TD25

Révisions de probabilité

Variables discrètes

Exercice 25.1 (★)

Aux championnats du monde 2015 d'athlétisme, trois français figurent parmi les huit finalistes du 110m haies. D'après les commentateurs de la télévision française, « cette finale va être très serrée, tous les finalistes sont du même niveau et ont les mêmes chances ».

Quelle est la probabilité qu'au moins un français figure sur le podium ?

Exercice 25.2 (★)

On dispose de deux dés A et B. Le dé A comporte quatre faces rouges et deux faces jaunes. Le dé B comporte deux faces rouges et quatre faces jaunes. On lance une pièce de monnaie qui tombe sur pile avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$. Alors :

- si la pièce tombe sur « pile », on ne joue ensuite qu'avec le dé A,
- sinon, on ne joue ensuite qu'avec le dé B.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir « rouge » au premier lancer du dé.
2. On a obtenu « rouge » aux deux premiers lancers du dé. Quelle est la probabilité d'obtenir « rouge » au troisième ?
3. On a obtenu « rouge » aux n premiers lancers du dé. Quelle est la probabilité p_n que la pièce soit tombée sur « pile » ?

Exercice 25.3 (★)

Un candidat passe chaque année 3 concours indépendants, et la probabilité de réussite à chacun de ces concours vaut $\frac{1}{3}$. Soit X le nombre d'années nécessaires à la réussite d'au moins un concours. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 25.4 (★)

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, et soit $Y = \dfrac{1}{X}$. Y admet-t-elle une espérance ?
2. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Montrer que $E(Y)$ existe et la calculer.

Exercice 25.5 (★★)

Une urne contient au départ une boule verte et une boule rouge. On effectue des tirages successifs dans cette urne selon la procédure suivante : on tire une boule, si elle est rouge, on arrête les tirages, si elle est verte, on la remet dans l'urne en ajoutant une boule rouge. On note X le nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que $\dfrac{1}{X}$ admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que X admet une espérance et la déterminer.

Exercice 25.6 (★)

On lance une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p, et on note N le rang d'apparition du premier pile. On place alors des boules numérotées de 0 à N dans une urne, et on effectue des tirages avec remise d'une boule au hasard jusqu'à obtenir la boule 0. On note X le nombre de tirages nécessaires.

1. (a) Quelle est la loi de N ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de X conditionnellement à l'évènement $[N = n]$. En déduire que $E(X|[N = n])$ existe et la déterminer.
   (c) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
   (d) i. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulation(p)` renvoyant une réalisation de la variable X.
       ii. Écrire un script `Python` utilisant la fonction `simulation` et permettant d'obtenir une estimation de $E(X)$.
2. (★) Mêmes questions, si les tirages dans l'urne ont lieu sans remise.

Exercice 25.7 (★★)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. La valeur de cette variable est affichée sur un compteur détraqué :

- lorsque X est non nul, le compteur affiche X ;
- lorsque $X = 0$, le compteur affiche un nombre aléatoire compris entre 1 et n, tiré suivant une loi uniforme $\mathscr{U}([\![1, n]\!])$.

On note Y la variable aléatoire égale au numéro affiché par le compteur.

1. Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.
2. (a) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulation(n,p)` renvoyant une réalisation de la variable Y.
   (b) Écrire un script `Python` utilisant la fonction `simulation` et renvoyant une estimation de $E(Y)$.

Exercice 25.8 (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de deux urnes. L'urne 1 contient n boules rouges, l'urne 2 contient n boules blanches. On tire une boule de l'urne 1 que l'on place dans l'urne 2, puis on tire une boule de l'urne 2 que l'on place dans l'urne 1. On répète ainsi indéfiniment ces tirages.
On pose $X_0 = n$ et, pour tout $k \geq 1$, on note X_k le nombre de boules rouges dans l'urne 1 après avoir remis pour la k-ième fois une boule dans l'urne 1.

1. Soit $i \in [\![0, n]\!]$.
   (a) Montrer que $P_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i) = \dfrac{2i(n-i)+n}{n(n+1)}$.
   (b) Montrer que $P_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i-1) = \dfrac{i^2}{n(n+1)}$.
   (c) Montrer que $P_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i+1) = \dfrac{(n-i)^2}{n(n+1)}$.

