TD3

Principes généraux de calculs en probabilité

Calculs de probabilités

Exercice 1 (★)

Roger est un joueur de tennis de très haut niveau, Éric un joueur du dimanche. On vous propose de jouer trois parties contre les deux, alternativement, et de vous donner un prix si vous gagnez deux parties consécutives. Avez-vous intérêt à jouer Roger, Éric puis Roger, ou Éric, Roger puis Éric ?

Exercice 2 (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est p, avec $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier face au n-ième lancer ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?
3. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, face ne soit jamais suivi de pile ?

   Indication. On discutera pour cela du rang d'apparition du premier face.

Exercice 3 (★★)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : si la boule blanche est tirée, le jeu s'arrête, et si une boule noire est tirée, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, autant de boules noires que l'urne contient de boules.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement « le n-ème tirage amène pour la première fois la boule blanche ».

1. Calculer la probabilité de A_1 et de A_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n) = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)$.
3. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(A_n)$.

Exercice 4 (★★★ - QSP ESCP 2018)

On lance $n \geq 2$ fois une pièce équilibrée, et on considère les évènements :

- A : « on obtient au plus une fois pile »,
- B : « les résultats des différents lancers ne sont pas tous identiques ».

Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

> Notons tout d'abord qu'il est équivalent de montrer que A et B sont indépendants ou de montrer que A et $\overline{B}$ le sont (voir cours). C'est pratique ici car $\overline{B}$ est beaucoup plus simple à exprimer que B. En effet, on a :
>
> $\overline{B}$: « les résultats des différents lancers sont tous identiques »,
>
> soit en d'autres termes :
>
> $\overline{B}$: « on ne fait que des piles ou que des faces ».
>
> On étudie donc si $P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$.
>
> Si on note P_i l'évènement « faire pile au i-ème lancer », on a :
>
> $$\overline{B} = (P_1 \cap \cdots \cap P_n) \cup (\overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_n}).$$

Cette union étant incompatible, on obtient donc :

$$\begin{aligned} P(\overline{B}) &= P(P_1 \cap \cdots \cap P_n) + P(\overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_n}) \\ &= P(P_1) \cdots P(P_n) + P(\overline{P_1}) \cdots P(\overline{P_n}) \text{ par indépendance} \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$A = \underbrace{(\overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_n})}_{\text{que des faces}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_{i-1}} \cap P_i \cap \overline{P_{i+1}} \cap \cdots \cap \overline{P_n} \right)}_{\text{un pile exactement}}.$$

Les évènements étant incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_n}) + \sum_{i=1}^{n} P\left(\overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_{i-1}} \cap P_i \cap \overline{P_{i+1}} \cap \cdots \cap \overline{P_n}\right) \\ &= P(\overline{P_1}) \cdots P(\overline{P_n}) + \sum_{i=1}^{n} P(\overline{P_1}) \cdots P(\overline{P_{i-1}}) P(P_i) P(\overline{P_{i+1}}) \cdots P(\overline{P_n}) \text{ par indép.} \\ &= \frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n} \qquad = \frac{n+1}{2^n} \end{aligned}$$

Enfin, $A \cap \overline{B}$ est réalisé si et seulement si on ne fait que des faces (« au plus une fois pile » et « que des piles ou que des faces ») de sorte que :

$$P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_n}) = \frac{1}{2^n} \text{ par indépendance.}$$

Finalement, on obtient que A et $\overline{B}$ sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^{2n-1}} \Leftrightarrow 2^{n-1} = n+1.$$

Or ceci n'est vrai que pour $n = 3$, puisqu'on montre facilement par récurrence que pour $n \geq 4$, $2^{n-1} > n+1$.

On peut donc conclure que A et $\overline{B}$ sont indépendants si et seulement si $n = 3$, et il en est donc de même des évènements A et B.

Exercice 5 (★★★★ - Oral ESCP 2015)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N et on extrait ces N boules une à une et sans remise. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, le numéro i est dit bien placé si ce numéro apparait lors du i-ème tirage. On considère les évènements :

- B_i : « le numéro i est bien placé ».
- $E_{N,k}$: « au cours de l'expérience, exactement k numéros sont bien placés ».

