2-2in+i^2}{n(n+1)}$$
$$= \frac{i^3-i^2+2i^2n-2i^3+ni+in^2-2i^2n+i^3+n^2-2in+i^2}{n(n+1)}$$
$$= \frac{in(n-1)+n^2}{n(n+1)} = \frac{i(n-1)+n}{n+1}$$

3. On applique la formule de l'espérance totale avec le SCE $([X_k = i])_{i=0,\dots,n}$. Notons qu'il n'y a pas de problème de convergence puisque X_{k+1} est une variable finie. On obtient :

$$\begin{aligned} E(X_{k+1}) &= \sum_{i=0}^{n} P(X_k = i) E(X_{k+1}|[X_k = i]) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i(n-1)+n}{n+1} P(X_k = i) \\ &= \frac{n-1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} iP(X_k = i) + \frac{n}{n+1} \sum_{i=0}^{n} P(X_k = i) \\ &= \frac{n-1}{n+1} E(X_k) + \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Notons $u_k = E(X_k)$ pour tout $k \geq 0$. On a $u_0 = E(X_0) = n$ et pour tout $k \geq 0$:

$$u_{k+1} = \frac{n-1}{n+1} u_k + \frac{n}{n+1} \qquad (1)$$

La suite (u_k) est arithmético-géométrique. On cherche le point fixe :

$$\ell = \frac{n-1}{n+1} \ell + \frac{n}{n+1} \qquad (2)$$

En résolvant (2), on obtient $\ell = \frac{n}{2}$. En effectuant $(1) - (2)$, on obtient que pour tout $k \geq 0$:

$$(u_{k+1} - \ell) = \frac{n-1}{n+1} (u_k - \ell).$$

D'où :

$$u_k - \ell = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^k (u_0 - \ell)$$

soit encore :

$$\forall k \geq 0, \quad u_k = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^k.$$

Remarque. Lorsque $k \to +\infty$, c'est-à-dire lorsque le nombre d'allé-retour tend vers l'infini, $E(X_k)$ tend vers $\frac{n}{2}$, ce qui correspond à l'intuition : lorsqu'on a effectué beaucoup d'allé-retour entre les deux urnes, on peut espérer que les boules rouges et blanches soient réparties équitablement entre les deux urnes.

Couples de variables discrètes

Exercice 25.9 (★★)

Une urne contient des boules rouges et des boules noires, la proportion de boules rouges étant notée p $(0 < p < 1)$.

On effectue une infinité de tirages avec remise dans cette urne, et on note N (resp. R) le rang du tirage où, pour la première fois, on a obtenu une boule noire (resp. rouge).

1. Donner la loi de N et la loi de R. Les variables R et N sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi conjointe du couple (N, R).
3. Calculer la covariance de N et R, puis le coefficient de corrélation linéaire.

1. R et N donnent le rang du premier succès lors d'une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes avec probabilité de succès respectivement p pour R et $(1-p)$ pour N, elle suivent donc toutes deux une loi géométrique : on a $R \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $N \hookrightarrow \mathscr{G}(1-p)$.

Ces variables ne sont pas indépendantes puisque

$$P(R=1,\ N=1)=0\neq p(1-p)=P(R=1)P(N=1).$$

Rappel. Indépendance de deux variables discrètes.
Les variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, on a :

$$P([X=x]\cap[Y=y])=P(X=x)\times P(Y=y).$$

2. On a $(N,R)(\Omega)\subset(\mathbb{N}^*)^2$. Soit $(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2$. On a $P(N=k,\ R=\ell)=0$ si $k,\ell\geq 2$ puisque le premier tirage a nécessairement donné une boule noire ou une boule rouge. Comme remarqué plus haut, on a aussi $P(N=1,\ R=1)=0$ puisqu'une seule couleur peut correspondre au premier tirage. Supposons $\ell\geq 2$, on a :

$$[N=1]\cap[R=\ell]=[N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{\ell-1}\cap R_\ell]$$

en notant N_i l'évènement « obtenir la boule noire au i-ème tirage » et R_j l'évènement « obtenir la boule rouge au j-ème tirage ». Les tirages étant indépendants, on obtient :

$$P(N=1,\ R=\ell)=(1-p)^{\ell-1}p.$$

De manière symétrique, on a pour tout $k\geq 2$:

$$P(N=k,\ R=1)=p^{k-1}(1-p).$$

3. Commençons par quelques rappels sur la covariance.

Rappels. Covariance.
Si X et Y admettent une variance, on définit :

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E((X-E(X))(Y-E(Y)).$$

On a :

- Formule de Huygens : $\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$;
- $\operatorname{Cov}(X,X)=V(X)$;
- la covariance est bilinéaire et symétrique ;
- $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\operatorname{Cov}(X,Y)\quad\Rightarrow\quad\operatorname{Cov}(X,Y)=\dfrac{1}{2}\left(V(X+Y)-V(X)-V(Y)\right).$

Rappelons aussi que **si** X et Y sont indépendantes, **alors** $\operatorname{Cov}(X,Y)=0$. Mais la réciproque est **fausse** : si $\operatorname{Cov}(X,Y)=0$, alors X et Y sont linéairement indépendantes, mais elles peuvent être liées par une relation non linéaire. Ainsi si $\operatorname{Cov}(X,Y)=0$, on ne peut pas conclure sur l'indépendance des variables.

Notons que la covariance existe nécessairement puisque N et R admettent des moments d'ordre 2. Par la formule de Huygens, on a :

$$\operatorname{Cov}(N,R)=E(NR)-E(N)E(R).$$

De plus, par le théorème de transfert double, on a (là aussi, tout converge puisque N et R admettent une variance) :

$$\begin{aligned}
E(NR) &= \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} k\ell P(N=k,\ R=\ell) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} kP(N=k,\ R=1) + \sum_{\ell=2}^{+\infty} \ell P(N=1,\ R=\ell)
\end{aligned}$$

Notons que $[N=k]\cap[R=1]=[N=k]$ puisque si on a obtenu la boule noire au k-ème tirage pour la première fois, on a donc obtenu que des boules rouges auparavant. De même on a $[N=1]\cap[R=\ell]=[R=\ell]$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
E(NR) &= \sum_{k=2}^{+\infty} kP(N=k) + \sum_{\ell=2}^{+\infty} \ell P(R=\ell) \\
&= (E(N)-P(N=1)) + (E(R)-P(R=1)) \\
&= \frac{1}{1-p} - (1-p) + \frac{1}{p} - p \\
&= \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} - 1 \\
&= \frac{1}{p(1-p)} - 1
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\mathrm{Cov}(N,R) = \frac{1}{p(1-p)} - 1 - \frac{1}{(1-p)p} = -1.$$

Notons que cette covariance étant non nulle, on retrouve bien que N et R ne sont pas indépendantes.

Rappels. Coefficient de corrélation linéaire.
Si X et Y admettent une variance non nulle, on définit :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}.$$

On a (à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz) :

- $\rho_{X,Y}\in[-1,1]$;
- $\rho_{X,Y}=1 \Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\ Y=aX+b$;
- $\rho_{X,Y}=-1 \Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}_-^*\times\mathbb{R},\ Y=aX+b$.

Par définition du coefficient de corrélation linéaire, on a :

$$\rho_{N,R} = \frac{\mathrm{Cov}(N,R)}{\sqrt{V(R)}\sqrt{V(N)}} = -\sqrt{p(1-p)}.$$

Le coefficient de corrélation linéaire étant négatif, on en déduit que les variables N et R évoluent en moyenne en sens inverse, ce qui est effectivement le cas puisque si $N=1$ alors $R>1$ et si $R=1$ alors $N>1$.

Exercice 25.10 (★★)
Soit $n\geq 3$ et soit $p\in]0,1[$. On lance n fois une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p. Pour tout $i\in[\![2,n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le $(i-1)$-ème lancer donne pile et le i-ème donne face, et 0 sinon.

1. Déterminer la loi des X_i, leur espérance et leur variance.
2. Soient i et j deux entiers tels que $2 \leq i < j \leq n$. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ? Déterminer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
3. On pose à présent $Y = \sum_{i=2}^{n} X_i$. Que représente Y ? Déterminer son espérance.
4. En utilisant la bilinéarité de la covariance, déterminer la variance de Y.

1. Soit $2 \leq i \leq n$. $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$, donc X_i suit une loi de Bernoulli. Déterminons son paramètre. Notons pour cela P_j l'évènement « le j-ème lancer donne pile ». :
$$[X_i = 1] = P_{i-1} \cap \overline{P_i}.$$
Les lancers étant indépendants, on obtient $P(X_i = 1) = P(P_{i-1})P(\overline{P_i}) = p(1-p)$. Ainsi X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p(1-p)$.
2. Soient $2 \leq i < j \leq n$. Si $i < j-1$, les résultats des lancers $i-1$ et i sont indépendants de ceux des lancers $j-1$ et j. Par lemme de coalition, on en déduit que X_i et X_j sont indépendants dans ce cas. En particulier, on a $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$

   Supposons à présent que $i = j-1$, et calculons $\mathrm{Cov}(X_{j-1}, X_j)$. On a par le formule de Huygens (toutes les variables admettent une variances, donc il n'y a pas de problème d'existence) :
$$\mathrm{Cov}(X_{j-1}, X_j) = E(X_{j-1}X_j) - E(X_i)E(X_j).$$
Or $X_{j-1}X_j$ est la variable constante égale à 0 car on ne peut avoir à la fois pile et face au lancer $j-1$. Ainsi on a :
$$\mathrm{Cov}(X_{j-1}, X_j) = -E(X_i)E(X_j) = -p^2(1-p)^2.$$
En particulier, $\mathrm{Cov}(X_{j-1}, X_j) \neq 0$ et les variables X_{j-1} et X_j ne sont pas indépendantes (elles sont linéairement corrélées).
3. Posons $Y = \sum_{i=2}^{n} X_i$. Y compte le nombre de succession d'un pile puis d'un face lors des n lancers de la pièce. Par linéarité de l'espérance, on a :
$$E(Y) = E\left(\sum_{i=2}^{n} X_i\right) = \sum_{i=2}^{n} E(X_i) = \sum_{i=2}^{n} p(1-p) = (n-1)p(1-p).$$
4. On a :
$$\begin{aligned}
V(Y) = \mathrm{Cov}(Y, Y) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=2}^{n} X_i, \sum_{j=2}^{n} X_j\right) \\
&= \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} \underbrace{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}_{=0 \text{ si } j \neq i-1, i, i+1} \qquad \text{par bil. de la covariance} \\
&= \sum_{i=2}^{n} \underbrace{\mathrm{Cov}(X_i, X_i)}_{\text{cas } j=i} + \sum_{i=2}^{n-1} \underbrace{\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1})}_{\text{cas } j=i+1} + \sum_{i=3}^{n} \underbrace{\mathrm{Cov}(X_i, X_{i-1})}_{\text{cas } j=i-1} \\
&= (n-1)p(1-p)(1-p(1-p)) - (n-2)p^2(1-p)^2 - (n-2)p^2(1-p)^2 \\
&= p(1-p)\left[(n-1)(1-p(1-p)) - 2(n-2)p(1-p)\right].
\end{aligned}$$

Mise en garde.

Vous avez peut-être utilisé que :

$$V(Y) = \sum_{i=2}^{n} V(X_i).$$

Attention, ceci est FAUX car les variables X_i ne sont pas indépendantes !

Exercice 25.11 (★★)

Soit $N \geq 2$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On pose $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de U, puis celle de V. U et V sont-elles indépendantes ?
2. Justifier que U et V admettent une espérance et une variance, et les calculer.
3. Déterminer la variance de $U + V$, et en déduire $\mathrm{Cov}(U, V)$.
4. (★) Donner la loi de $X + Y$, puis celle de $U + V$.

1. Déterminons la loi de U. On a $U(\Omega) = [\![1, N]\!]$. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on a :

$$[U \leq k] = [X \leq k] \cap [Y \leq k].$$

On obtient en prenant la probabilité :

$$\begin{aligned} P(U \leq k) &= P(X \leq k)P(Y \leq k) \quad \text{par indépendance} \\ &= P(X \leq k)^2 \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.} \end{aligned}$$

On calcule :

$$P(X \leq k) = \sum_{i=1}^{k} P(X = i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{N} = \frac{k}{N}.$$

D'où $P(U \leq k) = \dfrac{k^2}{N^2}$ pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, formule qui est aussi valable pour $k = 0$. D'autre part, on a :

$$[U \leq k] = [U \leq k - 1] \cup [U = k].$$

Ces évènements étant incompatibles, on en déduit que :

$$P(U \leq k) = P(U \leq k - 1) + P(U = k).$$

Ainsi on obtient pour tout $k \in [\![1, N]\!]$:

$$P(U = k) = P(U \leq k) - P(U \leq k - 1) = \frac{k^2}{N^2} - \frac{(k-1)^2}{N^2} = \frac{2k - 1}{N^2}.$$

Déterminons à présent la loi de V. On a $V(\Omega) = [\![1, N]\!]$, et pour tout $k \in [\![0, N - 1]\!]$, on a :

$$[V > k] = [X > k] \cap [Y > k].$$

On obtient en prenant la probabilité :

$$\begin{aligned} P(V > k) &= P(X > k)P(Y > k) \quad \text{par indépendance} \\ &= P(X > k)^2 \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.} \end{aligned}$$

On calcule :

$$P(X>k)=\sum_{i=k+1}^{N}P(X=i)=\sum_{i=k+1}^{N}\frac{1}{N}=\frac{N-(k+1)+1}{N}=\frac{N-k}{N}.$$

D'où $P(V>k)=\dfrac{(N-k)^2}{N^2}$ pour tout $k\in[\![0,N-1]\!]$, formule qui est aussi valable pour $k=N$. D'autre part, on a :

$$[V>k-1]=[V>k]\cup[V=k].$$

Ces évènements étant incompatibles, on en déduit que :

$$P(V>k-1)=P(V>k)+P(V=k).$$

Ainsi on obtient pour tout $k\in[\![1,N]\!]$:

$$P(V=k)=P(V>k-1)-P(V>k)=\frac{(N-k+1)^2}{N^2}-\frac{(N-k)^2}{N^2}=\frac{2N-2k+1}{N^2}.$$

Les variables U et V ne sont pas indépendantes, puisque par exemple :

$$P(U=1,V=2)=0\neq P(U=1)P(V=2).$$

2. U et V sont des variables finies, elles admettent donc espérance et variance.

   On cherche l'espérance de U :

$$\begin{aligned}E(U)&=\sum_{k=1}^{N}k\frac{2k-1}{N^2}=\frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N}k^2-\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}k\\&=\frac{2}{N^2}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}-\frac{1}{N^2}\frac{N(N+1)}{2}\\&=\frac{(N+1)(2N+1)}{3N}-\frac{N+1}{2N}\\&=\frac{(N+1)(4N-1)}{6N}\end{aligned}$$