2. En déduire que $E(X_{k+1}|[X_k = i]) = \dfrac{i(n-1)+n}{n+1}$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

3. Exprimer $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$. En déduire une expression de $E(X_k)$ en fonction de k.

Exercice 25.9 (★★★ - QSP ESCP 2016)

On utilise une pièce de monnaie qui donne pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$.
On commence par lancer la pièce jusqu'à obtenir une première fois pile, et on note N le nombre de lancers nécessaires. Si le premier pile a été obtenu au n-ème lancer, on lance ensuite cette même pièce n^2 fois et on note X le nombre de pile obtenus au cours de ces n^2 lancers.

1. Quelle est la loi suivie par N ? Donner l'espérance et la variance de N.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant l'événement $[N = n]$.

3. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance de X.

Couples de variables discrètes

Exercice 25.10 (★★)

Une urne contient des boules rouges et des boules noires, la proportion de boules rouges étant notée p $(0 < p < 1)$.

On effectue une infinité de tirages avec remise dans cette urne, et on note N (resp. R) le rang du tirage où, pour la première fois, on a obtenu une boule noire (resp. rouge).

1. Donner la loi de N et la loi de R. Les variables R et N sont-elles indépendantes ?

2. Déterminer la loi conjointe du couple (N, R).

3. Calculer la covariance de N et R, puis le coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 25.11 (★★)

Soit $n \geq 3$ et soit $p \in]0, 1[$. On lance n fois une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p. Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le $(i-1)$-ème lancer donne pile et le i-ème donne face, et 0 sinon.

1. Déterminer la loi des X_i, leur espérance et leur variance.

2. Soient i et j deux entiers tels que $2 \leq i < j \leq n$. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ? Déterminer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

3. On pose à présent $Y = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} X_i$. Que représente Y ? Déterminer son espérance.

4. En utilisant la bilinéarité de la covariance, déterminer la variance de Y.

Exercice 25.12 (★★)

Soit $N \geq 2$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On pose $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de U, puis celle de V. U et V sont-elles indépendantes ?

2. Justifier que U et V admettent une espérance et une variance, et les calculer.

3. Déterminer la variance de $U+V$, et en déduire $\text{Cov}(U,V)$.

4. ($\bigstar$) Donner la loi de $X+Y$, puis celle de $U+V$.

Exercice 25.13 ($\bigstar\bigstar$)
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la même loi géométrique de paramètre p. On pose $q = 1-p$, $U = X_1 + X_2$, $T = X_1 - X_2$.

1. Déterminer la loi de U.

2. ($\bigstar$) Déterminer la loi de T.

3. Calculer $\text{Cov}(U,T)$. Les variables U et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 25.14 ($\bigstar\bigstar\bigstar$ - Oral ESCP 2016)
Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soient λ et p deux réels tels que $\lambda > 0$ et $0 < p < 1$.
On considère le couple de variables aléatoires (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi définie par :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X=n, Y=k) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^2$.

2. Déterminer la loi marginale de la variable aléatoire X, puis celle de la variable aléatoire Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer la loi conditionnelle de la variable aléatoire Y, sachant que $[X=n]$ est réalisé.

4. Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = X - Y$. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.

5. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 25.15 ($\bigstar\bigstar\bigstar$ - Oral ESCP 2017)
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'un paquet de n cartes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ que l'on distribue intégralement, les unes après les autres entre n joueurs $J_1, J_2, \ldots, J_n$ selon le protocole suivant :

- la première carte C_1 est donnée à J_1 ;
- la deuxième carte C_2 est distribuée de façon équiprobable entre J_1 et J_2 ;
- la troisième carte C_3 est distribuée de façon équiprobable entre J_1, J_2 et J_3 ;
- et ainsi de suite, jusqu'à la dernière carte C_n qui est donc distribuée de façon équiprobable entre $J_1, J_2, \ldots, J_n$.

On suppose l'expérience modélisée par un espace probabilisé fini (Ω, P). On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui n'ont reçu aucune carte à la fin de la distribution.