L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
2. Pour $1 \leq j \leq N$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq N$, calculer la probabilité de l'évènement :

$$A_{i_1, i_2, \ldots, i_j} = \text{« les numéros } i_1, i_2, \ldots, i_j \text{ sont bien placés ».}$$

On admet que $\displaystyle P(E_{N,0}) = 1 - \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n} P(A_{i_1, i_2, \ldots, i_j}).$

3. En déduire que : $\displaystyle P(E_{N,0}) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!}.$

4. Montrer la relation : $P(E_{N,k}) = \dfrac{1}{k!}P(E_{N-k,0})$.
5. Pour k fixé, montrer que la suite $(P(E_{N,k}))_{N\geq 0}$ est convergente. On note p_k sa limite. Montrer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une probabilité sur $\mathbb{N}$, et reconnaitre la loi correspondante.
6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_{2p+1} \leq S_{2p+3} \leq \frac{1}{e} \leq S_{2p+2} \leq S_{2p}.$$

En déduire, pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, que :

$$\sum_{j=0}^{n} |P(E_{N,j}) - p_j| \leq \frac{e}{(N+1-n)!}.$$

1. Ils ne sont pas indépendants, montrons le. Les tirages possibles (l'ordre dans lequel on tire les boules) ont tous la même probabilité de survenir. On est donc dans le cas équiprobable. Pour B_1, le nombre de cas possible est donc le nombre de tirages possibles, c'est à dire le nombre de permutations de l'ensemble $[\![1, N]\!]$, soit $N!$. Les tirages favorables correspondent aux tirages où on a obtenu la boule 1 au tirage 1, puis les autres boules dans n'importe quel ordre, c'est à dire une permutation fixant 1, et permutant sans restriction l'ensemble $[\![2, N[\![$: il y en a $(N-1)!$ donc ($N-1$ éléments sont permutés). On peut donc conclure que :

$$P(B_1) = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}.$$

De même, on a que $P(B_2) = \dfrac{1}{N}$. D'autre part, l'évènement $B_1 \cap B_2$ correspond aux tirages où l'on obtient la boule 1 au tirage 1 et la boule 2 au tirage 2. Les cas favorables correspondent donc aux permutations fixant 1 et 2, et permutant sans restriction $[\![3, N]\!]$. Elles sont donc en nombre de $(N-2)!$. Ainsi on a :

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{(N-2)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1)}.$$

Comme $P(B_1 \cap B_2) \neq P(B_1)P(B_2)$, on en déduit que les évènements B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.

2. On fait le même raisonnement que précédemment. L'évènement $A_{i_1,i_2,\ldots,i_j}$ est réalisé pour toute permutation de $[\![1, N]\!]$ fixant $i_1, \ldots, i_j$, et donc permutant les éléments $[\![1, N]\!] \setminus \{i_1, \ldots, i_j\}$. Il y a donc $(N-j)!$ permutations de la sortes, de sorte que :

$$P(A_{i_1,i_2,\ldots,i_j}) = \frac{(N-j)!}{N!}.$$

3. On obtient en substituant dans la formule que :

$$\begin{aligned}
P\left(E_{N,0}\right) &= 1 - \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq N} \frac{(N-k)!}{N!} = 1 - \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \binom{N}{k} \frac{(N-k)!}{N!} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \binom{N}{k} \frac{(N-k)!}{N!} = 1 - \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}$$

4. On est toujours dans le cas équiprobable. Dénombrons le nombre de cas favorables : pour cela, fixons les k numéros bien placés. On a $\binom{n}{k}$ façons de le faire. Puis il reste à compter le nombre de permutations des $(n-k)$ nombres restant sans point fixe cette fois. Mais ce nombre est exactement

le cardinal de $E_{N-k,0}$. Ainsi on a :

$$\text{Card}(E_{N,k}) = \binom{N}{k}\text{Card}(E_{N-k,0}).$$

On obtient donc (cas équiprobable) :

$$P(E_{N,k}) = \frac{\text{Card}(E_{N,k})}{N!} = \binom{N}{k}\frac{(N-k)!P(E_{N-k,0})}{N!} = \frac{1}{k!}P(E_{N-k,0}).$$

5. On a $\lim\limits_{N\to+\infty} P(E_{N,k}) = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{N-k}\frac{(-1)^j}{j!} = \frac{1}{k!}e^{-1} = p_k$. On reconnait ici la suite (p_k) des probabilités d'une loi de Poisson de paramètre 1.