   On calcule $E(U^2)$:

$$\begin{aligned}E(U^2)&=\sum_{k=1}^{N}k^2\frac{2k-1}{N^2}=\frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N}k^3-\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}k^2\\&=\frac{2}{N^2}\frac{N^2(N+1)^2}{4}-\frac{1}{N^2}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\\&=\frac{(N+1)^2}{2}-\frac{(N+1)(2N+1)}{6N}\\&=\frac{(N+1)[3N(N+1)-(2N+1)]}{6N}\\&=\frac{(N+1)(3N^2+N-1)}{6N}\end{aligned}$$

Et donc par la formule de Huygens, on obtient :

$$\begin{aligned}
V(U) = E(U^2) - E(U)^2 &= \frac{(N+1)(3N^2+N-1)}{6N} - \frac{(N+1)^2(4N-1)^2}{36N^2} \\
&= \frac{(N+1)\left[6N(3N^2+N-1) - (N+1)(4N-1)^2\right]}{36N^2} \\
&= \frac{(N+1)\left[18N^3+6N^2-6N-(N+1)(16N^2-8N+1)\right]}{36N^2} \\
&= \frac{(N+1)\left[18N^3+6N^2-6N-16N^3+8N^2-N-16N^2+8N-1\right]}{36N^2} \\
&= \frac{(N+1)\left[2N^3-2N^2+N-1\right]}{36N^2} \\
&= \frac{(N+1)\left[2N^2(N-1)+(N-1)\right]}{36N^2} \\
&= \frac{(N+1)(N-1)(2N^2+1)}{36N^2}
\end{aligned}$$

Des calculs similaires permettent d'obtenir $E(V)$ et $V(V)$, on ne donne que les résultats :

$$E(V) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6N}, \quad E(V^2) = \frac{(N+1)(N^2+N+1)}{6N}$$

et

$$V(V) = \frac{(N+1)(N-1)(2N^2+1)}{36N^2}.$$

3. On a $U+V = \max(X,Y) + \min(X,Y) = X+Y$, donc :

$$V(U+V) = V(X+Y) \underset{X,Y \text{ indép.}}{=} V(X) + V(Y) = 2\frac{N^2-1}{12} = \frac{N^2-1}{6}.$$

On en déduit la covariance $\text{Cov}(U,V)$ à l'aide de la formule suivante :

$$\text{Cov}(U,V) = \frac{1}{2}(V(U+V) - V(U) - V(V)).$$

On obtient après calculs :

$$\text{Cov}(U,V) = \frac{(N^2-1)^2}{36N^2}.$$

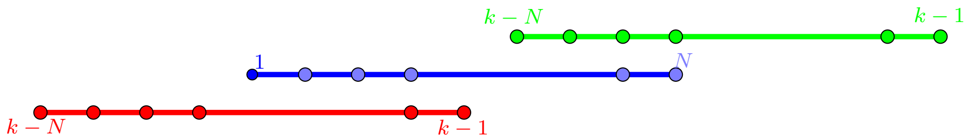
4. Posons $Z = X+Y$. Tout d'abord, $Z(\Omega) = [\![2, 2N]\!])$. Pour tout $k \in [\![2, 2N]\!]$, on cherche à déterminer $P(Z=k)$. Les variables X et Y étant indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, on va utiliser un produit de convolution discret.

$$P(Z=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)$$

On doit avoir $k-i \in Y(\Omega) = [\![1, N]\!]$, soit :

$$1 \leq k-i \leq N \quad \Leftrightarrow 1+i \leq k \leq N+i \quad \Leftrightarrow \quad k-N \leq i \leq k-1$$

D'autre part, on doit avoir aussi $i \in X(\Omega)$, soit $1 \leq i \leq N$. Ainsi, pour connaitre l'intervalle d'entiers sur lequel il faut sommer, on cherche l'intersection $[\![k-N, k-1]\!] \cap [\![1, N]\!]$. On a deux cas possibles représentés ci-dessous (notons qu'on a nécessairement $k-1 \geq 1$ et $k-N \leq N$ puisque $2 \leq k \leq 2N$) :



- Cas 1 (représenté en rouge et bleu) : si $k-1 \leq N$, c'est-à-dire $k \leq N+1$, alors $[\![k-N, k-1]\!] \cap [\![1, N]\!] = [\![1, k-1]\!]$ et dans ce cas :

$$P(Z=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i)P(Y=k-i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{N^2} = \frac{k-1}{N^2}.$$

- Cas 2 (représenté en bleu et en vert) : si $N < k-1$, c'est-à-dire $N+1 < k$, alors $[\![k-N, k-1]\!] \cap [\![1, N]\!] = [\![k-N, N]\!]$ et dans ce cas :

$$P(Z=k) = \sum_{i=k-N}^{N} P(X=i)P(Y=k-i) = \sum_{i=k-N}^{N} \frac{1}{N^2} = \frac{N-(k-N)+1}{N^2} = \frac{2N-k+1}{N^2}.$$

On peut donc conclure que la loi de Z est donnée par $Z(\Omega) = [\![2, 2N]\!]$ et par :

$$P(Z=k) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{N^2} & \text{si } 2 \leq k \leq N+1 \\ \dfrac{2N-k+1}{N^2} & \text{si } N+2 \leq k \leq 2N \end{cases}$$

Puisqu'enfin $Z = X+Y = U+V$, on obtient donc aussi la loi de $U+V$.

Exercice 25.12 (★★)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la même loi géométrique de paramètre p. On pose $q = 1-p$, $U = X_1 + X_2$, $T = X_1 - X_2$.

1. Déterminer la loi de U.
2. (★) Déterminer la loi de T.
3. Calculer $\text{Cov}(U, T)$. Les variables U et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 25.13 (★★★ - Oral ESCP 2016)

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soient λ et p deux réels tels que $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$.
On considère le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi définie par :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X=n, Y=k) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.
2. Déterminer la loi marginale de la variable aléatoire X, puis celle de la variable aléatoire Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de la variable aléatoire Y, sachant que $[X=n]$ est réalisé.
4. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.
5. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

1. Notons $p_{k,n} = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k(1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$. Pour montrer qu'on définit ici une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$, il faut montrer que :

   (1) $p_{k,n} \geq 0$ pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$,

   (2) la famille $(p_{k,n})$ est sommable et sa somme vaut 1.

   Le premier point est clairement satisfait. Pour montrer que $(p_{k,n})$ est sommable, on dispose du théorème de sommation par paquets, et plus particulièrement de deux conséquences de ce résultat : le théorème de Fubini et le théorème de sommation suivant les diagonales. Et ici c'est Fubini qui se prête le mieux à notre situation, les variables k et n étant « séparées » dans l'expression de $p_{k,n}$ et faisant apparaitre des sommes de séries usuelles. Rappelons son énoncé.

   > **Rappel. Théorème de Fubini.**
   > Les assertions suivantes sont équivalentes :
   >
   > (i) La famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.
   >
   > (ii) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{j\geq 0} |u_{i,j}|$ converge et la série $\sum\limits_{i\geq 0} \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}| \right)$ converge.
   >
   > (iii) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{i\geq 0} |u_{i,j}|$ converge et la série $\sum\limits_{j\geq 0} \left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} |u_{i,j}| \right)$ converge.
   >
   > Dans ce cas, on a alors :
   >
   > $$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} \right),$$
   >
   > toutes les sommes intervenant dans cette égalité étant des sommes de séries convergentes.

   On choisit de commencer par sommer suivant k (car ça fait apparaitre une formule du binôme).

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixés, la série $\sum\limits_{k\geq 0} |p_{k,n}| = \sum\limits_{k\geq 0} p_{k,n}$ est en fait finie (car $p_{k,n} = 0$ si $k > n$), donc converge. De plus on a :

   $$\sum_{k=0}^{+\infty} p_{k,n} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k(1-p)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}(1+(1-p))^n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

   - La série $\sum\limits_{n\geq 0} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ converge, car on reconnait une série exponentielle de paramètre λ.

   Par théorème de Fubini, on obtient que $(p_{k,n})$ est sommable, et on a :

   $$\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} p_{k,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = 1.$$

   D'où le résultat.

2. Déterminons la loi marginale de X. On a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=n, Y=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

Donc X suit une loi $\mathscr{P}(\lambda)$.

De même, on a $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n, Y=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+k} p^k (1-p)^{i}}{k!i!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^i}{i!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Donc Y suit une loi $\mathscr{P}(\lambda p)$.

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, car pour tout $n \geq 0$, $P(X = n) \times P(Y = n+1) \neq 0$, alors que $P(X = n,\ Y = n+1) = 0$.

3. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. On a :

$$P_{[X=n]}(Y=k) = \frac{P(X=n,\ Y=k)}{P(X=n)} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On reconnaît une loi $\mathscr{B}(n,p)$, donc la loi de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

4. Notons qu'on a $X \geq Y$ presque sûrement, et donc $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Soit $\ell \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} P(Z=\ell) &= P(X = Y+\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k+\ell,\ Y=k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\ell+k}p^k(1-p)^{(\ell+k)-k}}{k!((\ell+k)-k)!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^\ell(1-p)^\ell}{\ell!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k p^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!}e^{\lambda p} = e^{-(1-p)\lambda}\frac{(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!} \end{aligned}$$

Donc Z suit une loi $\mathscr{P}((1-p)\lambda)$.

5. Pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$P(Y=k,\ Z=\ell) = P(Y=k,\ X=k+\ell) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\ell+k}p^k(1-p)^\ell}{k!\ell!}.$$

D'autre part, on a :

$$P(Y=k)P(Z=\ell) = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-(1-p)\lambda}\frac{(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{\ell+k}p^k(1-p)^\ell}{k!\ell!} = P(Y=k,\ Z=\ell).$$

Donc les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.

Variables à densité

Exercice 25.14 (★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$, et soit $Y = \dfrac{1}{X}$.

Montrer que Y est une variable à densité et en déterminer une densité.

Étape 1. Ensemble image $Y(\Omega)$.
Puisque X est à valeurs dans $]0,1[$, $Y = \dfrac{1}{X}$ est à valeurs dans $]1,+\infty[$. Pour tout $x \leq 1$, on a donc :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0.$$

Étape 2. Calcul de F_Y.
Supposons à présent $x > 1$. On a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\left(\frac{1}{X} \leq x\right) \underset{X>0}{=} P\left(X \geq \frac{1}{x}\right) \\ &= 1 - P\left(X < \frac{1}{x}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{1}{x}\right) \qquad \text{car } X \text{ à densité} \\ &= 1 - F_X(1/x) = 1 - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

car $1/x \in]0,1[$ et que $F_X(u) = u$ pour tout $u \in]0,1[$. Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$$

Étape 3. Y à densité ?
Pour montrer que Y est à densité, on étudie les points suivants :

- F_Y est continue sur $\mathbb{R}$: elle est clairement continue sur $]-\infty,1]$ et $]1,+\infty[$ comme somme et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Et en 1, on a :

  $$\lim_{x \to 1^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(1) = \lim_{x \to 1^+} F_Y(x).$$

  Donc F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$:

- F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points : c'est bien le cas puisqu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$ comme somme et quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

Ainsi Y est une variable à densité.

Étape 4. Détermination d'une densité de Y.
Pour tout $x \neq 1$:

$$F_Y'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

Une densité de Y est donc :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

en fixant une valeur arbitraire (positive) en 1.

Exercice 25.15 (★★)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y = \ln(e^X - 1)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y.
2. Montrer que Y est une variable à densité, et en déterminer une densité f_Y.
3. Montrer que f_Y est paire.
4. Montrer que $E(Y)$ existe et vaut 0.
5. (a) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulation(n)` prenant en entrée un entier naturel n non nul, et renvoyant n réalisations de la variable Y.

   (b) À l'aide de la fonction `simulation`, écrire une commande renvoyant une estimation de $E(Y)$.

1. **Étape 1. Ensemble image $Y(\Omega)$.**
   Comme $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$, une densité de X est :
   $$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$
   Ainsi $X(\Omega) =]0, +\infty[$, $(e^X - 1)(\Omega) =]0, +\infty[$ également, et $Y(\Omega) = \mathbb{R}$.

   Étape 2. Calcul de F_Y.
   Soit à présent $x \in \mathbb{R}$, on a (par croissance stricte des fonctions exponentielle et logarithme) :
   $$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(\ln(e^X - 1) \leq x) = P(e^X \leq e^x + 1) \\ &= P(X \leq \ln(e^x + 1)) \underset{\ln(e^x+1)>0}{=} 1 - e^{-\ln(e^x+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1}. \end{aligned}$$
   Ainsi la fonction de répartition de Y est $F_Y : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.
2. Commençons par un rappel.

   Rappel. Variable à densité.
   Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On dit que X est une *variable aléatoire à densité* (ou *variable aléatoire continue*) si sa fonction de répartition F_X est de plus :

   - continue sur $\mathbb{R}$;
   - de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre **fini** de points.

   Ici F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas (c'est donc encore plus fort que ce que demande la définition). Donc Y est une variable à densité.

Rappel. Lien fonction de répartition et densité de probabilité.

- $f(x) = F_X'(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $P(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f_X(t)\mathrm{d}t$.

F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Une densité de Y s'obtient en dérivant :

$$f_Y : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

3. f_Y est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle symétrique par rapport à 0, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f_Y(-x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} = \frac{e^{2x}}{e^{2x}}\frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = f(x).$$
Donc f est bien une fonction paire.

4. $E(Y)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Comme $t \mapsto |t f_Y(t)|$ est paire, ceci est équivalent à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |t f_Y(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t\frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,\mathrm{d}t$.

   La fonction $t \mapsto t\dfrac{e^t}{(e^t+1)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Faisons un théorème de comparaison en $+\infty$:

   - $t^3\dfrac{e^t}{(e^t+1)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^3\dfrac{e^t}{e^{2t}} = t^3e^{-t} \to 0$ en $+\infty$. Ainsi on a $t\dfrac{e^t}{(e^t+1)^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   - $\dfrac{1}{t^2} \geq 0$ pour tout $t > 0$.
   - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge en tant qu'intégrale de Riemann en $+\infty$ d'exposant $2 > 1$.

   Par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,dt$ est donc convergente, et $E(Y)$ existe bien.

   Enfin, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto t f_Y(t)$ est impaire. Donc on a $E(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

5. (a) On part de l'expression $Y = \ln(e^X - 1)$, en simulant n réalisations de la variable X à l'aide de la commande `rd.exponential(1/1,n)`, ce qui donne :

```python
def simulation(n):
    x = rd.exponential(1/1,n) # vecteur de taille n
    y = np.log(np.exp(x)-1) # s'applique sur chaque composantes du vecteur
    return y
```

   (b) On peut procéder ainsi :

```python
E = np.mean(simulation(10000))
print(E)
```

Exercice 25.16 (★★ - ✍)

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f nulle sur $]-\infty,0[$ et continue sur $[0,+\infty[$. On note S la fonction définie par $S(t)=P(X>t)$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $A>0$:
$$\int_0^A S(t)\mathrm{d}t = AS(A)+\int_0^A tf(t)\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que si X admet une espérance, alors : $\forall A>0,\ AS(A)\leq \displaystyle\int_A^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$.

   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{d}t$ est convergente et qu'elle est égale à $E(X)$.