1. Déterminer $X_n(\Omega)$ et calculer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n-1)$.

2. Pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on note B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si J_i n'a reçu aucune carte et 0 sinon. Déterminer la loi de B_i.

3. Exprimer la variable aléatoire X_n en fonction des variables aléatoires B_i, et en déduire l'espérance de X_n.

4. Donner la loi de X_4.

5. Montrer que pour tout i et j dans $[\![1,n]\!]$ tels que $i<j$:

$$P([B_i=1]\cap[B_j=1])=\frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}.$$

   En déduire la covariance $\mathrm{Cov}(B_i,B_j)$ des variables aléatoires B_i et B_j.

6. Montrer que $V(X_n)=\dfrac{n+1}{12}$.

Variables à densité

Exercice 25.16 (★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$, et soit $Y=\dfrac{1}{X}$.
Montrer que Y est une variable à densité et en déterminer une densité.

Exercice 25.17 (★★)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y=\ln(e^X-1)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y.

2. Montrer que Y est une variable à densité, et en déterminer une densité f_Y.

3. Montrer que f_Y est paire.

4. Montrer que $E(Y)$ existe et vaut 0.

5. (a) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulation(n)` prenant en entrée un entier naturel n non nul, et renvoyant n réalisations de la variable Y.

   (b) À l'aide de la fonction `simulation`, écrire une commande renvoyant une estimation de $E(Y)$.

Exercice 25.18 (★★ - ✍)

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f nulle sur $]-\infty,0[$ et continue sur $[0,+\infty[$. On note S la fonction définie par $S(t)=P(X>t)$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $A>0$:

$$\int_0^A S(t)\mathrm{d}t=AS(A)+\int_0^A tf(t)\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que si X admet une espérance, alors : $\forall A>0,\ AS(A)\leq\displaystyle\int_A^{+\infty}tf(t)\mathrm{d}t$.

   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}S(t)\mathrm{d}t$ est convergente et qu'elle est égale à $E(X)$.

3. Inversement, montrer que si $\int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{d}t$ est convergente, alors X admet une espérance et que
$$E(X) = \int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 25.19 (★★★ - QSP HEC 2009)

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de loi uniforme sur $]0,1]$, et soit $q \in]0,1]$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X = 1 + \left\lfloor \dfrac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.
2. À l'aide de la fonction `rd.random()`, écrire une fonction d'en-tête `def simulation(p)` prenant en paramètre d'entrée un réel $p \in]0,1[$ et renvoyant une réalisation d'une variable $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Exercice 25.20 (★★★★ - QSP HEC 2018)

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Dans cet exercice, X est une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit N la variable aléatoire prenant pour valeur le plus petit entier n tel que $[X \leq n]$ est réalisé, c'est-à-dire que : $\forall \omega \in \Omega,\ N(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N},\ X(\omega) \leq n\}$. Déterminer la loi de N.
2. Soit M la variable aléatoire prenant pour valeur le plus grand entier n tel que $[X \geq n]$ est réalisé. Montrer que N et $M+1$ sont de même loi.
3. Donner une simulation en `Python` de la variable aléatoire M pour une valeur de λ entrée par l'utilisateur.

Couples de variables à densité

Exercice 25.21 (★★)

1. On dit que Z suit la loi exponentielle bilatérale si une densité de Z est la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$
   (a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de Z.
   (c) (★) Soit Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant la loi exponentielle bilatérale, déterminer une densité de $V = Z_1 + Z_2$.
2. Dans cette question X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la loi $\mathscr{E}(1)$. On pose $W = X - Y$.
   (a) Déterminer une densité de $-Y$.
   (b) Déterminer une densité de W et vérifier que W suit une loi exponentielle bilatérale.
   (c) Déterminer l'espérance de W.
   (d) Écrire une fonction `Python` simulant n réalisations d'une loi exponentielle bilatère.
   Vérifier numériquement la valeur de l'espérance obtenue à la question précédente.

(e) On pose $T = |W|$. Déterminer la fonction de répartition de T et vérifier que T suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Exercice 25.22 (★★★)

Pour tout $a > 0$, on définit la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par $f_a(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{t^{a+1}} \text{ si } t \geq 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$.