6. Notons (S_n) la suite des sommes partielle de la série $\sum \frac{(-1)^j}{j!}$. On reconnait ici une série « alternée ». On montre alors (voir **Complément de cours 1. Autour des séries alternées**) que (à faire) :
   - (S_{2n+1}) est croissante et (S_{2n}) est décroissante ;
   - $S_{2n+1} - S_{2n} \to 0$.

   Donc les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite. Et cette limite commune est la somme de la série $S = \frac{1}{e}$. De plus on a :

   $$\forall p \in \mathbb{N}, \quad S_{2p+1} \leq S_{2p+3} \leq S = \frac{1}{e} \leq S_{2p+2} \leq S_{2p}.$$

   Notons R_n le reste de la série entière de e^{-1}. On obtient :
   - si $n = 2p$ est pair, $\frac{-1}{(2p+1)!} = S_{2p+1} - S_{2p} \leq S - S_{2p} \leq 0$ ce qui donne :

     $$|R_{2p}| \leq \frac{1}{(2p+1)!}.$$

   - si $n = 2p+1$ est impair, $0 \leq S - S_{2p+1} \leq S_{2p+2} - S_{2p+1} = \frac{1}{(2p+2)!}$ ce qui donne :

     $$|R_{2p+1}| \leq \frac{1}{(2p+2)!}.$$

   Dans tous les cas, on a donc $|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Par l'inégalité établie, on obtient :

   $$|P(E_{N,j}) - p_j| = \frac{1}{j!}|S_{N-j} - S| = \frac{1}{j!}|R_{N-j}| \leq \frac{1}{j!(N-j+1)!}.$$

   On en déduit en sommant que :

   $$\sum_{j=0}^{n}|P(E_{N,j}) - p_j| \leq \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!(N-j+1)!} \leq \frac{1}{(N-n+1)!}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!} \leq \frac{e}{(N-n+1)!}.$$

Formules de probilités totales et de Bayes

Exercice 6 (★)

On dispose de trois urnes contenant des boules blanches et noires : $\mathscr{U}_1$ contient 2 boules blanches et 3 noires, $\mathscr{U}_2$ contient 4 blanches et 2 noires, $\mathscr{U}_3$ contient 6 blanches et 1 noire.

1. On choisit une urne au hasard et on tire une boule.

(a) Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?

(b) On tire une boule blanche. Quelle est la probabilité que le tirage se soit effectué dans l'urne $\mathscr{U}_1$?

2. On effectue à présent trois tirages successifs selon le protocole suivant :
   - on tire une boule dans $\mathscr{U}_1$, on note la couleur, on remet la boule dans $\mathscr{U}_2$,
   - on tire une boule dans $\mathscr{U}_2$, on note la couleur, on remet la boule dans $\mathscr{U}_3$,
   - on tire une boule dans $\mathscr{U}_3$ et on note la couleur.

   Déterminer la probabilité que les trois boules tirées soient de la même couleur.

Exercice 7 (★)

On dispose de n sacs numérotés de 1 à n. Chaque sac contient $n+1$ jetons. Dans le k-ième sac se trouvent k jetons gagnants, les autres étant perdants. Un joueur choisi au hasard un sac et y pioche un jeton.

1. Quelle est la probabilité que le jeton soit gagnant ?

2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, sachant que le jeton tiré est gagnant, quelle est la probabilité que le tirage ait eu lieu dans le sac numéro k ?

Exercice 8 (★★)

1. Jacques propose à Jules le jeu suivant : tirer 5 cartes parmi 52. Si l'as de trèfle est dans ces 5 cartes, Jules gagne. Quelle est la probabilité que Jules gagne ?

2. Jacques décide de tricher et retire k cartes au hasard, avec $1 \leq k \leq 46$. Quelle est la probabilité que Jules gagne ?