3. Inversement, montrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{d}t$ est convergente, alors X admet une espérance et que
$$E(X)=\int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{d}t.$$

1. Tout d'abord, notons que $S(t)=1-F_X(t)$, de sorte que S est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ (puisque f est continue sur $[0,+\infty[$) et telle que $S'(t)=-f(t)$ pour tout $t\geq 0$.

   On effectue une intégration par parties sur le segment $[0,A]$.
$$\begin{array}{c|ccc} + & S(t) & & 1 \\ & & \searrow & \\ - & -f(t) & \xleftarrow{\int} & t \end{array}$$

   Les fonctions S et $t\mapsto t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,A]$. On obtient par intégration par parties :
$$\int_0^A S(t)\mathrm{d}t = AS(A)+\int_0^A tf(t)\mathrm{d}t.$$

2. Supposons que X admette une espérance, c'est à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge puisque la fonction intégrée est positive. On a pour tout $A>0$:
$$\begin{aligned}\int_A^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t &\geq \int_A^{+\infty} Af(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } f \text{ positive}\\ &\geq A\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = A\left(1-\int_{-\infty}^A f(t)\,\mathrm{d}t\right) = A(1-F(A)) = AS(A)\end{aligned}$$

   On obtient donc pour tout $A>0$, l'encadrement suivant :
$$0\leq AS(A)\leq \int_A^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ étant convergente, on en déduit que $\lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{A\to+\infty} AS(A) = 0$. En reprenant l'égalité de la question 1., on obtient donc que $\lim_{A\to+\infty} AS(A) + \int_0^A tf(t)\mathrm{d}t$ existe et vaut $E(X)$. Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{d}t$ est convergente et est égale à $E(X)$.

3. On suppose inversement que $\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $S(t) = P(X > t) \geq 0$ de sorte qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^A S(t)\mathrm{d}t = AS(A) + \int_0^A tf(t)\mathrm{d}t \geq \int_0^A tf(t)\mathrm{d}t.$$

La fonction $A \mapsto \int_0^A tf(t)\mathrm{d}t$ est donc croissante (car $t \mapsto tf(t)$ est positive sur $\mathbb{R}_+$) et majorée. Elle admet donc une limite finie en $+\infty$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge absolument (car la fonction intégrée est positive). Ainsi $E(X)$ existe.

On peut enfin appliqué le résultat prouvé à la question précédente, de sorte qu'on a bien $E(X) = \int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 25.17 (★★★ - QSP HEC 2009)

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de loi uniforme sur $]0,1]$, et soit $q \in]0,1]$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X = 1 + \left\lfloor \frac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

2. À l'aide de la fonction `rd.random()`, écrire une fonction d'en-tête `def simulation(p)` prenant en paramètre d'entrée un réel $p \in]0,1[$ et renvoyant une réalisation d'une variable $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

1. Tout d'abord, notons que $\frac{\ln(U)}{\ln(q)} \geq 0$, donc $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et X est une variable aléatoire discrète. Soit donc $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P\left(1 + \left\lfloor \frac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor = k\right) = P\left(\left\lfloor \frac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor = k-1\right) \\ &= P\left(k-1 \leq \frac{\ln U}{\ln q} < k\right) \quad \text{par définition de la fonction partie entière} \\ &= P\left(k\ln(q) < \ln U \leq (k-1)\ln(q)\right) \quad \text{car } \ln(q) < 0 \\ &= P\left(e^{k\ln(q)} < U \leq e^{(k-1)\ln(q)}\right) \quad \text{car exp croissante} \\ &= F_U(e^{(k-1)\ln(q)}) - F_U(e^{k\ln(q)}) \end{aligned}$$

Enfin puisque $\ln(q) < 0$, on a $e^{k\ln(q)}, e^{(k-1)\ln(q)} \in [0,1]$ et donc :

$$P(X = k) = e^{(k-1)\ln(q)}) - e^{k\ln(q)} = q^{k-1} - q^k = q^{k-1}(1-q).$$

Ainsi X suit une loi géométrique de paramètre $1-q$.

2. En utilisant la question précédente, on peut utiliser la fonction suivante :

```python
def simulation(p):
    u = rd.random()
    x = 1 + np.floor(np.log(u)/np.log(1-p))
    return x
```

Exercice 25.18 (★★★★ - QSP HEC 2018)

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Dans cet exercice, X est une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit N la variable aléatoire prenant pour valeur le plus petit entier n tel que $[X \leq n]$ est réalisé, c'est-à-dire que : $\forall \omega \in \Omega,\ N(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N},\ X(\omega) \leq n\}$. Déterminer la loi de N.

2. Soit M la variable aléatoire prenant pour valeur le plus grand entier n tel que $[X \geq n]$ est réalisé. Montrer que N et $M + 1$ sont de même loi.

3. Donner une simulation en `Python` de la variable aléatoire M pour une valeur de λ entrée par l'utilisateur.

1. Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, on a $X > 0$ et donc $N(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$[N = k] = [X \leq k] \cap \overline{[X \leq k-1]} = [X \leq k] \cap [X > k-1] = [k-1 < X \leq k].$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} P(N = k) &= P(k-1 < X \leq k) = P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = (1 - e^{-\lambda k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = (e^{-\lambda})^{k-1}(1 - e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

Ainsi N suit une loi géométrique de paramètre $(1 - e^{-\lambda})$.

2. On pose $T = M + 1$. Puisque $X > 0$, on a $M(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et donc $T \subset \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$[M = k] = [X \geq k] \cap \overline{[X \geq k+1]} = [X \geq k] \cap [X < k+1] = [k \leq X < k+1]$$

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P(M = k-1) = P(k-1 \leq X < k) \\ &= P(k-1 < X \leq k) \quad \text{car } X \text{ à densité} \\ &= F_X(k) - F_X(k-1) = (1 - e^{-k\lambda}) - (1 - e^{-(k-1)\lambda}) = (e^{-\lambda})^{k-1}(1 - e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

Ainsi $M + 1$ suit aussi une loi géométrique de paramètre $(1 - e^{-\lambda})$, et est donc de même loi que N.

3. Rappelons que pour simuler une loi $\mathscr{E}(\lambda)$, on utilise la fonction `rd.exponential(1/lbd)`, les deux premiers paramètres correspondant à la taille de la matrice à simuler (où les coefficients sont des réalisations indépendantes de la loi), et le dernier paramètre est l'espérance de la loi $\dfrac{1}{\lambda}$.

Pour rechercher le plus grand entier M tel que $M \leq X$, on fait une boucle « tant que » en testant si $k \leq X$ et en augmentant k de 1 à chaque étape. Lorsque la boucle s'arrête, on a donc :

$$k - 1 \underset{\text{la } (k-1)\text{-ième boucle a eu lieu}}{\leq} X \underset{\text{la } k\text{-ième boucle n'a pas eu lieu}}{\leq} k.$$

On renvoie donc $M = k - 1$.

On propose donc le code suivant :

```
def simulation(lbd):
    X = rd.exponential(1/lbd)
    k = 0
    while k <= X :
        k=k+1
    return(k-1)
```

Couples de variables à densité

Exercice 25.19 (★★)

1. On dit que Z suit la loi exponentielle bilatérale si une densité de Z est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

   (a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de Z.
   (c) (★) Soit Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant la loi exponentielle bilatérale, déterminer une densité de $V = Z_1 + Z_2$.

2. Dans cette question X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la loi $\mathscr{E}(1)$. On pose $W = X - Y$.
   (a) Déterminer une densité de $-Y$.
   (b) Déterminer une densité de W et vérifier que W suit une loi exponentielle bilatérale.
   (c) Déterminer l'espérance de W.
   (d) Écrire une fonction `Python` simulant n réalisations d'une loi exponentielle bilatère. Vérifier numériquement la valeur de l'espérance obtenue à la question précédente.
   (e) On pose $T = |W|$. Déterminer la fonction de répartition de T et vérifier que T suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

1. (a) La fonction f est bien positive sur $\mathbb{R}$, et continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. De plus f est paire. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. Et c'est bien le cas puisqu'on reconnait ici la densité de la loi $\mathscr{E}(1)$. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

   Donc f est bien une densité de probabilité.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a deux cas à distinguer :

- $x \leq 0$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^t\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{2}\left[e^t\right]_A^x \\ &= \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^A) = \frac{e^x}{2} \end{aligned}$$

- $x > 0$. Dans ce cas, on obtient :

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\underset{\text{calcul préc.}}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - \frac{e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$F_Z : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{e^{-x}}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

(c) Z_1 et Z_2 sont indépendantes, et f_{Z_1} (ou f_{Z_2}) est bornée (par $\frac{1}{2}$). Donc la variable $V = Z_1 + Z_2$ est à densité, de densité (continue sur $\mathbb{R}$) égale à :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}e^{-|x-t|}\,\mathrm{d}t.$$

Il faut pour calculer cette intégrale, pouvoir se « débarrasser » des valeurs absolues. On a pour cela deux cas à distinguer :

- si $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} 4h(x) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-|t|}e^{-|x-t|}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} e^{-|t|}e^{-|x-t|}\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{+\infty} e^{-|t|}e^{-|x-t|}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{t}e^{-(x-t)}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} e^{-t}e^{-(x-t)}\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{+\infty} e^{-t}e^{(x-t)}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-x}\int_{-\infty}^{0} e^{2t}\,\mathrm{d}t + e^{-x}\int_0^x 1\,\mathrm{d}t + e^x\int_x^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-x}\times\lim_{A\to-\infty}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_A^0 + xe^{-x} + e^x\times\lim_{B\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_x^B \\ &= \frac{1}{2}e^{-x} + xe^{-x} + e^x\frac{1}{2}e^{-2x} = xe^{-x} + e^{-x} \end{aligned}$$

- si $x < 0$, on a :

$$\begin{aligned} 4h(x) &= \int_{-\infty}^{x} e^{-|t|}e^{-|x-t|}\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{0} e^{-|t|}e^{-|x-t|}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} e^{-|t|}e^{-|x-t|}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{x} e^{t}e^{-(x-t)}\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{0} e^{t}e^{(x-t)}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} e^{-t}e^{(x-t)}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{2t}\,\mathrm{d}t + e^{x}\int_x^0 1\,\mathrm{d}t + e^x\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-x}\times\lim_{A\to-\infty}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_A^x - xe^{x} + e^x\times\lim_{B\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^B \\ &= \frac{1}{2}e^{x} - xe^{x} + e^x\frac{1}{2} = -xe^{x} + e^{x} \end{aligned}$$

On obtient donc finalement que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{4}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{1-x}{4}e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \frac{1+|x|}{4}e^{-|x|}.$$

2. (a) Posons $U = -Y$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_U(x) &= P(U \leq x) = P(-Y \leq x) = P(Y \geq -x) \\ &= 1 - P(Y < -x) = 1 - P(Y \leq -x) \quad \text{car } Y \text{ à densité} \\ &= \begin{cases} 1-(1-e^x) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

F_U est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 où on a :

$$\lim_{x\to 0^+} F_U(x) = 1 = F_U(0) = \lim_{x \to 0^-} F_U(x).$$

Donc F_U est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Donc U est une variable à densité. On a pour tout $x \neq 0$:

$$F_U'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

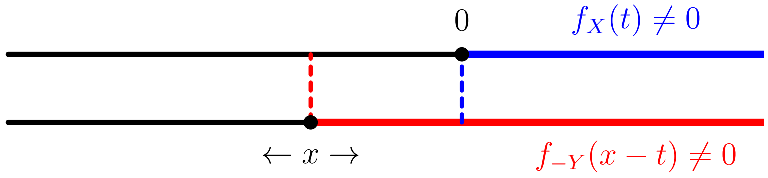
Une densité de $U = -Y$ est donc :

$$f_U(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(b) Puisque X et Y sont indépendantes, X et $-Y$ le sont par le lemme de coalitions. De plus f_X (ou f_{-Y}) est bornée. Donc $W = X - Y$ est à densité, de densité (continue sur $\mathbb{R}$) égale à :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_{-Y}(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

On a $f_{-Y}(x-t) \neq 0$ si et seulement si $x - t \leq 0$, soit si et seulement si $x \leq t$.



On a deux cas à considérer.

- Si $x \leq 0$, alors $f_X(t)f_{-Y}(x-t) \neq 0$ si et seulement si $t \geq 0$. On obtient :

$$h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{x-t}\,\mathrm{d}t = e^x \int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t = e^x \lim_{B\to+\infty}\left[-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^B = \frac{e^x}{2}$$

  par les calculs déjà effectués.
- Si $x > 0$, alors $f_X(t)f_{-Y}(x-t) \neq 0$ si et seulement si $t \geq x$. On obtient :

$$h(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t}e^{x-t}\,\mathrm{d}t = e^x \int_x^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t = e^x \lim_{B\to+\infty}\left[-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_x^B = \frac{e^{-x}}{2}.$$

Une densité de W est donc donnée par :

$$h(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

Ainsi W suit une loi exponentielle bilatère.

(c) Par linéarité, W admet une espérance et on a :

$$E(W) = E(X) - E(Y) = 1 - 1 = 0.$$

(d) On utilise le code suivant :

```
def simulation(n):
        X = rd.exponential(1/1,n)
        Y = rd.exponential(1/1,n)
        return(X-Y)
```

Pour vérifier numériquement la valeur de l'espérance, on peut utiliser la commande :

```
--> np.mean(simulation(100000))
```

On obtient `0.0033696` comme résultat, ce qui confirme bien la valeur de l'espérance obtenue.

(e) Soit $T = |W|$ et $x \in \mathbb{R}$. On a $F_T(x) = P(|W| \leq x) = 0$ si $x < 0$. Supposons $x \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} F_T(x) &= P(|W| \leq x) = P(-x \leq W \leq x) = P(W \leq x) - P(W < -x) \\ &= P(W \leq x) - P(W \leq -x) \quad \text{car } W \text{ à densité} \\ &= 1 - \frac{e^{-x}}{2} - \frac{e^{(-x)}}{2}) = 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

Donc T suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 25.20 (★★★)

Pour tout $a > 0$, on définit la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par $f_a(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{t^{a+1}} \text{ si } t \geq 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.

1. Montrer que f_a est une densité de probabilité.
2. Soient a, b deux réels distincts strictement positifs, et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_a et f_b.
   (a) Déterminer les lois de $\ln(X)$ et $\ln(Y)$.
   (b) Déterminer une densité de $\ln(X) + \ln(Y)$.
   (c) Soit $Z = XY$. Montrer que Z est une variable à densité, et en donner une densité.

1. La fonction f est bien positive sur $\mathbb{R}$ et continue sauf éventuellement en 1. On étudie la convergence et le calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{a}{t^{a+1}}\,\mathrm{d}t$. f_a étant continue sur $[1, +\infty[$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Soit $A > 1$, on a :

$$\int_1^A a t^{-a-1}\,\mathrm{d}t = \left[a\frac{t^{-a}}{-a} \right]_1^A = 1 - \frac{1}{A^a}.$$

Comme $a > 0$, on a $\lim\limits_{A \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{A^a} = 1$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

On peut donc conclure que f_a est une densité de probabilité.