1. Montrer que f_a est une densité de probabilité.
2. Soient a, b deux réels distincts strictement positifs, et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_a et f_b.
   (a) Déterminer les lois de $\ln(X)$ et $\ln(Y)$.
   (b) Déterminer une densité de $\ln(X) + \ln(Y)$.
   (c) Soit $Z = XY$. Montrer que Z est une variable à densité, et en donner une densité.

Exercice 25.23 (★★★★ - Oral HEC 2015)

1. Soient a, b, α trois réels strictement positifs vérifiant $0 < \alpha < a^2 \leq b^2$.
   (a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\alpha \left(\frac{a}{\sqrt{t}} - 1\right)\left(\frac{b}{\sqrt{\alpha - t}} - 1\right) \mathrm{d}t$. Cette intégrale est notée $I_{a,b}(\alpha)$.
   (b) Calculer $I_{a,b}(\alpha)$ à l'aide du changement de variable $t = \alpha \cos^2(u)$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on place deux points M et N tels que leurs abscisses respectives X_M et X_N suivent la loi uniforme sur $]0, a[$ et leurs ordonnées Y_M et Y_N suivent la loi uniforme sur $]0, b[$. On suppose que les quatre variables aléatoires X_M, X_N, Y_M et Y_N sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et sont indépendantes.
On note D la variable aléatoire égale à la longueur du segment $[M, N]$: $D^2 = (X_M - X_N)^2 + (Y_M - Y_N)^2$.

2. (a) Quelle est la loi suivie par $-X_M$?
   (b) On pose $Z_a = (X_N - X_M)$ et $Z_b = Y_N - Y_M$. Déterminer les lois de probabilité de Z_a et Z_b respectivement.
   (c) Montrer qu'une densité $f_{Z_a^2}$ de Z_a^2 est donnée par $f_{Z_a^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}} - 1\right) & \text{si } 0 < x < a^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   (d) Soit $\theta < a$. Calculer $P(D \leq \theta)$.

Vecteurs aléatoires

Exercice 25.24 (★)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
Déterminer la loi de Z ainsi que son espérance si elle existe.

Exercice 25.25 (★★ - Loi de Weibull)

Soient a et b deux réels strictement positifs. Soit la fonction $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X, et donner une densité f de X.

   On dit alors que X suit la loi de Weibull de paramètres a et b, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{W}(a,b)$.

2. Si $a = 1$, quelle est la loi de X ?

3. Déterminer la loi de X^a.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que X admet un moment d'ordre k et que $E(X^k) = b^k\Gamma\left(1+\dfrac{k}{a}\right)$.

   On pourra utiliser le changement de variable $t = \left(\dfrac{x}{b}\right)^a$.

   En déduire l'espérance et la variance de X.

5. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi $\mathscr{W}(a,b)$, et soit $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

   Montrer que Y_n suit encore une loi de Weibull dont un précisera les paramètres.

Exercice 25.26 (★★★)

Soient $N \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Un sac contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise d'une boule, et on note Z_n le plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de Z_n.

2. Montrer que $E(Z_n) = N - \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n$.

3. Montrer que $E(Z_n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{nN}{n+1}$.

Exercice 25.27 (★★★ - Oral ESCP 2018)

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des U_i et X et Y les variables aléatoires définies par:

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} U_i(\omega) \quad \text{et} \quad Y = N - X$$

1. Vérifier que pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, $\quad P([X=k]\cap[Y=\ell]) = \dbinom{k+\ell}{k}p^k(1-p)^\ell P(N=k+\ell)$.

2. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

3. On suppose que X et Y sont indépendantes et que N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

   On suppose également que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) \neq 0$ et que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $P(Y=\ell) \neq 0$.

   (a) Vérifier que pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$, on a:

   $$(k+1)P(X=k+1)P(Y=\ell)(1-p) = (\ell+1)P(X=k)P(Y=\ell+1)p$$

   (b) En déduire la loi suivie par X puis celle suivie par Y.

   (c) Justifier que N suit une loi de Poisson. Préciser son paramètre.

Exercice 25.28 (★★★ - QSP HEC)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Déterminer une densité de $-\max(X_1, \dots, X_k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
2. En déduire $P([X_n \geq X_1] \cap [X_n \geq X_2] \cap \cdots \cap [X_n \geq X_{n-1}])$.