3. Jules perd. Quelle est la probabilité que Jacques ait enlevé l'as de trèfle ?

Exercice 9 (★★)

On dispose d'une pièce équilibrée et d'une urne contenant une boule blanche. On suppose que l'on dispose également d'un stock infini de boules noires.
On lance la pièce jusqu'à obtenir Face. Pour tout $n \geq 1$, on note F_n l'évènement « On obtient Face pour la première fois au n-ème lancé ».
S'il a fallu n lancers pour obtenir Face ($n \in \mathbb{N}^*$), on rajoute $n! - 1$ boules noires dans l'urne.
On tire alors une boule dans cette urne.

1. Montrer que la famille d'évènements $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système presque complet d'évènements.

2. Déterminer la probabilité d'obtenir la boule blanche.

3. On obtient une boule noire. Quelle est la probabilité d'avoir fait 10 lancers de la pièce ?

Exercice 10 (★★)

Une puce se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si à l'instant n elle est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $n+1$, soit elle y reste avec une probabilité de $2/3$, soit elle saute sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité pour chacun de ces deux sommets. Initialement (c'est-à-dire à l'instant 0), la puce se trouve en A.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}$ les événements A_n (resp. B_n, C_n) « la puce se trouve en A (resp. en B, en C) à l'instant n », et les probabilités $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. En déduire une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $6M - 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 11 (★★)

On lance deux pièces truquées : la pièce 1 donne pile avec une probabilité p_1 et la pièce 2 donne pile avec une probabilité p_2. On effectue les lancers de la façon suivante : on choisit une pièce uniformément au hasard et on lance la pièce choisie. Si on obtient pile, on relance la même pièce et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne face ; à ce moment on change de pièce ; plus généralement, dès que l'on obtient face, on change de pièce. On suppose que p_1 et p_2 sont dans $]0,1[$.

1. Notons x_n la probabilité de lancer la pièce 1 au n-ième lancer. Trouver une relation de récurrence satisfaite par (x_n). En déduire (x_n) en fonction de n.
2. Quelle est la probabilité, notée r_n, d'obtenir pile au n-ième lancer ?
3. Calculer $L = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$.
4. Dans cette question on suppose $p_1 = 1/3$ et $p_2 = 1/6$. Écrire en langage `Python` l'expression d'une fonction permettant de calculer la valeur d'un rang n_0 à partir duquel :

$$|r_n - L| \leq 10^{-6}.$$

1. Notons X_n l'évènement « lancer la pièce 1 au n-ème lancer », de sorte que $x_n = P(X_n)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a par le formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1}) = P(X_n \cap X_{n+1}) + P(\overline{X_n} \cap X_{n+1}) = P(X_n)P_{X_n}(X_{n+1}) + P(\overline{X_n})P_{\overline{X_n}}(X_{n+1}).$$

   Or $P_{X_n}(X_{n+1})$ correspond à la probabilité de faire pile avec la pièce 1 au n-ème lancer : en effet, sachant qu'on lance la pièce 1 au n-ème lancer, on lance la pièce 1 de nouveau au $n+1$-ème lancer si et seulement si le n-ème lancer a donné un pile. De même, $P_{\overline{X_n}}(X_{n+1})$ correspond à la probabilité de faire face au n-ème lancer avec la pièce 2. On obtient donc :

$$x_{n+1} = p_1 x_n + (1-p_2)(1-x_n) = (p_1+p_2-1)x_n + 1 - p_2. \qquad (*)$$

   On a ici une suite arithmético-géométrique. On en cherche le point fixe ℓ :

$$\ell = (p_1+p_2-1)\ell + 1 - p_2 \qquad (**).$$

   On obtient $(2-p_1-p_2)\ell = 1-p_2$, soit encore $\ell = \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2}$ (en notant que $p_1 < 1$ et $p_2 < 1$, donc $p_1 + p_2 < 2$ et $2 - p_1 - p_2 \neq 0$).