2. (a) Posons $U = \ln(X)$. X est à valeurs dans $[1, +\infty[$, donc U est à valeurs dans $[0, +\infty[$, de sorte que :

$$P(U \leq x) = 0 \quad \text{pour tout } x < 0.$$

Supposons $x \geq 0$. On a :

$$F_U(x) = P(U \leq x) = P(\ln(X) \leq x) \underset{\text{exp. croiss.}}{=} P(X \leq e^x) = F_X(e^x).$$

On obtient donc :

$$F_U : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} F_X(e^x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

X étant à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 1 (car f_a est discontinue en 1). Par composition, F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 0 (car $e^0 = 1$ et F_X est $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 1), et on a pour tout $x > 0$:

$$F_U'(x) = e^x F_X'(e^x) = e^x \frac{a}{e^{(a+1)x}} = ae^{-ax}.$$

Ainsi une densité de U est donc (avec un choix arbitraire de la valeur en 0) :

$$f_U(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc $U = \ln(X)$ suit une loi $\mathscr{E}(a)$. De même, on montre que $V = \ln(Y)$ suit une loi $\mathscr{E}(b)$.

Remarque. On pouvait aussi déterminer la fonction de répartition de X à partir de la densité. On obtient (après calcul) :

$$F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^a} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

D'où en substituant, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_U(x) = F_X(e^x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{(e^x)^a} & \text{si } e^x \geq 1 \\ 0 & \text{si } e^x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

On reconnait ici la fonction de répartition d'une loi $\mathscr{E}(a)$, et on retrouve ainsi que $U \hookrightarrow \mathscr{E}(a)$.

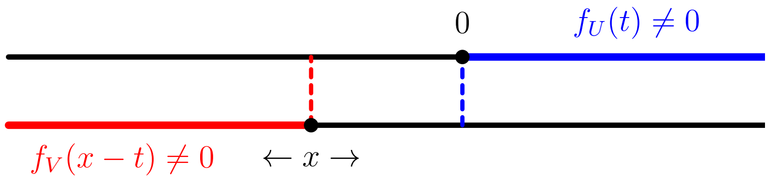
(b) Par lemme de coalition, on a que U et V sont indépendantes puisque X et Y le sont. De plus f_U (ou f_V) est bornée. On peut donc conclure du cours que $U + V$ est une variable à densité, et qu'une densité de $U + V$ est donnée par la fonction (continue sur $\mathbb{R}$) :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x - t)\,\mathrm{d}t.$$

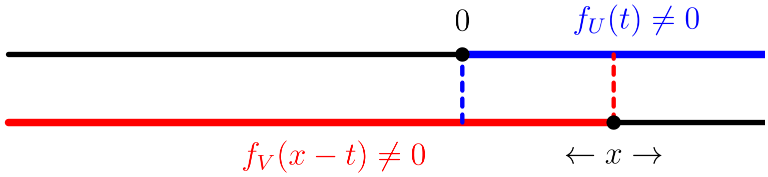
Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ ae^{-at} & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_V(x-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x-t \leq 0 \\ be^{-b(x-t)} & \text{si } x-t > 0 \end{cases}.$$

En particulier on a $f_U(t) \neq 0$ si et seulement si $t > 0$ et $f_V(x-t) \neq 0$ si et seulement si $x - t > 0$, soit encore $t < x$.



Si $x \leq 0$, on a $f_U(t)f_V(x-t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (c'est la situation représentée ci-dessus) et donc $h(x) = 0$.



Si $x > 0$. Alors $f_U(t)f_V(x-t) \neq 0$ si $t \in [0, x]$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x f_U(t)f_V(x-t)\mathrm{d}t = ab\int_0^x e^{-at}e^{-b(x-t)}\mathrm{d}t = abe^{-bx}\int_0^x e^{-(a-b)t}\,\mathrm{d}t \\ &= abe^{-bx}\left[-\frac{e^{-(a-b)t}}{a-b}\right]_0^x = \frac{ab}{a-b}(e^{-bx} - e^{-ax}) \end{aligned}$$

Finalement, on obtient que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{ab}{a-b}(e^{-bx} - e^{-ax}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

(c) Z est à valeurs dans $[1, +\infty[$ puisque X et Y le sont, de sorte que pour tout $x < 1$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = 0$. Soit $x \geq 1$, on a :

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) \underset{\text{ln croiss.}}{=} P(\ln(XY) \leq \ln(x)) = P(U + V \leq \ln(x)) = F_{U+V}(\ln(x))$$

Or on a montré à la question précédente que $U + V$ est à densité. Donc F_{U+V} est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 (car h est continue sauf éventuellement en 0). Par composition, F_Z est continue sur $[1, +\infty[$ et sur $]-\infty, 1[$. De plus en 1, on a :

$$\lim_{x \to 1^-} F_Z(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^+} F_Z(x) = F_{U+V}(0) = \int_0^0 h(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 1. Donc Z est une variable à densité. De plus pour tout $x > 1$, on a :

$$\begin{aligned} F_Z'(x) &= \frac{1}{x}F_{U+V}'(\ln(x)) = \frac{ab}{x(a-b)}(e^{-b\ln(x)} - e^{-a\ln(x)}) = \frac{ab}{x(a-b)}\left(\frac{1}{x^b} - \frac{1}{x^a}\right) \\ &= \frac{ab}{a-b}\left(\frac{1}{x^{b+1}} - \frac{1}{x^{a+1}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi une densité de Z est (en prenant la valeur 0 arbitrairement en 1) :

$$f_Z : x \mapsto \begin{cases} \frac{ab}{a-b}\left(\frac{1}{x^{b+1}} - \frac{1}{x^{a+1}}\right) & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Vecteurs aléatoires

Exercice 25.21 (★)

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On note $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$.
Déterminer la loi de Z ainsi que son espérance si elle existe.

Commençons par un rappel.

Rappel. Loi d'un minimum.
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Posons $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[Z > x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x].$$

De plus, si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors :

$$1 - F_Z(x) = \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(x)).$$

Pour une variable **discrète** X à valeur dans $\mathbb{Z}$, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k).$$

Notons pour commencer que $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et donc que Z est une variable discrète. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} P(Z > k) &= P(X_1 > k, \dots, X_n > k) = P(X_1 > k) \dots P(X_n > k) \quad \text{par indépendance} \\ &= P(X_1 > k)^n \quad \text{car les variables sont de même loi} \end{aligned}$$

Or on a[a] :

$$P(X_1 > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X_1 = i) = p \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} = p \underbrace{(1-p)^k}_{\text{premier terme}} \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k.$$

En substituant, on obtient :

$$P(Z > k) = (1-p)^{nk}$$

Notons que cette égalité est aussi valable pour $k = 0$, car alors $P(Z > 0) = 1$.

Reste à obtenir les probabilités ponctuelles. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(Z = k) = P(Z > k-1) - P(Z > k) = (1-p)^{n(k-1)} - (1-p)^{nk} = (1-p)^{n(k-1)}\left(1-(1-p)^n\right) = (1-q)^{k-1}$$

en posant $q = 1-(1-p)^n$. Ainsi Z suit une loi géométrique $\mathscr{G}(q)$. En particulier Z admet une espérance (et une variance aussi) et on a :

$$E(Z) = \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1-q}{q^2}.$$

[a] On aurait pu obtenir ce résultat d'une autre manière : $[X_1 > k]$ correspond à obtenir le premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli au rang $k+1$ ou plus, et donc à obtenir k échecs sur les k premières épreuves de Bernoulli. Or la probabilité d'un tel évènement est $(1-p)^k$.

Exercice 25.22 (★★ - Loi de Weibull)
Soient a et b deux réels strictement positifs. Soit la fonction $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X, et donner une densité f de X.

   On dit alors que X suit la loi de Weibull de paramètres a et b, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{W}(a, b)$.

2. Si $a = 1$, quelle est la loi de X ?

3. Déterminer la loi de X^a.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que X admet un moment d'ordre k et que $E(X^k) = b^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{a}\right)$.

   On pourra utiliser le changement de variable $t = \left(\frac{x}{b}\right)^a$.

   En déduire l'espérance et la variance de X.

5. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi $\mathscr{W}(a, b)$, et soit $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que Y_n suit encore une loi de Weibull dont un précisera les paramètres.

1. Notons ici qu'on ne sait rien sur la fonction F : on ne sait pas si c'est une fonction de répartition d'une variable réelle. On a donc cinq points à vérifier.

Rappel. Fonction de répartition d'une variable réelle.

$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X si et seulement si elle satisfait les points suivants :

(i) F est croissante sur $\mathbb{R}$;

(ii) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$;

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

F est la fonction de répartition d'une variable **à densité** X si de plus :

(iv) F est continue sur $\mathbb{R}$;

(v) F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre **fini** de points.

Pour vérifier ces cinq points, on aura besoin de quelques rappels sur les fonctions puissances.

Rappel. Fonctions puissances.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle *fonction puissance d'exposant* α la fonction p_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

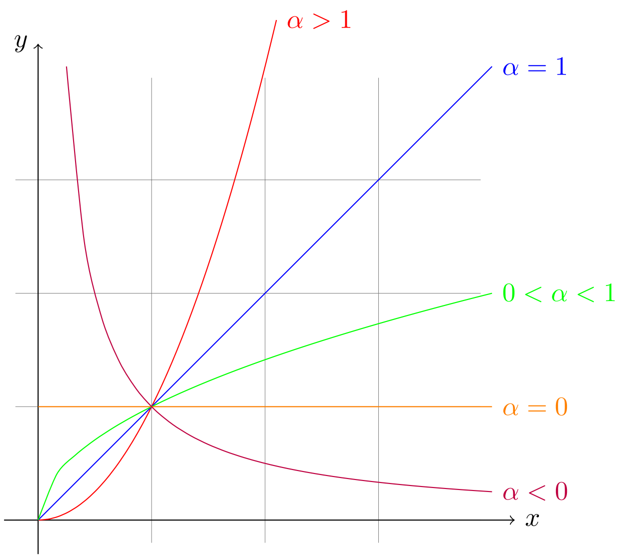
$$p_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La fonction puissance d'exposant α est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

- Si $\alpha > 0$, la fonction p_α peut être prolongée par continuité en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$.
- Si $0 < \alpha < 1$, p_α n'est pas dérivable en 0, et sa courbe représentative admet une tangente verticale en 0.
- Si $\alpha > 1$, p_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $p'_\alpha(0) = 0$.

On retiendra les différentes allures de la courbe représentative de p_α selon la valeur de α.



Montrons donc que F est la fonction de répartition d'une variable à densité :

(ii) et (iv) F est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions qui le sont. De plus, on a (puisque $a > 0$) :

$$\lim_{x\to 0^+} 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} = 1 - 1 = 0 = F(0) = \lim_{x\to 0^-} F(x).$$

Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

(iii) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ (car $a, b > 0$).

(v) F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, et on a :

$$\forall x < 0, \quad F'(x) = 0$$

et

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = a \times \frac{1}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} \times e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a}.$$

(i) Comme $F'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et que F est continue, F est bien croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi F est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité. De plus, une densité de X est (en choisissant une valeur arbitraire en 0) :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{a}{b}\left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} \times e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^a} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$

2. Si $a = 1$, on reconnait la fonction de répartition d'une loi $\mathscr{E}\left(\frac{1}{b}\right)$. X suit donc une loi $\mathscr{E}\left(\frac{1}{b}\right)$.

3. Posons $Y = X^a$. Comme $f \neq 0$ sur $]0, +\infty[$, on a $X(\Omega) =]0, +\infty[$. En particulier, Y est bien définie et on a également $Y(\Omega) =]0, +\infty[$. En particulier, on a :

$$\forall x \leq 0, \quad F_Y(x) = 0.$$

Supposons à présent $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(X^a \leq x) = P(X \leq x^{\frac{1}{a}} \qquad \text{par croiss. de } x \mapsto x^{\frac{1}{a}} \\ &= 1 - e^{-\frac{x}{b^a}}. \end{aligned}$$

On reconnait ici la fonction de répartition de la loi $\mathscr{E}\left(\frac{1}{b^a}\right)$. Donc X^a suit la loi $\mathscr{E}\left(\frac{1}{b^a}\right)$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. X admet un moment d'ordre k si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^k \frac{a}{b}\left(\frac{t}{b}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^a}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge car la fonction intégrée est positive.

Effectuons le changement de variables $u = \left(\frac{t}{b}\right)^a$, ce qui se réécrit $t = bu^{\frac{1}{a}}$. La fonction $\varphi : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \left(\frac{t}{b}\right)^a$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions qui le sont, et est strictement croissante car $a, b > 0$. Le changement de variables est donc licite. De plus, on a $\mathrm{d}u = \frac{a}{b}\left(\frac{t}{b}\right)^{a-1}\,\mathrm{d}t$. Lorsque $t : 0 \to +\infty$, on a $u : 0 \to +\infty$.

Par le théorème de changement de variables, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\left(\frac{t}{b}\right)^a}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} b^k u^{\frac{k}{a}} e^{-u}du = b^k \int_0^{+\infty} u^{\left(\frac{k}{a}+1\right)-1} e^{-u}du$ sont de même nature. Or on reconnait pour la deuxième l'intégrale $\Gamma\left(\dfrac{k}{a}+1\right)$ qui converge car $\dfrac{k}{a}+1>0$.

Ainsi $E(X^k)$ existe et on a :

$$E(X^k) = b^k\Gamma\left(\frac{k}{a}+1\right).$$

En particulier, on a pour $k=1$ et $k=2$:

$$E(X) = b\Gamma\left(\frac{1}{a}+1\right) \qquad \text{et} \qquad E(X^2) = b^2\Gamma\left(\frac{2}{a}+1\right)$$

et donc par la formule de Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = b^2\left(\Gamma\left(\frac{2}{a}+1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{a}+1\right)^2\right).$$

5. Notons tout d'abord que $Y_n(\Omega) =]0,+\infty[$, de sorte que :

$$\forall x \leq 0, \quad F_{Y_n}(x) = 0.$$

Soit $x>0$, on a :

$$P(Y_n > x) = P(X_1 > x, \ldots, X_n > x) = P(X_1 > x)^n \quad \text{car les } X_i \text{ sont i.i.d.}$$

de sorte que :

$$1 - F_{Y_n}(x) = (1-F(x))^n \underbrace{=}_{x>0} e^{-n\left(\frac{x}{b}\right)^a}.$$

Ainsi on a :

$$F_{Y_n} : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{b/n^{\frac{1}{a}}}\right)^a} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

On reconnait ici la fonction de répartition d'une loi $\mathscr{W}\left(a, \dfrac{b}{n^{\frac{1}{a}}}\right)$.

Exercice 25.23 (★★★)

Soient $N \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un sac contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise d'une boule, et on note Z_n le plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de Z_n.
2. Montrer que $E(Z_n) = N - \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n$.
3. Montrer que $E(Z_n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{nN}{n+1}$.