Exercice 25.29 (★★★★ - Inspiré de QSP HEC 2021)

Un joueur lance simultanément N dés équilibrés. Puis, il effectue un deuxième tirage en ne relançant que les dés qui n'ont pas donné 6. Il continue ainsi, en ne relançant à chaque tirage que les dés n'ayant jamais donné 6.
On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n le nombre de 6 obtenus lors des n premiers lancers.

1. Déterminer la loi de S_1, puis celle de S_2.
2. Quelle est la loi de S_n ? son espérance ?
3. Montrer que $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n = N]\right) = 1$.

On introduit la variable aléatoire $T = \min\{n \geq 1,\ S_n = N\}$.

4. Calculer $P(T \leq n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la loi de T.
5. (a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. En étudiant la sommabilité de la famille $(P(X=k))_{(k,n)\in I}$ avec $I = \{(k,n) \in \mathbb{N}^2,\ k > n\}$, montrer que X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum P(X > n)$ converge, et qu'alors :
$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).$$
   (b) En déduire que T admet une espérance finie et donner une formule exprimant celle-ci.

Exercice 25.30 (★★★★)

Soient $k \geq 2$ et $p_1, \dots, p_k$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Soit X un vecteur aléatoire de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ ayant pour composantes $X_1, \dots, X_k$ tel que :
$$\forall i \in [\![1,k]\!], \quad P(X = e_i) = p_i,$$
où $(e_1, \dots, e_k)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

1. Pour $i \in [\![1,k]\!]$, montrer que X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p_i.
2. Quelle est la loi de $X_1 + X_2$? En déduire $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

On note $\mathcal{E}(X)$ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont les espérances $E(X_1), \dots, E(X_k)$, et $\mathcal{V}(X)$ la matrice carrée d'ordre k dont le coefficient à la ligne i et à la colonne j est $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$.

3. Expliciter les matrices $\mathcal{E}(X)$ et $\mathcal{V}(X)$.

4. On pose $C = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M = C \times {}^tU$.

   Vérifier que $I_k - M$ est la matrice d'un projecteur, et que $\mathcal{V}(X)$ et $I_k - M$ ont le même rang.

   En déduire le rang de $\mathcal{V}(X)$ ainsi que son noyau $\mathrm{Ker}(\mathcal{V}(X))$.

5. On munit $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et on note $F = \mathrm{Vect}(U)^\perp$. Montrer que $P([X - \mathcal{E}(X) \in F]) = 1$.

   Un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ satisfaisant cette propriété est appelé *support vectoriel de* X.

6. Montrer que si G est un support vectoriel de X, alors $H = F \cap G$ l'est aussi.

   Montrer que $H^\perp \subset F^\perp$. En déduire que $F \subset G$.

Convergence des variables aléatoires

Exercice 25.31 (★)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires admettant une espérance telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} E(|X_n|) = 0$. Montrer que $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Exercice 25.32 (★★)

Soit λ un réel strictement positif, et soit, pour tout entier n, X_n une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$. Montrer que $Y_n = \dfrac{X_n - n\lambda}{n}$ converge en probabilité vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 25.33 (★★)

Soit $N \geq 2$, et soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On pose $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable que l'on précisera.

2. Montrer qu'il s'agit également d'une convergence en probabilité.

Exercice 25.34 (★★)

Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. On note M_n et X_n les variables aléatoires définies par :

$$M_n = \max(U_1, \ldots, U_n) \text{ et } X_n = n(1 - M_n).$$

Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires (X_n).

Exercice 25.35 (★★ - Extrait de EML 2017)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{2}{\pi(1+t^2)} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité.

2. On considère une variable aléatoire X à densité, de densité f.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   (b) La variable X admet-elle une espérance ? une variance ?
3. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à densité, à valeurs strictement positives, mutuellement indépendantes, dont chacune a pour densité f.
   On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$ et $Z_n = \dfrac{n}{M_n}$.
   (a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.
   (b) Justifier que : $\forall u \in]0;+\infty[$, $\operatorname{Arctan}(u) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{u}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et que $\operatorname{Arctan}(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.
   (c) Montrer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\forall x \in]0;+\infty[$, $\mathrm{P}(Z_n \leq x) = 1 - \left(1 - \dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{n}\right)\right)^n$.
   (d) En déduire que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on reconnaîtra la loi.