   En effectuant $(*) - (**)$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_{n+1} - \ell = (p_1+p_2-1)(x_n - \ell).$$

   En notant $y_n = x_n - \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que (y_n) est une suite géométrique de raison (p_1+p_2-1), de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = (p_1+p_2-1)^{n-1} y_1 \quad \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = (p_1+p_2-1)^{n-1}(x_1-\ell)+\ell = (p_1+p_2-1)^{n-1}(1/2-\ell)+\ell.$$

2. Notons R_n l'évènement « obtenir pile au n-ème lancer ». Pour avoir $r_n = P(R_n)$, il faudrait connaitre quelle pièce on lance au n-ème lancer. On est donc amené à appliquer de nouveau la FPT avec le SCE $(X_n, \overline{X_n})$. On a :

$$\begin{aligned} r_n = P(R_n) &= P(X_n \cap R_n) + P(\overline{X_n} \cap R_n) = P(X_n)P_{X_n}(R_n) + P(\overline{X_n})P_{\overline{X_n}}(R_n) \\ &= x_n \times p_1 + (1-x_n) \times p_2 \end{aligned}$$

   qu'on pourrait exprimer plus explicitement en substituant à x_n l'expression obtenue à la question précédente.

3. Tout d'abord, on a $p_1, p_2 \in]0,1[$ de sorte que $p_1 + p_2 - 1 \in]-1,1[$. On a donc que :
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} (p_1+p_2-1)^{n-1}(x_1-\ell)+\ell = \ell.$$
On en déduit que :
$$L = \lim_{n\to+\infty} P(R_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n \times p_1 + (1-x_n)\times p_2 = \ell \times p_1 + (1-\ell)\times p_2.$$
En substituant par la valeur de ℓ obtenue à la première question, on obtient :
$$L = \frac{p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2}{2-p_1-p_2}.$$

4. On cherche le premier rang à partir duquel une certaine condition est satisfaite. Cela doit vous faire envisager une boucle `while`. On procède comme suit (en notant bien qu'on nous demande une fonction (et pas un programme !) ne prenant rien en entrée visiblement, et renvoyant le rang n_0).

```
import numpy as np

def rang():
    p1 = 1/3 ; p2 = 1/6 ;
    L = (p1*(1-p2)+p2*(1-p1))/(2-p1-p2)
    n = 1
    x = 1/2
    r = x*p1+(1-x)*p2
    while np.abs(r-L)> 10^(-6):
          n = n+1
          x = (p1+p2-1)*x+(1-p2)
          r = x*p1+(1-x)*p2
    return n
```

Exercice 12 (★★★ - QSP HEC 2013)

On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois de suite de manière indépendante et on s'intéresse à l'évènement E_n : « au cours des n lancers, deux Pile successifs n'apparaissent pas ». On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n la probabilité de E_n.
Trouver une relation entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2}, et montrer que $\lim_{n\to+\infty} P_n = 0$.

Soit $n \geq 2$. On va noté F_i l'évènement « obtenir face au i-ème lancer. On sait que $(F_1, \overline{F_1})$ est un système complet d'évènements. On a par la formule des probabilités totales :
$$P(E_n) = P(F_1 \cap E_n) + P(\overline{F_1} \cap E_n)$$
Or si $\overline{F_1} \cap E_n$ est réalisé, cela signifie que le premier lancer donne pile, et qu'au cours des n premiers lancers, deux Pile successifs n'apparaissent pas. Donc le deuxième lancer donne nécessairement Face. Ainsi on a :
$$\overline{F_1} \cap E_n = \overline{F_1} \cap F_2 \cap E_n.$$
On obtient donc
$$P(E_n) = P(F_1\cap E_n) + P(\overline{F_1}\cap F_2 \cap E_n) = P(F_1)P_{F_1}(E_n) + P(\overline{F_1}\cap F_2)P_{\overline{F_1}\cap F_2}(E_n).$$
Reste à interpréter les probabilités conditionnelles intervenant ici :

- $P_{F_1}(E_n)$ est la probabilité qu'au cours des n lancers, deux Pile successifs n'apparaissent pas, sachant qu'on a obtenu face au premier lancer. Il s'agit donc de la probabilité qu'au cours des lancers 2 à n, deux Pile successifs n'apparaissent pas. C'est donc précisément la probabilité de ne pas avoir deux Pile successifs lors de $n-1$ lancers, soit $P(E_{n-1})$.

- $P_{\overline{F_1}\cap F_2}(E_n)$ est la probabilité qu'au cours des n lancers, deux Pile successifs n'apparaissent pas, sachant qu'on a obtenu Pile puis Face au deux premiers lancers. Il s'agit donc de la probabilité qu'au cours des lancers 3 à n, deux Pile successifs n'apparaissent pas, soit encore la probabilité de ne pas avoir deux Pile successifs lors de $n-2$ lancers : c'est donc $P(E_{n-2})$.