1. On a déjà $Z_n(\Omega) = [\![1,N]\!]$. On a pour tout $k \in [\![1,N]\!]$:

$$P(Z_n \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Cette formule est encore valable pour $k=0$. D'où :

$$P(Z_n=k)=P(Z_n\leq k)-P(Z_n\leq k-1)=\left(\frac{k}{N}\right)^n-\left(\frac{k-1}{N}\right)^n.$$

2. L'espérance existe car la variable est finie. On a :

$$\begin{aligned}E(Z_n)&=\sum_{k=1}^{N}k\left(\frac{k}{N}\right)^n-k\left(\frac{k-1}{N}\right)^n=\sum_{k=1}^{N}k\left(\frac{k}{N}\right)^n-(k-1)\left(\frac{k-1}{N}\right)^n-\left(\frac{k-1}{N}\right)^n\\&=\sum_{k=1}^{N}\frac{k^{n+1}}{N^n}-\frac{(k-1)^{n+1}}{N^n}-\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k-1}{N}\right)^n=N-\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\end{aligned}$$

3. On a en factorisant :

$$E(Z_n)=N\left(1-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\right).$$

On reconnait la somme de Riemann de $f(x)=x^n$ sur $[0,1]$. Comme f est continue, on obtient que :

$$\lim_{N\to+\infty}1-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

D'où le résultat voulu.

Exercice 25.24 (★★★ - QSP HEC)

Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Déterminer une densité de $-\max(X_1,\dots,X_k)$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.
2. En déduire $P([X_n\geq X_1]\cap[X_n\geq X_2]\cap\dots\cap[X_n\geq X_{n-1}])$.

1. Pour $k\in[\![1,n]\!]$, posons $Y_k=\max(X_1,\dots,X_k)$.

Commençons par déterminer la fonction de répartition de Y_k. On a $Y_k(\Omega)=[0,1]$, donc en particulier :

$$F_{Y_k}(x)=0\quad\text{si}\quad x<0\quad\text{et}\quad F_{Y_k}(x)=1\quad\text{si}\quad x>1.$$

Pour $x\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}P(Y_k\leq x)&=P(X_1\leq x)^k\quad\text{car les variables sont i.i.d.}\\&=x^k.\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$F_{Y_k}:x\in\mathbb{R}\mapsto\begin{cases}0&\text{si } x<0\\x^k&\text{si } 0\leq x\leq 1\\1&\text{si } x>1\end{cases}.$$

Cette fonction (qui est une fonction de répartition d'une variable aléatoire, on le sait !) est continue sur $\mathbb{R}$, même en 1 et en 0 comme on le vérifie facilement. Elle est de plus $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1. Donc Y_k est une variable à densité, une densité de Y_k étant (en prenant des valeurs arbitraires en 0 et 1) :

$$f_k:t\in\mathbb{R}\mapsto\begin{cases}0&\text{si } t<0\\kt^{k-1}&\text{si } 0\leq t\leq 1\\0&\text{si } t>1\end{cases}.$$

Posons à présent $Z_k = -Y_k$. $Z_k = aY_k + b$ (avec $a = -1$ et $b = 0$) est une variable à densité en tant que transformation affine d'une variable à densité, et une densité g_k de Z_k est pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g_k(t) &= \frac{1}{|a|} f_k\left(\frac{t-b}{a}\right) = f_k(-t) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } (-t) < 0 \\ k(-t)^{k-1} & \text{si } 0 \leq (-t) \leq 1 \\ 0 & \text{si } (-t) > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t > 00 \\ k(-t)^{k-1} & \text{si } \; -1 \leq t \leq 0 \\ 0 & \text{si } t < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

2. On a :

$$P([X_n \geq X_1] \cap [X_n \geq X_2] \cap \cdots \cap [X_n \geq X_{n-1}]) = P(X_n \geq Y_{n-1}) = P(X_n + Z_{n-1} \geq 0)$$

Par le lemme de coalition, les variables X_n et $Z_{n-1} = -\max(X_1, \ldots, X_{n-1})$ sont indépendantes. De plus, la densité $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est bornée (de même que g_k d'ailleurs). On sait par le cours que $T = X_n + Z_{n-1}$ est à densité, de densité h définie et continue sur $\mathbb{R}$ donnée par :

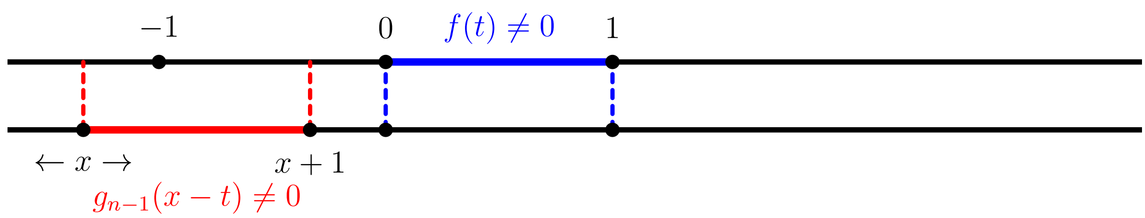
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_{n-1}(x-t) \, dt.$$

On a $f(t) \neq 0$ sur $[0,1]$ et pour $x \in \mathbb{R}$ fixé :

$$g_{n-1}(x-t) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x - t \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t - 1 \leq x \leq t \quad \Leftrightarrow \quad x \leq t \leq x + 1.$$

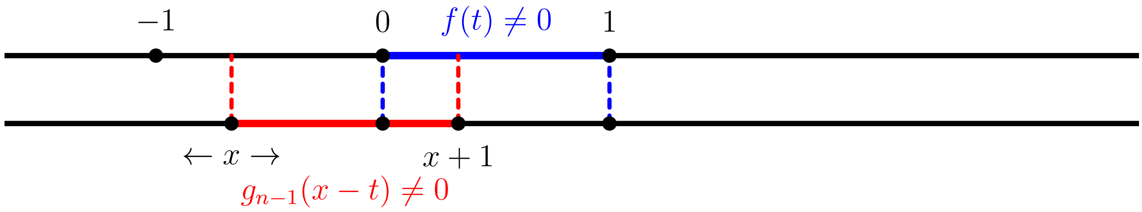
On a différents cas à considérer :

- si $x + 1 < 0$, soit si $x < -1$, on est dans la situation suivante :



  Dans ce cas, on a $h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \, dt = 0$.

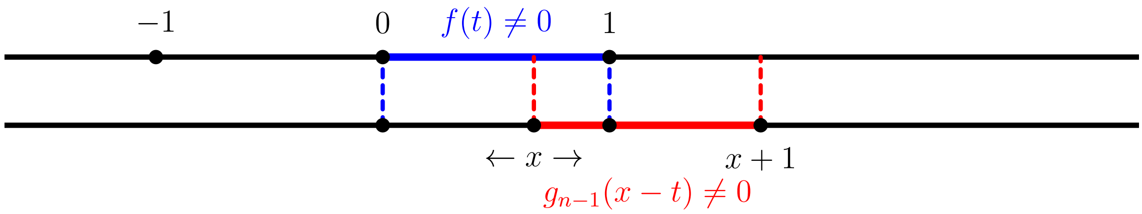
- si $0 \leq x + 1 \leq 1$, soit si $-1 \leq x \leq 0$, alors $f(t) g_{n-1}(x-t) \neq 0$ sur $[0, x+1]$



On a dans ce cas :

$$h(x) = \int_0^{x+1} (n-1)(t-x)^{n-2}\,\mathrm{d}t = \Big[(t-x)^{n-1}\Big]_0^{x+1} = 1-(-x)^{n-1}.$$

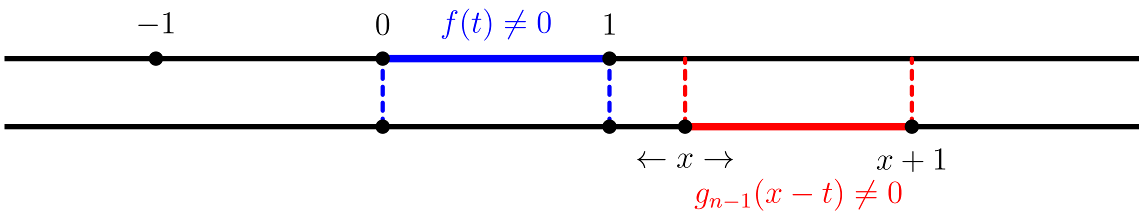
- si $0 \leq x \leq 1$, alors $f(t)g(x-t) \neq 0$ sur $[x,1]$.



On a alors :

$$h(x) = \int_x^1 (n-1)(t-x)^{n-2}\,\mathrm{d}t = \Big[(t-x)^{n-1}\Big]_x^1 = (1-x)^{n-1}.$$

- si $x > 1$, $f(t)g_{n-1}(x-t) = 0$ et donc $h(x) = 0$.



On peut à présent conclure :

$$\begin{aligned}P([X_n \geq X_1] \cap [X_n \geq X_2] \cap \cdots \cap [X_n \geq X_{n-1}]) &= P(X_n + Z_{n-1} \geq 0) = \int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{n}(1-t)^n\right]_0^1 = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Remarque. Ce résultat est plutôt intuitif : chacune des n variables $X_1, \ldots, X_n$ a la même probabilité d'être plus grande que les autres.

Exercice 25.25 (★★★★ - Oral ESCP 2018)
Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des U_i et X et Y les variables aléatoires définies par:

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} U_i(\omega) \quad \text{et} \quad Y = N - X$$

1. Vérifier que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $\quad P([X = k] \cap [Y = \ell]) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell P(N = k + \ell)$.
2. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
3. On suppose que X et Y sont indépendantes et que N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

   On suppose également que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) \neq 0$ et que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $P(Y = \ell) \neq 0$.

   (a) Vérifier que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, on a:

   $$(k+1)P(X = k+1)P(Y = \ell)(1-p) = (\ell+1)P(X = k)P(Y = \ell+1)p$$

   (b) En déduire la loi suivie par X puis celle suivie par Y.

   (c) Justifier que N suit une loi de Poisson. Préciser son paramètre.

1. L'événement $[X = k \cap Y = \ell]$ est égal à l'événement $[X = k \cap N = k + \ell]$. En utilisant les probabilités conditionnelles, on a:

   $$P([X = k \cap Y = \ell]) = P([X = k \cap N = k + \ell]) = P([X = k | N = k + \ell])P(N = k + \ell)$$

   Or lorsque $N = k + \ell$, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(k + \ell, p)$. Ainsi:

   $$P([X = k \cap Y = \ell]) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell P(N = k + \ell)$$

2. Si $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, il vient :

   $$P([X = k \cap Y = \ell]) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} = p^k (1-p)^\ell e^{-\lambda} \frac{\lambda^k \lambda^\ell}{k!\ell!}$$

   La loi marginale de X se calcule par :

   $$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} P([X = k \cap Y = \ell]) \\ &= p^k\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1-p)^\ell \frac{\lambda^\ell}{\ell!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

   Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$. On montre de la même façon que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}((1-p)\lambda)$.

3. (a) Notons $p_k = P(X = k)$ et $q_\ell = P(Y = \ell)$. On sait que :

   $$p_{k+1} q_\ell = P([X = k + 1] \cap [Y = \ell]) = \binom{k+\ell+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^\ell P(N = k + \ell + 1)$$

$$p_k q_{\ell+1} = P([X = k] \cap [Y = \ell + 1]) = \binom{k + \ell + 1}{k} p^k (1 - p)^{\ell+1} P(N = k + \ell + 1)$$

On termine cette question en remarquant que: $(k+1)\binom{k + \ell + 1}{k + 1} = (\ell+1)\binom{k + \ell + 1}{k}$.

(b) On prend $\ell = 0$ dans la relation précédente. Il vient:

$$p_{k+1} = \frac{1}{k + 1}\frac{pq_1}{(1 - p)q_0}p_k = \alpha\frac{p_k}{k + 1}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a: $p_k = \alpha^k\dfrac{p_0}{k!}$ avec $\alpha = \dfrac{pq_1}{(1 - p)q_0}$.

Or, $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k \Rightarrow p_0 = e^{-\alpha}$. Ainsi X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$.

De façon symétrique, en prenant $k = 0$ dans la relation, il vient:

$$P(Y = \ell + 1) = \frac{p_1(1 - p)}{p_0 p}\frac{P(Y = \ell)}{\ell + 1}$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec $\beta = \dfrac{p_1(1 - p)}{p_0 p}$, on a : $q_\ell = \beta^\ell\dfrac{q_0}{\ell!}$. Or, $1 = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} q_\ell \Rightarrow q_0 = e^{-\beta}$.

Ainsi Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\beta)$.

(c) Par stabilité de la loi de Poisson pour deux variables indépendantes, N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha + \beta)$.

Convergence des variables aléatoires

Exercice 25.26 (★)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires admettant une espérance telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|X_n|) = 0$. Montrer que $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Commençons par quelques rappels.

Rappel. Convergence en probabilité.
On dit qu'une suite de variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X lorsqu'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Pour montrer la convergence en probabilité, on pourra selon les cas :

- commencer par s'assurer que ce n'est pas directement une conséquence de la loi faible des grands nombres ;
- essayer d'utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : si $E(X_n)$ existe et est constante égale à m, et si $V(X_n)$ existe et tend vers 0, alors on montre que $X_n \xrightarrow{P} m$;
- essayer d'utiliser l'inégalité de Markov : si $E(X_n)$ existe et converge vers une constante $m \in \mathbb{R}$, alors on peut essayer de montrer que $X_n \xrightarrow{P} m$;
- si aucune de ces méthodes ne fonctionne, il faudra calculer directement $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$, puis passer à la limite.

Ici, cela ne relève clairement pas de la loi faible des grands nombres. L'hypothèse sur l'espérance devrait vous donner envie d'essayer l'inégalité de Markov, qu'on rappelle aussi.

Rappel. Inégalité de Markov.
Si X est une variable aléatoire **positive** admettant une espérance, alors on a :

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

On l'applique ici : $|X_n|$ est une variable aléatoire positive, admettant une espérance. D'où pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$0 \leq P(|X_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|X_n|)}{\varepsilon}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{E(|X_n|)}{\varepsilon} = 0$, on obtient par théorème des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n| \geq \varepsilon) = 0$. Ce qui signifie, par définition, que $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Exercice 25.27 (★★)

Soit λ un réel strictement positif, et soit, pour tout entier n, X_n une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$. Montrer que $Y_n = \dfrac{X_n - n\lambda}{n}$ converge en probabilité vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Là aussi, cela ne relève pas de la loi faible des grands nombres. Calculons l'espérance et la variance de Y_n pour voir si on pourrait conclure par une inégalité de concentration :

$$E(Y_n) \underset{\text{lin. de } E}{=} \frac{1}{n}E(X_n) - \lambda = \frac{1}{n}(n\lambda) - \lambda = 0$$

et (en utilisant que $V(aX+b) = a^2V(X)$) :

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{1}{n^2}(n\lambda) = \frac{\lambda}{n}.$$

Notons que $E(Y_n)$ est constante indépendante de n, et que $V(Y_n)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, ce qui suggère d'utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Rappel. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Soit X une variable aléatoire admettant une variance. Alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

On en déduit ici que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$0 \leq P(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lambda}{n\varepsilon^2} = 0$, on obtient par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$, et donc que Y_n converge en probabilité vers 0.

Exercice 25.28 (★★)
Soit $N \geq 2$, et soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On pose $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable que l'on précisera.
2. Montrer qu'il s'agit également d'une convergence en probabilité.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $X_k(\Omega) = [\![1, N]\!]$ pour tout $1 \leq k \leq n$, de sorte que $Y_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$. Rappelons comment étudier la convergence en loi dans ce cas.