Exercice 25.36 (★★ - QSP ESCP 2021)

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathscr{N}(0,1)$. On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}X_k.$$

Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.

Exercice 25.37 (★★)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant toutes la loi $\mathscr{B}(1/2)$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ existe et déterminer sa valeur.

Exercice 25.38 (★★★ - QSP ESCP 2021)

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\int_{n+\sqrt{n}}^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x.$

Exercice 25.39 (★★★ - QSP ESCP 2009)

Soit $a > 0$. Pour tout entier $n > a$, on considère X_n une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{a}{n}$. Étudier la convergence en loi de la suite (Y_n) définie par $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.

Exercice 25.40 (★★★★ - Oral HEC 2022)

Soient $n \in \mathbb{N}^*, x \in [0,1]$ et S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et x.
On pose $X_n = \frac{S_n}{n}$.

1. Montrer que :

$$\forall \alpha > 0, \quad P(|X_n - x| \geq \alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

2. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On introduit $Y_n=f(X_n)$ et on pose alors $B_n(f)(x)=\mathbb{E}(Y_n)$. On définit ainsi une fonction $B_n(f):[0,1]\to\mathbb{R}$.

   (a) Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}, B_n(f)$ est une fonction polynomiale en x.

   (b) On pose $P_0:x\mapsto 1, P_1:x\mapsto x$ et $P_2:x\mapsto x^2$.
   Déterminer, pour $n\in\mathbb{N}^*, B_n(P_0), B_n(P_1)$ et $B_n(P_2)$.

3. Justifier qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x\in[0,1], |f(x)|\leqslant M$.

4. Soit maintenant $\varepsilon>0$ fixé. On admet le résultat suivant :

$$\exists\alpha>0,\quad\forall(x,y)\in[0,1]^2,\quad |x-y|\le\alpha\implies|f(x)-f(y)|\le\varepsilon.$$

   (a) Avec les notations précédentes, montrer que :

$$\left|\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\right|\le\frac{M}{2n\alpha^2}$$

   et que :

$$\left|\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\le\alpha}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\right|\le\varepsilon.$$

   (b) Conclure qu'il existe un entier $n_0\ge 1$ tel que, pour tout $n\ge n_0$:

$$\forall x\in[0,1]\quad|B_n(f)(x)-f(x)|\le 2\varepsilon.$$

   Commenter le résultat obtenu et illustrer par un dessin.

Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance

Exercice 25.41 (★★ - Estimation du paramètre d'une loi de Gompertz)

Soit $a>0$. On note $f(x)=ae^{x-ae^x}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité (X suit une *loi de Gompertz* de paramètre a). Quelle est la loi de la variable aléatoire e^X ?

3. On veut estimer le paramètre a d'une loi de Gompertz à l'aide d'un échantillon $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant cette loi.
   On pose $Y_n=e^{X_1}+e^{X_2}+\cdots+e^{X_n}$.

   (a) Quelle est la loi de Y_n ?

   (b) La variable $Z_n=\dfrac{n}{Y_n}$ est-elle un estimateur sans biais et convergent de a ?

Exercice 25.42 (★★)

Pour $R>0$, on pose :

$$f_R(t)=\begin{cases}\dfrac{2t}{R^2} & \text{si } 0\le t\le R\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Montrer que f_R est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f_R. Déterminer la fonction de répartition de X.

3. Montrer l'existence et calculer $E(X)$ et $V(X)$

4. Soient $T_1, \ldots, T_n$ des variables aléatoires i.i.d. de densité f_R où R est inconnu. On pose :
$$X_n = \frac{3}{2n} \sum_{i=1}^{n} T_i.$$
   (a) Montrer que X_n est un estimateur sans biais de R.
   (b) Déterminer $V(X_n)$. X_n est-il convergent de R ?

5. On pose à présent $M_n = \max(T_1, \ldots, T_n)$.
   (a) Montrer que M_n est une variable à densité, et en déterminer une densité.
   (b) M_n est-il un estimateur sans biais de R ? Construire à partir de M_n un estimateur M'_n sans biais de R.
   (c) Calculer $V(M'_n)$. M'_n est-il convergent de R ?