On a finalement montré que pour tout $n \geq 2$:

$$P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}P_{n-2}.$$

On obtient une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique est :

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_\pm = \frac{1/2 \pm \sqrt{5/4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

On sait alors qu'il existe A, B des constantes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = A(x_+)^n + B(x_-)^n.$$

Comme enfin $|x_\pm| < 1$, on en déduit en passant à la limite que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$.

Exercice 13 (★★★ - QSP HEC 2009)

Un enfant a dans chacune de ses deux poches de son blouson, un paquet contenant N bonbons. À chaque fois qu'il veut manger un bonbon, il choisit, de manière indépendante et avec une probabilité p, sa poche de gauche pour en prendre un.

1. Lorsqu'il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il en reste k dans l'autre poche ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de bonbon dans les deux poches simultanément ?
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k \binom{2N-k}{N}$.

1. On cherche la probabilité de l'évènement A_k : « il ne trouve plus de bonbons dans la poche qu'il a choisie et il en reste k dans l'autre poche ». Pour que cet évènement se réalise, il faut que l'enfant effectue $N+1$ tirages dans l'une des poches, dont le dernier tirage où il ne trouve plus de bonbons, et $N-k$ tirages dans l'autre poche. On a alors deux cas possibles :

   - la poche vide est celle de gauche : Notons G cet évènement. Dans ce cas, le dernier tirage a été fait dans la poche de gauche. Et auparavant, N tirages ont été fait dans la poche de gauche, et $N-k$ dans la poche de droite. Les tirages étant indépendants, on obtient :

   $$P(A_k \cap G) = \underbrace{p}_{\text{dernier tirage}} \underbrace{\binom{2N-k}{N} p^N (1-p)^{N-k}}_{2N-k \text{ premiers tirages}}.$$

   - la poche vide est celle de droite : dans ce cas, le dernier tirage a été fait dans la poche de droite. Et auparavant, N tirages ont été fait dans la poche de droite, et $N-k$ dans la poche de gauche. On obtient alors :

   $$P(A_k \cap \overline{G}) = (1-p)\binom{2N-k}{N} p^{N-k}(1-p)^N.$$

   Par la formule des probabilités totales, on obtient :

   $$P(A_k) = P(A_k \cap G) + P(A_k \cap \overline{G}) = p\binom{2N-k}{N}p^N(1-p)^{N-k} + (1-p)\binom{2N-k}{N}p^{N-k}(1-p)^N.$$

2. Cela correspond au cas $k = 0$. Donc on a :
$$P(A_0) = p\binom{2N}{N}p^N(1-p)^N + (1-p)\binom{2N}{N}p^N(1-p)^N = \binom{2N}{N}p^N(1-p)^N.$$

3. On prend $p = \dfrac{1}{2}$. Dans ce cas, on a pour tout $k \in [\![0, N]\!]$,
$$P(A_k) = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1-k} + \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1-k} = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}.$$
On obtient :
$$1 = \sum_{k=0}^{N} P(A_k) = \sum_{k=0}^{N}\binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}.$$
Et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2^k\binom{2N-k}{N} = 2^{2N}$.

Exercice 14 (★★★★ - Oral HEC)

On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec la probabilité $\frac{1}{8}$, 2 descendant avec la probabilité $\frac{3}{8}$, 1 descendant avec la probabilité $\frac{3}{8}$ et aucun descendant avec la probabilité $\frac{1}{8}$, indépendamment de ses congénères.

A l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = \frac{1}{8}$.

1. Déterminer la probabilité x_2 qu'il n'y ait aucun individu à la deuxième génération.

2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n la probabilité pour qu'il n'y ait aucun individu à la n-ième génération. Montrer que:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{1}{8}x_n^3 + \frac{3}{8}x_n^2 + \frac{3}{8}x_n + \frac{1}{8}.$$

3. Étudier la suite (x_n) et montrer qu'elle converge vers $-2+\sqrt{5}$. Interpréter ce résultat.