   Rappel. Convergence en loi pour les variables à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
   Pour étudier la convergence en loi d'une suite (X_n) de variables aléatoires discrètes **toutes à valeurs dans** $\mathbb{Z}$, on procèdera comme suit :

   (i) déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $p_{n,k} = P(X_n = k)$;
   (ii) pour tout $k \in \mathbb{Z}$ **fixé**, étudier la convergence **en** n de la suite de réels $(p_{n,k})$. On note p_k sa limite si elle existe ;
   (iii) vérifier si $(p_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définie une loi de probabilité, c'est à dire :

   - $\forall k \in \mathbb{Z}$, $p_k \geq 0$;
   - la famille $(p_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable[a] et sa somme vaut 1.

   Si ces conditions sont bien vérifiées, alors (X_n) converge en loi vers toute variable aléatoire discrète X de loi $P(X = k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

   [a] Dans le cas de variables à valeurs dans $\mathbb{N}$, cela correspond à montrer la convergence (absolue) de la série $\sum\limits_{k\geq 0} p_k$ et que sa somme vaut 1.

On commence donc par déterminer la loi de Y_n. Soit pour cela $k \in [\![1, N]\!]$, on a :

$$P(Y_n > k) = P(X_1 > k, \dots, X_n > k) = P(X_1 > k)^n$$

car les variables sont i.i.d.. Comme $P(X_1 > k) = \dfrac{N-k}{N}$, on obtient donc :

$$P(Y_n > k) = \left(\frac{N-k}{N}\right)^n,$$

formule qui est encore valable pour $k = 0$. On en déduit la probabilité ponctuelle :

$$p_{n,k} = P(Y_n = k) = P(Y_n > k-1) - P(Y_n > k) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n - \left(\frac{N-k}{N}\right)^n.$$

On étudie à présent la convergence de $(p_{n,k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour tout $k \in [\![1, N]\!]$:

$$p_{n,k} = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n - \left(\frac{N-k}{N}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1-0 & \text{si } k=1 \\ 0-0 & \text{si } 2 \leq k \leq N \end{cases}$$

car pour tout $1 \leq k \leq N$, on a $-1 < \dfrac{N-k}{N} < 1$. Notons donc :

$$\forall k \in [\![1, N]\!], \quad p_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } 2 \leq k \leq N \end{cases}.$$

Vérifions à présent que $(p_k)_{k\in[\![1,N]\!]}$ définit bien une loi de probabilités :

- on a bien $p_k \geq 0$ pour tout $k \in [\![1, N]\!]$;
- $\sum\limits_{1\leq k\leq N} p_k$ converge (c'est une somme finie) et sa somme vaut 1.

On peut donc conclure que (Y_n) converge en loi vers une variable Y satisfaisant :

- $Y(\Omega) = [\![1, N]\!]$;
- $\forall k \in [\![1, N]\!]$, $P(X = k) = p_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } 2 \leq k \leq N \end{cases}$

Ainsi Y est la variable aléatoire certaine égale à 1.

2. On va tenter de montrer que $Y_n \xrightarrow{P} 1$ (si elle converge en probabilité, c'est nécessairement vers 1 puisqu'elle converge déjà en loi vers 1).

   Cela ne relève clairement pas de la loi faible des grands nombres, ni des inégalités de Bienaymé-Tchebychev ou de Markov (ou il faudrait calculer l'espérance et la variance, ce qui n'a pas été demandé au préalable...). On tente donc de revenir à la définition en montrant que :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) = 0.$$

   Fixons donc $\varepsilon > 0$. On a :

$$|Y_n - 1| \geq \varepsilon \underset{Y_n\geq 1}{\Leftrightarrow} Y_n - 1 \geq \varepsilon \Leftrightarrow Y_n \geq 1 + \varepsilon \Rightarrow Y_n > 1.$$

Ainsi on a $[|Y_n - 1| \geq \varepsilon] \subset [Y_n > 1]$, d'où par croissance d'une probabilité :

$$0 \leq P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) \leq P(Y_n > 1) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n.$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{N-1}{N}\right)^n = 0$ car $\frac{N-1}{N} \in]-1, 1[$, on obtient par théorème des gendarmes que $\lim_{n \to +\infty} P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon)$ existe et vaut 0. D'où la convergence en probabilité de (Y_n) vers 1.

Exercice 25.29 (★★)

Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. On note M_n et X_n les variables aléatoires définies par :

$$M_n = \max(U_1, \ldots, U_n) \text{ et } X_n = n(1 - M_n).$$

Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires (X_n).

Exercice 25.30 (★★ - Extrait de EML 2017)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{2}{\pi(1+t^2)} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité.
2. On considère une variable aléatoire X à densité, de densité f.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   (b) La variable X admet-elle une espérance ? une variance ?
3. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à densité, à valeurs strictement positives, mutuellement indépendantes, dont chacune a pour densité f.
   On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$ et $Z_n = \dfrac{n}{M_n}$.
   (a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.
   (b) Justifier que : $\forall u \in]0; +\infty[$, $\text{Arctan}(u) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}$ et que $\text{Arctan}(u) \underset{u \to 0}{\sim} u$.
   (c) Montrer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\forall x \in]0; +\infty[$, $\mathrm{P}(Z_n \leq x) = 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$.
   (d) En déduire que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on reconnaîtra la loi.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$, elle y est positive, elle est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $[0, +\infty[$. Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. f étant continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Prenons $A > 0$, on a :

$$\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[\arctan(t)\right]_0^A = \frac{2}{\pi}\arctan(A)$$

Comme $\lim_{A \to +\infty} \frac{2}{\pi}\arctan(A) = 1$, on en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

Profitons de cet exercice pour faire quelques rappels sur la fonction arctangente.

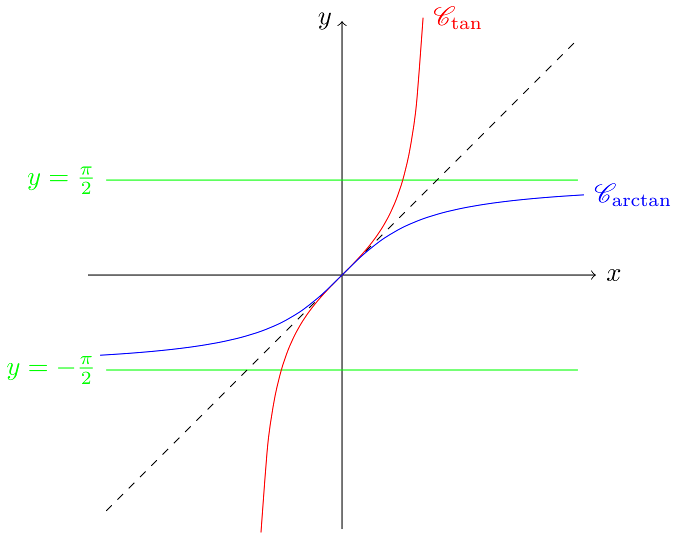
Rappel. Fonction arctangente.

La fonction arctangente est définie comme étant la bijection réciproque de la fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, elle est impaire, de classe $\mathscr{C}^\infty$, et satisfait en particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

En voici le graphe (obtenu à partir de celui de tangente par symétrie par rapport à la première bissectrice du plan) :



Son principal intérêt pour nous réside dans l'obtention de primitives :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \arctan(t) + c.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right) + c. \qquad (a > 0)$$

2. On considère une variable aléatoire X à densité, de densité f.

 (a) Rappelons le lien entre fonction de répartition et densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

 Comme $f \neq 0$ sur $[0, +\infty[$, on a $X(\Omega) = [0, +\infty[$, de sorte que $F_X(x) = 0$ pour tout $x < 0$.

 Pour $x \geq 0$, on a :

$$F_X(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \arctan(x).$$

Ainsi la fonction de répartition de X est :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{\pi}\arctan(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(b) X a une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{\pi(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, donc converge puisque la fonction intégrée est positive. Comme elle est de plus continue sur $[0,+\infty[$, cette intégrale est généralisée en $+\infty$. On a :

- $\frac{2t}{\pi(1+t^2)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi t}$;
- $\frac{2}{\pi t} \geq 0$ pour tout $t > 0$;
- l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 1 \leq 1$).

Par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{\pi(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ diverge donc, et X n'a pas d'espérance. En conséquence, X n'admet pas de moment d'ordre $p \geq 1$, donc pas de variance non plus.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$[M_n \leq x] = [\max(X_1, \cdots, X_n) \leq x] = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x].$$

Par indépendance mutuelle des X_k, on obtient :

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq x) = (F_X(x))^n$$

car les variables suivent la même loi. Notons en particulier que F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf peut-être en 0 (car f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0), de sorte que M_n est une variable à densité.

(b) Considérons la fonction $g : u \in]0,+\infty[\mapsto \arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right)$. La fonction inverse est dérivable sur $]0;+\infty[$ et arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc par composition $u \mapsto \arctan\left(\frac{1}{u}\right)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. Par somme, g est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout $u \in]0;+\infty[$, on a :

$$g'(u) = \frac{1}{1+u^2} + \left(-\frac{1}{u^2}\right) \times \arctan'\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{1+u^2} + \left(-\frac{1}{u^2}\right) \times \frac{1}{1+(1/u)^2} = \frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+u^2} = 0.$$

Donc la fonction g est constante sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Comme de plus $g(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$, on obtient finalement que :

$$\forall u \in]0;+\infty[, \quad \arctan(u) + \arctan\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Pour obtenir l'équivalent de arctan en 0, on va déterminer sont développement limité à l'aide de la formule de Taylor Young qu'on rappelle.

Rappel. Formule de Taylor Young à l'ordre n.
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I.
Alors pour tout $(a, x) \in I^2$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n).$$

On a $\arctan(0) = 0$ et $[\arctan]'(0) = \dfrac{1}{1+0^2} = 1 \neq 0$. Comme on cherche un équivalent, on va conserver le premier terme non nul du DL. On applique donc la formule de Taylor Young à l'ordre $n = 1$ en 0 pour la fonction arctan :

$$\arctan(u) = u + o(u) \underset{u \to 0}{\sim} u.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que $M_n > 0$ presque sûrement, et que Z_n est bien définie et positif presque sûrement. En particulier, on a $P(Z_n \leq x) = 0$ pour tout $x \leq 0$. Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} P(Z_n \leq x) = P\left(\frac{n}{M_n} \leq x\right) &= P\left(\frac{n}{x} \leq M_n\right) = 1 - P\left(M_n < \frac{n}{x}\right) \\ &= 1 - P\left(M_n \leq \frac{n}{x}\right) \quad \text{car } M_n \text{ est à densité} \\ &= 1 - (F_X(n/x))^n = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\arctan(n/x)\right)^n \\ &= 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan(x/n)\right)^n \quad \text{d'après 3.}(b). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(d) Commençons par quelques rappels sur la convergence en loi.

Rappels. Convergence en loi pour des variables qui ne sont pas à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Commençons par rappeler qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers un varible X, ce qu'on note $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$, si pour tout $x \in \mathbb{R}$ **en lequel** F_X **est continue**, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

Pour étudier la convergence en loi d'une suite (X_n) de variables aléatoires **qui ne sont pas à valeurs dans** $\mathbb{Z}$, il faut :

(i) déterminer les fonctions de répartitions F_{X_n} des X_n ;

(ii) fixer $x \in \mathbb{R}$, et étudier la convergence de la suite de réels $(F_{X_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$. On note $F(x)$ sa limite.

(iii) Vérifier si F est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire, c'est-à-dire :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
- F est croissante ;
- F est continue à droite en tout point.

La valeur aux points de discontinuité de F pourra pour cela être rediscutée.

Si ces conditions sont bien vérifiées, alors X_n converge en loi vers toute variable aléatoire de fonction de répartition F.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et $x \in]0;+\infty[$, on a $0 < \arctan\left(\frac{x}{n}\right) < \frac{\pi}{2}$. Ainsi $0 < \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{n}\right) < 1$, et donc $0 < 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{n}\right) < 1$. On peut donc écrire :

$$\left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right).$$

Puisque $\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, on obtient (en utilisant que $\ln(1-u) \underset{u\to0}{\sim} -u$) :

$$\ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2x}{\pi n}$$

car $\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\arctan(v) \underset{v\to0}{\sim} v$. On obtient donc que :

$$n\ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2x}{\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{2x}{\pi}.$$

Ainsi, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} -\frac{2x}{\pi}$. Par composition de cette limite par la fonction exponentielle qui est continue en $-\frac{2x}{\pi}$, on en déduit donc que :

$$\left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-\frac{2x}{\pi}}.$$

Mise en garde.

Attention encore une fois : on peut composer les limites par des fonctions continues. Mais on ne compose pas des équivalents !!

Finalement, on obtient :

$$P(Z_n \leqslant x) \underset{n\to+\infty}{\to} F(x) \quad \text{où} \quad F : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1-e^{-\frac{2}{\pi}x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{2}{\pi}$.

On peut donc conclure que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable suivant une loi exponentielle de paramètre $\frac{2}{\pi}$.

Exercice 25.31 (★★ - QSP ESCP 2021)

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathscr{N}(0,1)$. On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}X_k.$$

Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.

Exercice 25.32 (★★)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant toutes la loi $\mathscr{B}(1/2)$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ existe et déterminer sa valeur.

Exercice 25.33 (★★★ - QSP ESCP 2021)

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\int_{n+\sqrt{n}}^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 25.34 (★★★ - QSP ESCP 2009)

Soit $a > 0$. Pour tout entier $n > a$, on considère X_n une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{a}{n}$. Étudier la convergence en loi de la suite (Y_n) définie par $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

Les Y_n sont des variables aléatoires discrètes, mais **elles ne sont pas à valeurs dans** $\mathbb{N}$. On passe donc par la fonction de répartition de Y_n. On a $X_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et donc :

$$Y_n(\Omega) = \left\{\frac{k}{n},\ k \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Pour $x \leq 0$, on a $F_{Y_n}(x) = 0$. Supposons $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) = P\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = P(X_n \leq nx) \underset{X_n \in \mathbb{N}^*}{=} P(X_n \leq \lfloor nx \rfloor) &= \sum_{k=1}^{\lfloor nx \rfloor} P(X_n = k) \\
= \sum_{k=1}^{\lfloor nx \rfloor} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{k-1} \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \frac{1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor}}{1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)} &= 1 - \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor} \\
= 1 - \exp\left(\lfloor nx \rfloor \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

qui est bien définie pour n suffisamment grand, ce qu'on supposera dans la suite, car alors $1 - \frac{a}{n} > 0$. On a :

$$\lfloor nx \rfloor \leq nx < \lfloor nx \rfloor + 1$$

ce qui se réécrit :

$$nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx.$$

Puisque $\ln\left(1 - \frac{a}{n}\right) < 0$, on obtient par produit :

$$(nx) \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right) \leq \lfloor nx \rfloor < (nx - 1) \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right).$$

On a :

$$(nx - 1) \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} nx \times \left(-\frac{a}{n}\right) = -ax.$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (nx - 1) \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right) = -ax$. On obtient de même que $\lim\limits_{n \to +\infty} nx \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right) = -ax$. Par théorème des gendarmes, on en déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \lfloor nx \rfloor \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right) = -ax.$$

Par composition par l'exponentielle (continue), on obtient :

$$\forall x > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(x) = 1 - e^{-ax}.$$

On reconnait ici la fonction de répartition de la loi $\mathscr{E}(a)$. Ainsi (Y_n) converge en loi vers une variable suivant la loi $\mathscr{E}(a)$.

Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance

Exercice 25.35 (★★ - Estimation du paramètre d'une loi de Gompertz)

Soit $a > 0$. On note $f(x) = ae^{x - ae^x}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité (X suit une *loi de Gompertz* de paramètre a). Quelle est la loi de la variable aléatoire e^X ?

3. On veut estimer le paramètre a d'une loi de Gompertz à l'aide d'un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant cette loi.

   On pose $Y_n = e^{X_1} + e^{X_2} + \cdots + e^{X_n}$.

   (a) Quelle est la loi de Y_n ?

(b) La variable $Z_n = \dfrac{n}{Y_n}$ est-elle un estimateur sans biais et convergent de a ?

1. La fonction f est bien positive sur $\mathbb{R}$ (car exp l'est et $a > 0$) et continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Pour tout $A < B$, on a :

$$\begin{aligned}\int_A^B f(t)\,\mathrm{d}t = \int_A^B ae^{t-ae^t}\,\mathrm{d}t = \int_A^B ae^t e^{-ae^t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-ae^t}\right]_A^B \\ = e^{-ae^A} - e^{-ae^B}\end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{A\to-\infty} e^{-ae^A} = 1$ et $\lim\limits_{B\to+\infty} e^{-ae^B} = 0$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

2. En reprenant le calcul précédent, on obtient la fonction de répartition de X :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-ae^{-x}}.$$

Posons $Z = e^X$. Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}$, on a $Z(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, de sorte que $F_Z(x) = 0$ pour tout $x \leq 0$. Soit $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}F_Z(x) &= P(e^X \leq x) = P(X \leq \ln(x)) \quad \text{par croissance de } \ln \\ &= F_X(\ln(x)) = 1 - e^{-ae^{\ln(x)}} = 1 - e^{-ax}\end{aligned}$$

On reconnait la fonction de répartition de la loi $\mathscr{E}(a)$. Ainsi on a $Z \hookrightarrow \mathscr{E}(a)$.

3. (a) On a ici à faire à la somme de variables aléatoires suivant toutes une loi exponentielle. Rappelons le point de cours à ce sujet.

Rappel. Somme de variables suivant une loi exponentielle.
Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Pour déterminer la loi de la somme $Y = X_1 + \cdots + X_n$ de lois exponentielles, on procèdera comme suit :

(i) On écrit Y sous la forme $Y = \dfrac{1}{\lambda}(\lambda X_1 + \cdots + \lambda X_n)$.

(ii) En se servant de l'équivalence

$$X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda X \hookrightarrow \mathscr{E}(1),$$

on en déduit que $\lambda X_i \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$ pour tout i.

(iii) Comme de plus les λX_i sont mutuellement indépendants (d'après le lemme des coalitions), et suivent toutes la loi $\mathscr{E}(1) = \gamma(1)$, on en déduit que :

$$\lambda X_1 + \cdots + \lambda X_n = \lambda Y \hookrightarrow \gamma(n).$$

(iv) On détermine finalement une densité de Y.

Ici, on a :

$$aY_n = ae^{X_1} + \cdots + ae^{X_n}$$

Les variables X_i étant indépendantes, les ae^{X_i} le sont également par le lemme de coalition. De plus, on a $ae^{X_i} \hookrightarrow \mathscr{E}(1) = \gamma(1)$. Par stabilité de la loi gamma par somme, on en déduit que $T_n = aY_n$ suit une loi $\gamma(n)$, de densité :

$$f_{T_n} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On en déduit une densité de Y_n grâce au rappel suivant.

> **Rappel. Transformation affine d'une variable à densité.**
> Soit X une variable aléatoire continue, et f une densité de X. Alors la variable $Y = aX + b$, avec $a \neq 0$, est aussi une variable à densité, de densité :
> $$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

En effet, $Y_n = \dfrac{1}{a} T_n$ est une variable à densité par transformation affine d'une variable à densité et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{Y_n}(x) = \frac{1}{|1/a|} f\left(\frac{x}{1/a}\right) = \begin{cases} \dfrac{a^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(b) Là aussi, un petit rappel s'impose.

> **Rappel. Biais d'un estimateur.**
> Soit T_n un estimateur de $g(\theta)$ admettant une espérance $E_\theta(T_n)$ pour tout $\theta \in \Theta$.
> - On appelle *biais de T_n en $g(\theta)$* le réel
> $$b_\theta(T_n) = E_\theta(T_n) - g(\theta).$$
> - On dit que T_n est un *estimateur sans biais de $g(\theta)$* lorsque pour tout $\theta \in \Theta$,
> $$b_\theta(T_n) = 0 \text{ ou encore } E_\theta(T_n) = g(\theta).$$
>
>   Dans le cas contraire, on dit que T_n est un estimateur *biaisé*.
> - On dit que T_n est *asymptotiquement sans biais* si pour tout $\theta \in \Theta$:
> $$\lim_{n \to +\infty} b_\theta(T_n) = 0.$$

Posons $Z_n = \dfrac{n}{Y_n}$. Calculons l'espérance de Z_n (afin d'en déduire le biais). Par le théorème de transfert, $E(Z_n)$ existe si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{t} f(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{n}{t} \frac{a^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \,\mathrm{d}t$$

converge absolument, donc converge puisque la fonction intégrée est positive. Effectuons le changement de variable $u = at$ affine donc licite (pour se ramener à une intégrale gamma). On a $\mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}t$ et lorsque $t : 0 \to +\infty$, on a $u : 0 \to +\infty$ car $a > 0$. L'intégrale précédente est donc de même nature que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{na}{u} \frac{a^n}{(n-1)!} (u/a)^{n-1} e^{-u} \frac{\mathrm{d}u}{a} = na \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)\Gamma(n-1)} u^{n-2} e^{-u} \,\mathrm{d}u$$

On reconnait l'expression de l'intégrale $\Gamma(n-1)$ qui converge. Ainsi l'intégrale de départ converge, et donc $E(Z_n)$ existe bien, et vaut :

$$E(Z_n) = \frac{na}{n-1}.$$

On en déduit que Z_n est un estimateur biaisé de a, et asymptotiquement sans biais, puisque :

$$b_a(Z_n) = \frac{na}{n-1} - a = \frac{a}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On étudie maintenant si Z_n est un estimateur convergent de a.

Rappel. Estimateurs convergents.

On dit que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'estimateurs de $g(\theta)$ est *convergente* (ou plus simplement que T_n est un estimateur *convergent* de $g(\theta)$) lorsque pour tout $\theta \in \Theta$, on a :

$$T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P_\theta} g(\theta)$$

soit encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P_\theta(|T_n - g(\theta)| \geq \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme toute convergence en probabilité, commençons par regarder si cela ne relèverait pas de la loi faible des grands nombres. On a :

$$Z_n = \frac{n}{Y_n} \quad \text{avec } \frac{Y_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{X_i}.$$

Les variables e^{X_i} sont indépendantes et suivent toutes la loi $\mathscr{E}(a)$. Elles admettent donc toutes une espérance qui vaut $\frac{1}{a}$ et une variance (qui vaut $\frac{1}{a^2}$). On va donc pouvoir appliquer la loi faible des grands nombres qu'on rappelle.

Rappel. Loi faible des grands nombres.

Hypothèses :
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables **mutuellement indépendantes**.
- Les variables X_n admettent la même espérance m et la même variance.

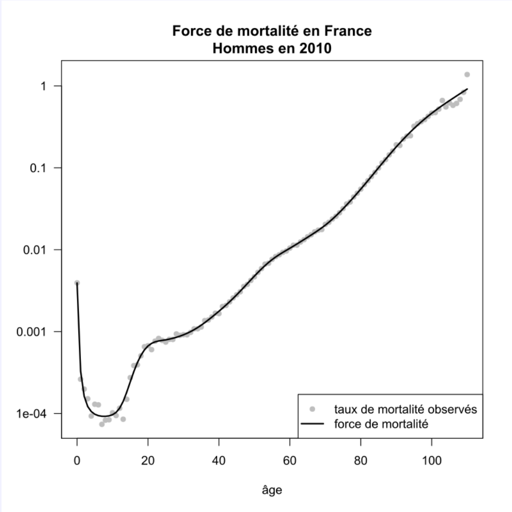
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à m, soit encore :

$$\overline{X_n} \xrightarrow{P} m.$$

Par la loi faible des grands nombres, $\frac{Y_n}{n}$ converge donc en probabilité vers $\frac{1}{a}$. En composant par la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est continue en $a > 0$, on obtient que Z_n converge en probabilité vers a. C'est donc un estimateur convergent de a.

Le saviez-vous ?

La loi de Gompertz, due au mathématicien britannique Benjamin Gompertz (1779 - 1865), décrit la dynamique de la mortalité dans une population. Elle suppose que la force de mortalité, fonction décrivant l'évolution du risque de décès par âge au sein d'une population, augmente de façon exponentielle.



Ce modèle a surtout été utilisée pour représenter la croissance d'une population régulée, comme par exemple la croissance des tumeurs, qui sont des populations de cellules dans un espace confiné où la disponibilité des éléments nutritifs est limitée.

Exercice 25.36 (★★)

Pour $R > 0$, on pose :

$$f_R(t) = \begin{cases} \dfrac{2t}{R^2} & \text{si } 0 \leq t \leq R \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f_R est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f_R. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Montrer l'existence et calculer $E(X)$ et $V(X)$
4. Soient $T_1, \dots, T_n$ des variables aléatoires i.i.d. de densité f_R où R est inconnu. On pose :

$$X_n = \frac{3}{2n} \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

   (a) Montrer que X_n est un estimateur sans biais de R.
   (b) Déterminer $V(X_n)$. X_n est-il convergent de R ?

5. On pose à présent $M_n = \max(T_1, \dots, T_n)$.

   (a) Montrer que M_n est une variable à densité, et en déterminer une densité.
   (b) M_n est-il un estimateur sans biais de R ? Construire à partir de M_n un estimateur M_n' sans biais de R.
   (c) Calculer $V(M_n')$. M_n' est-il convergent de R ?

6. Comparer les estimateurs X_n et M_n'.
7. À l'aide de X_n, construire un intervalle de confiance asymptotique de R au niveau de confiance $1 - \alpha$.

1. f_R est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et R, et positive sur $\mathbb{R}$. De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} f_R(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^R \frac{2t}{R^2}\,\mathrm{d}t$ converge en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment, et elle vaut :

$$\int_0^R \frac{2t}{R}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{R^2}\right]_0^R = 1.$$

2. Comme $f_R \neq 0$ sur $[0,R]$, on a $X(\Omega) = [0,R]$ de sorte que $F_X(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_X(x) = 1$ si $x > R$. Pour tout $x \in [0,R]$, on a :

$$\int_{-\infty}^{x} f_R(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2t}{R^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{R^2}\right]_0^x = \frac{x^2}{R^2}.$$

La fonction de répartition de X est donc :

$$F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{R^2} & \text{si } 0 \leq x \leq R \\ 1 & \text{si } x > R \end{cases}.$$

3. $E(X)$ existe si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_R(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^R \frac{2t^2}{R^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, ce qui est bien le cas puisque c'est ici l'intégrale d'une fonction continue (positive) sur un segment. Donc $E(X)$ existe et vaut :

$$E(X) = \int_0^R \frac{2t^2}{R^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2t^3}{3R^2}\right]_0^R = \frac{2R}{3}.$$

Par le théorème de transfert, $E(X^2)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_R(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^R t^2 f_R(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, ce qui est effectivement le cas puisque c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Ainsi $E(X^2)$ existe et vaut :

$$E(X^2) = \int_0^R t^2 f_R(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^R \frac{2t^3}{R^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2t^4}{4R^2}\right]_0^R = \frac{R^2}{2}.$$

Par la formule de Huygens, $V_\theta(X)$ existe et vaut :

$$V_\theta(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{4R^2}{9} = \frac{R^2}{18}.$$

4. (a) Par linéarité de l'espérance, $E(X_n)$ existe et vaut :

$$E(X_n) = \frac{3}{2n}\sum_{i=1}^{n} E(T_i) = \frac{3}{2n} \times n\frac{2R}{3} = R.$$

Ainsi $b_\theta(X_n) = E_\theta(X_n) - R = 0$, et X_n est un estimateur sans biais de R.

(b) Commençons par quelques rappels sur le risque quadratique.

Rappel. Risque quadratique.

Soit T_n un estimateur de $g(\theta)$ admettant un moment d'ordre 2 pour tout $\theta \in \Theta$. On appelle risque quadratique de T_n le réel défini pour tout $\theta \in \Theta$ par :

$$r_\theta(T_n) = E_\theta((T_n - g(\theta))^2).$$

- Décomposition biais-variance. $r_\theta(T_n) = b_\theta(T_n)^2 + V_\theta(T_n)$. En particulier, si T_n est sans biais, on a $r_\theta(T_n) = V_\theta(T_n)$.
- Condition suffisante de convergence. **Si** pour tout $\theta \in \Theta$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0,$$

alors T_n est un estimateur convergent de $g(\theta)$.

On va utiliser la décomposition biais-variance du risque quadratique. Pour cela, calculons $V_\theta(X_n)$. Par indépendance des T_i, $V_\theta(X_n)$ existe et vaut :

$$V_\theta(X_n) \underset{T_i \text{ indép.}}{=} \frac{9}{4n^2}\sum_{i=1}^{n} V_\theta(T_i) = \frac{9}{4n^2}n\frac{R^2}{18} = \frac{R^2}{8n}.$$

Ainsi on a (puisque $b_\theta(X_n) = 0$) :

$$r_\theta(X_n) = V_\theta(X_n) = \frac{R^2}{8n}.$$

Enfin, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} r_\theta(X_n) = 0$. L'estimateur X_n est bien convergent.

Remarque. On pouvait aussi obtenir la convergence de X_n à l'aide de la loi faible des grands nombres. En effet, les T_i sont indépendants, admettent une même espérance $\frac{2R}{3}$ et une même variance. Par la loi faible des grands nombres, on obtient que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_n$ converge en probabilité vers $\frac{2R}{3}$. Par composition avec la fonction $x \mapsto \frac{3}{2}x$ qui est continue, on obtient bien la convergence en probabilité de X_n vers R.

5. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = F_X(x)^n \quad \text{car les } T_i \text{ sont i.i.d.}$$

Or F_X est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en R (car f_R est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en R). Par composition, on en déduit que c'est également le cas pour F_{M_n}. Donc M_n est une variable à densité. De plus on a pour tout $x \in R$ distinct de 0 et R :

$$F'_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ nf_R(x)F_X(x)^{n-1} & \text{si } 0 < x < R \\ 0 & \text{si } x > R \end{cases}$$

Une densité de M_n est donc (en prenant une valeur arbitraire en 0 et R) :

$$g_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ n\dfrac{2t}{R^2}\left[\dfrac{t^2}{R^2}\right]^{n-1} & \text{si } 0 < t < R \\ 0 & \text{si } x \geq R \end{cases}.$$

(b) M_n admet une espérance si et seulement l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^R \frac{2nt^{2n}}{R^{2n}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument, ce qui est encore le cas car c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Et on a :

$$E_\theta(M_n) = \int_0^R \frac{2nt^{2n}}{R^{2n}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2nt^{2n+1}}{(2n+1)R^{2n}}\right]_0^R = \frac{2nR}{2n+1}.$$

Le biais de M_n est donc :

$$b_\theta(M_n) = E_\theta(M_n) - R = \frac{2nR}{2n+1} - R = -\frac{R}{2n+1}.$$

M_n est donc un estimateur biaisé de R, et asymptotiquement sans biais car $\lim\limits_{n\to+\infty} b_\theta(M_n) = 0$.

Pour obtenir un estimateur sans biais à partir de M_n, il faudrait trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ (indépendant de R puisqu'on cherche à estimer R !) tel que $M_n' = \lambda M_n$ soit sans biais, c'est-à-dire satisfaisant $R = E(M_n') = \lambda E(M_n) = \lambda\dfrac{2nR}{2n+1}$. Prenons donc $\lambda = \dfrac{2n+1}{2n}$, et $M_n' = \dfrac{2n+1}{2n}M_n$ est un estimateur sans biais de R.

(c) En reprenant les calculs effectués plus haut, on montre de même que $E_\theta(M_n^2)$ existe et vaut :

$$E_\theta(M_n^2) = \int_0^R \frac{2nt^{2n+1}}{R^{2n}}\,\mathrm{d}t = \frac{2nR^2}{2n+2} = \frac{nR^2}{n+1}.$$

Et donc par la formule de Huygens, $V_\theta(M_n)$ existe et vaut :

$$V_\theta(M_n) = \frac{nR^2}{n+1} - \frac{4n^2R^2}{(2n+1)^2} = \frac{nR^2}{(n+1)(2n+1)^2}.$$

D'où :

$$V_\theta(M_n') = \frac{(2n+1)^2}{4n^2}V_\theta(M_n) = \frac{R^2}{4n(n+1)}.$$

Comme M_n' est non biaisé, on obtient finalement le risque quadratique de M_n' :

$$r_\theta(M_n') = \frac{R^2}{4n(n+1)}.$$

Comme il tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, M_n' est donc un estimateur convergent de R.

6. Un petit rappel pour commencer.

Rappel. Comparaison d'estimateurs.

Pour comparer deux estimateurs T_n et U_n de $g(\theta)$, on calculera leur risque quadratique. Si on a :

$$\forall \theta \in \Theta, \quad r_\theta(T_n) < r_\theta(U_n),$$

alors T_n est un meilleur estimateur de $g(\theta)$ que U_n.

Dans notre situation on a (au moins pour n assez grand) :

$$r_\theta(M'_n) = \frac{R^2}{4n(n+1)} < \frac{R^2}{8n} = r_\theta(X_n).$$

Donc M'_n est un meilleur estimateur de R que X_n (il commet en moyenne moins d'erreurs).

7. Commençons par quelques rappels.

Rappel. Obtention d'un intervalle de confiance asymptotique.

Pour déterminer un intervalle de confiance asymptotique d'un paramètre $g(\theta)$, on peut procéder en trois étapes :

Étape 1 : Disposer d'une convergence en loi $Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} Y$. Elle résultera souvent du Théorème Limite Central ou d'une application du théorème de Slutsky. Il faudra dans ce cas l'énoncer (avec les hypothèses !).

Étape 2 : Fixer le niveau de confiance. Pour tout $a < b$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(a < Y_n \leq b) = P(a < Y \leq b) = F_Y(b) - F_Y(a).$$

On choisit a et b de telle sorte que $F_Y(b) - F_Y(a) = 1 - \alpha$.

Étape 3 : Expliciter l'intervalle de confiance. On résout l'inéquation $a < Y_n \leq b$ afin d'isoler $g(\theta)$, et d'obtenir ainsi l'intervalle de confiance.

Étape 1. On dispose ici d'une convergence en loi donnée par le théorème central limite. On a :

$$X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{2}T_i\right).$$

Or les variables $\frac{3}{2}T_i$ sont indépendantes (lemme de coalition) et identiquement distribuées, d'espérance R et de variance $\frac{9}{4}V_\theta(T_1) = \frac{R^2}{8}$. D'où :

$$E(X_n) = R \quad \text{et} \quad V_\theta(X_n) \underset{\text{indép.}}{=} \frac{R^2}{8n}.$$

Par le théorème central limite, la variable :

$$X_n^* = \frac{X_n - E(X_n)}{V(X_n)} = \frac{X_n - R}{\sqrt{\frac{R^2}{8n}}} = 2\sqrt{2n}\left(\frac{X_n}{R} - 1\right)$$

converge en loi vers une variable X suivant une loi $\mathscr{N}(0,1)$.

Étape 2. Si on note t_α l'unique réel tel que $\Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ (où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$), on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P_\theta(-t_\alpha < X_n^* \leq t_\alpha) = \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = \Phi(t_\alpha) - (1 - \Phi(t_\alpha)) = 2\Phi(t_\alpha) - 1 = 1 - \alpha.$$

Étape 3. On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} -t_\alpha < 2\sqrt{2n}\left(\frac{X_n}{R} - 1\right) \leq t_\alpha &\Leftrightarrow -\frac{t_\alpha}{2\sqrt{2n}} + 1 \leq \frac{X_n}{R} \leq \frac{t_\alpha}{2\sqrt{2n}} + 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{X_n}{1 + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{2n}}} \leq R < \frac{X_n}{1 - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{2n}}} \end{aligned}$$

en prenant l'inverse lors de la dernière équivalence (ce qui change le sens des inégalités car toutes les quantités en jeu sont positives... au moins pour n suffisamment grand).

Concl. Un intervalle de confiance asymptotique de R au niveau de confiance $1 - \alpha$ est donc (en fermant l'intervalle à droite pour satisfaire la définition du cours) :

$$\left[\frac{X_n}{1 + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{2n}}} ; \frac{X_n}{1 - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{2n}}}\right].$$

Exercice 25.37 (★★★)

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon d'une loi admettant une espérance m et une variance $\sigma^2 > 0$.

On considère $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et la variable $T_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$. On cherche dans cet exercice λ tel que T_n soit le meilleur estimateur de m possible. On note pour cela $f(\lambda) = V(T_n) + (E(T_n) - m)^2$.

1. Exprimer $f(\lambda)$ en fonction des λ_i, m et σ^2.
2. Dans cette question, on cherche λ réalisant le minimum de f.
   (a) Montrer que f admet un unique point critique λ^* que l'on déterminera.
   (b) Notons q_λ la forme quadratique associée à la hessienne de f en $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Montrer que
   $$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n,\ \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad q_\lambda(h) \geq 0.$$
   (c) En déduire le meilleur choix possible de λ pour que f soit minimal. Quel est le biais dans ce cas ?
   Indication. Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour déterminer la nature du point critique λ^*.
3. On cherche à présent le meilleur estimateur de la forme T_n qui soit sans biais.
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que T_n soit un estimateur sans biais de m.
   (b) On suppose que T_n est sans biais. Comment choisir les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pour que f soit minimal ?

Exercice 25.38 (★★)

On suppose que la probabilité qu'un individu contagieux transmette un virus à un individu sain est $p \in]0,1[$ inconnu, et que l'on cherche à estimer.
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
On note $\overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\left[\overline{Y_n}-\sqrt{\frac{5}{n}};\overline{Y_n}+\sqrt{\frac{5}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0.95.
2. Prenons $n = 1000$ et choisissons p de manière uniforme sur $[0,1]$ à l'aide de la commande `p = rd.random()`.

   Écrire un programme qui calcule le niveau de confiance réel de l'intervalle de confiance obtenu à la question précédente.

1. Rappelons comment procéder pour obtenir un intervalle de confiance à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Rappel. Intervalle de confiance par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Supposons qu'on dispose d'un estimateur T_n **sans biais** de $g(\theta)$ dont on connait (un majorant de) la variance[a] qui **ne fait pas intervenir** $g(\theta)$. Pour déterminer un intervalle de confiance de $g(\theta)$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut procéder comme suit :

Étape 1 : Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
On calcule $E(T_n)$ et $V(T_n)$ et on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à T_n.

Étape 2 : Fixer le niveau de confiance.
On majore si nécessaire $\frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$ par une quantité qui **ne fait pas intervenir** $g(\theta)$. On cherche ensuite ε afin que ce majorant soit égal à α.

Étape 3 : Expliciter l'intervalle de confiance.
On résout l'inéquation $|T_n - g(\theta)| \leq \varepsilon$ afin d'isoler $g(\theta)$, et d'obtenir ainsi l'intervalle de confiance.

[a]C'est le cas pour la moyenne $\overline{X_n}$ en tant qu'estimateur de p pour la loi mère $\mathscr{B}(p)$.

On a :

$$E(\overline{Y_n}) \underset{\text{lin. de } E}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p = p$$

et

$$V(\overline{Y_n}) \underset{\text{indép. des } X_i}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} p(1-p) = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}$$

car $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ puisque $p \in [0,1]$ (inégalité classique qu'on peut retrouver en étudiant la fonction $x \mapsto x(1-x)$).

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|\overline{Y_n} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\overline{Y_n})}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

On choisit ε de sorte que :

$$\frac{1}{4n\varepsilon^2} \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4\times 0.05\times n} \leq \varepsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{5}{n}} \leq \varepsilon.$$

On obtient donc pour $\varepsilon = \sqrt{\frac{5}{n}}$ que :

$$P\left(|\overline{Y_n} - p| \leq \sqrt{\frac{5}{n}}\right) = 0.95$$

soit encore

$$P\left(\overline{Y_n} - \sqrt{\frac{5}{n}} \leq p \leq \overline{Y_n} + \sqrt{\frac{5}{n}}\right) = 0.95.$$

Un intervalle de confiance de p au niveau de confiance de 0.95 est donc $\left[\overline{Y_n} - \sqrt{\frac{5}{n}}, \overline{Y_n} + \sqrt{\frac{5}{n}}\right]$.

2. Pour cela, commençons par générer un échantillon observé de grande taille m de la variable $\overline{Y_n}$. Prenons par exemple $m = 100000$, et utilisons la commande :

```
e = grand(1,m,'bin',n,p)/n
```

Parcourons à présent l'échantillon observé, en utilisant une boucle `for k=1:m`. Pour chaque réalisation de l'intervalle de confiance, on teste si p est bien contenu dans cet intervalle, à l'aide par exemple de la commande `if abs(e(k)-p) <= sqrt(5/n)`. Si cette condition est réalisée, on augmente notre compteur `c` de 1, et on renvoie enfin la fréquence `c/n`. Par la loi faible des grands nombres (on utilise ici une méthode de Monte Carlo), cette fréquence devrait être approximativement le niveau de risque réel de l'intervalle de confiance.

On propose donc le code suivant :

```
n = 1000
p = rd.random()
m = 100000
e = rd.binomial(n,p,m)

c = 0
for k in range(m):
    if np.abs(e[k]-p)<= np.sqrt(5/n):
        c = c+1
print(p)
print(c/n)
```

Après avoir exécuté le programme plusieurs fois, voici les résultats obtenus :

Valeur de p	Niveau de confiance réel
0.2113249	100
0.7560439	100
0.0002211	100
0.3303271	100
0.6653811	100

Les résultats obtenus montrent que le niveau réel de l'intervalle de confiance de la question 1 est en fait de 100%, et non de 95% comme on le voulait. Rappelons que cela n'est pas étonnant, l'inégalité de Bienaymé Tchebychev qu'on utilise pour obtenir cet intervalle ne donnant qu'une majoration très grossière de la probabilité.

Exercice 25.39 (★★★)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi exponentielle de paramètre λ inconnu. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de U_n.
2. Montrer que $(\lambda U_n - \ln(n))$ converge en loi vers une variable à densité X dont on précisera une densité.
3. Soit $\alpha \in]0,1[$.
   (a) Déterminer deux réels a, b tels que $P(X \leq a) = P(X \geq b) = \dfrac{\alpha}{2}$.
   (b) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de λ, de niveau de confiance $1-\alpha$, construit à l'aide de U_n

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$F_{U_n}(x) = P(U_n \leq x) = P(X_1 \leq x)^n \quad \text{car les } X_i \text{ sont i.i.d.}$$
On en déduit que :
$$F_{U_n} : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

2. Posons $V_n = \lambda U_n - \ln(n)$, et déterminons la fonction de répartition de V_n. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} F_{V_n}(x) = P(V_n \leq x) &= P\left(U_n \leq \frac{x+\ln(n)}{\lambda}\right) \\ &= \begin{cases} \left(1 - e^{-x-\ln(n)}\right)^n & \text{si } x \geq -\ln(n) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geq -\ln(n) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}. \end{aligned}$$
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour n assez grand, on a $x \geq -\ln(n)$ et donc :
$$F_{V_n}(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)\right).$$
Or on a :
$$n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x} \to -e^{-x}.$$
Par composition d'une limite par la fonction exponentielle (continue), on en déduit que :
$$\lim_{n\to+\infty} F_{V_n}(x) = e^{-e^{-x}}.$$
Posons $F : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-e^{-x}}$. Montrons que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X :
   - F est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions qui le sont.
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
   - F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$F'(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}} \geq 0.$$
Donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X, de densité :
$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t}e^{-e^{-t}}.$$

3. (a) On a :
$$P(X \leq a) = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow e^{-e^{-a}} = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow e^{-a} = -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow a = -\ln\left(-\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$
et en notant que $P(X \geq b) = 1 - P(X < b) = 1 - P(X \leq b)$ car X continue :
$$P(X \geq b) = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow b = -\ln\left(-\ln\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

(b) Reprenons les étapes pour obtenir un intervalle de confiance asymptotique.

Étape 1 : Disposer d'une convergence en loi. On l'a établi à la question 2., en montrant que V_n converge en loi vers X.

Étape 2 : Fixer le niveau de confiance. On a avec les réels obtenus à la question précédente que :
$$P(a < V_n \leq b) \underset{n\to+\infty}{\to} P(a < X \leq b)$$
et
$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) = 1 - P(X > b) - P(X \leq a) \\ &\underset{X \text{ cont.}}{=} 1 - P(X \geq b) - P(X \leq a) = 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Étape 3 : Expliciter l'intervalle de confiance. On résout l'inéquation :
$$a < V_n \leq b \Leftrightarrow a + \ln(n) < \lambda U_n \leq b + \ln(n) \Leftrightarrow \frac{a+\ln(n)}{U_n} < \lambda \leq \frac{b+\ln(n)}{U_n}$$

Concl. Un intervalle de confiance asymptotique de λ au niveau de confiance $1-\alpha$ est donc (en fermant l'intervalle) :
$$\left[\frac{a+\ln(n)}{U_n}, \frac{b+\ln(n)}{U_n}\right].$$