6. Comparer les estimateurs X_n et M'_n.

7. À l'aide de X_n, construire un intervalle de confiance asymptotique de R au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice 25.43 (★★★)
Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon d'une loi admettant une espérance m et une variance $\sigma^2 > 0$.
On considère $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et la variable $T_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$. On cherche dans cet exercice λ tel que T_n soit le meilleur estimateur de m possible. On note pour cela $f(\lambda) = V(T_n) + (E(T_n) - m)^2$.

1. Exprimer $f(\lambda)$ en fonction des λ_i, m et σ^2.

2. Dans cette question, on cherche λ réalisant le minimum de f.
   (a) Montrer que f admet un unique point critique λ^* que l'on déterminera.
   (b) Notons q_λ la forme quadratique associée à la hessienne de f en $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Montrer que
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n,\ \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad q_\lambda(h) \geq 0.$$
   (c) En déduire le meilleur choix possible de λ pour que f soit minimal. Quel est le biais dans ce cas ?
   Indication. Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour déterminer la nature du point critique λ^*.

3. On cherche à présent le meilleur estimateur de la forme T_n qui soit sans biais.
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que T_n soit un estimateur sans biais de m.
   (b) On suppose que T_n est sans biais. Comment choisir les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pour que f soit minimal ?

Exercice 25.44 (★★)

On suppose que la probabilité qu'un individu contagieux transmette un virus à un individu sain est $p \in]0,1[$ inconnu, et que l'on cherche à estimer.
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
On note $\overline{Y_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\left[\overline{Y_n} - \sqrt{\dfrac{5}{n}}; \overline{Y_n} + \sqrt{\dfrac{5}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0.95.
2. Prenons $n = 1000$ et choisissons p de manière uniforme sur $[0,1]$ à l'aide de la commande `p = rd.random()`.

   Écrire un programme qui calcule le niveau de confiance réel de l'intervalle de confiance obtenu à la question précédente.

Exercice 25.45 (★★★)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi exponentielle de paramètre λ inconnu. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de U_n.
2. Montrer que $(\lambda U_n - \ln(n))$ converge en loi vers une variable à densité X dont on précisera une densité.
3. Soit $\alpha \in]0,1[$.
   (a) Déterminer deux réels a, b tels que $P(X \leq a) = P(X \geq b) = \dfrac{\alpha}{2}$.
   (b) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de λ, de niveau de confiance $1-\alpha$, construit à l'aide de U_n

---

Exercice 25.46 (★★★ - Oral HEC 2021)

Soit a un réel de $]0,1[$ qu'on suppose inconnu. Soit X une variable aléatoire réelle telle que :

- $P([X \leq a]) = \dfrac{1}{2}$.
- la loi conditionnelle de X sachant $[X \leq a]$ est la loi uniforme sur $[0,a]$.
- la loi conditionnelle de X sachant $[X > a]$ est la loi uniforme sur $[a,1]$.

1. Montrer que la variable aléatoire X est Ã densité, dont une densité f_X est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ \dfrac{1}{2(1-a)} & \text{si } a < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
2. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer en fonction de a.
3. Établir que l'on a $\dfrac{1}{12} \leq V[X] \leq \dfrac{1}{8}$.

4. On considère $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, toutes de même loi que X.

   On note pour tout $n \geq 1$, $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Déterminer deux réels β et γ ($\beta \neq 0$) tels que $T_n = \beta\overline{X_n} + \gamma$ soit un estimateur sans biais de a.

   (b) Montrer que T_n est un estimateur convergent de a.

   (c) Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer que $\left[T_n - \dfrac{1}{\sqrt{2n\alpha}}, T_n + \dfrac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\right]$ est un intervalle de confiance de a au niveau de confiance $1-\alpha$.

   (d) On pose pour tout $\alpha \in]0,1[$, $u_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
   Monter que l'intervalle $\left[T_n - \dfrac{1}{\sqrt{2n}}u_\alpha, T_n + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}u_\alpha\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a au niveau de confiance $1-\alpha$.
