TD4

Espaces vectoriels

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Exercice 4.1 (★)

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+3y+z=0\}$;

$B = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x-y+z=0 \text{ et } x-y+z-t=0\big\}$;

$C = \left\{f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),\ \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1\right\}$;

$D = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ monotone}\}$;

$E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\2\\0\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$;

$F = \big\{P \in \mathbb{R}[x],\ \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } P(x) = ax(x-1)+bx^2+c(x-1)+d\big\}$;

$G = \{P \in \mathbb{R}_3[x],\ P(x+1) = 2P(x) \text{ et } P(3)=0\}$;

$H = \left\{\begin{pmatrix}2a+b+c & 0 & 0\\ 0 & a+2b+c & a-b\end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$;

$I = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite réelle telle que } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$;

$J = \{\text{suites réelles bornées}\}$;

$K = \{\text{matrices nilpotentes}\}$.

Exercice 4.2 (★)

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}((2,3,-1),(1,-1,-2))$ et $G = \text{Vect}((3,7,0),(5,0,-7))$. Montrer que $F = G$.

Exercice 4.3 (★★★★ - Inspiré de QSP HEC 2007)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$F \cup G \text{ est un s.e.v. de } E \quad \Leftrightarrow \quad F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

   En déduire que E n'est pas réunion de deux sous-espaces vectoriels stricts (c'est-à-dire distincts de E).

2. Plus généralement, montrer que E n'est pas réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts

---

Familles de vecteurs

Exercice 4.4 (★)

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées?

$\mathscr{F}_1 = ((1,1,0),(0,1,1))$;

$\mathscr{F}_2 = ((1,1,0),(1,0,1),(2,1,2))$;

$\mathscr{F}_3 = ((1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,1))$;

$\mathscr{F}_4 = f_1 : x \mapsto |x|,\ f_2 : x \mapsto |x-1|,\ f_3 : x \mapsto |x+1|$;

$\mathscr{F}_5 = (3, x^2+1, x^5-3x^2+2)$; $\mathscr{F}_6 = (x^k(x-1)^{n-k})_{k\in[\![0,n]\!]}$.

Exercice 4.5 (★)
Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels de l'**Exercice 4.1**.

Exercice 4.6 (★)
Montrer que $\mathscr{B} = ((1,1,1),(2,1,1),(2,1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Calculer les coordonnées de (a,b,c) dans cette base. En déduire $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ où $\mathscr{C}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.7 (★★)

1. Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_4[x],\ P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[x]$.
2. Déterminer une base $\mathscr{B}$ et la dimension de F.
3. Soit $P : x \mapsto 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 1$. Montrer que P appartient à F, et déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 4.8 (★★ - Polynômes de Lagrange et matrices de Vandermonde - ✍)
Soient $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ réels distincts deux à deux. Pour $i \in [\![0,n]\!]$, on pose :

$$L_i : x \mapsto \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{x-a_k}{a_i-a_k} = \frac{x-a_0}{a_i-a_0} \times \cdots \times \frac{x-a_{i-1}}{a_i-a_{i-1}} \times \frac{x-a_{i+1}}{a_i-a_{i+1}} \times \cdots \times \frac{x-a_n}{a_i-a_n}.$$

1. Pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, calculer $L_i(a_j)$ (*on pourra distinguer les cas $i=j$ et $i \neq j$*).
2. Montrer que $\mathscr{B} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, exprimer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$ en fonction de P.
4. Notons $\mathscr{C} = (1, x, \dots, x^n)$. Écrire la matrice $M_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$.
5. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Exercice 4.9 (★★★ - QSP ESCP 2021)
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ AM = MA\}$.

1. Vérifier rapidement que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\max\limits_{A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$ et $\min\limits_{A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.

Rang

Exercice 4.10 (★)
Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $x_1 = (1,0,2)$, $x_2 = (-1,2,-1)$, $x_3 = (2,3,0)$, $x_4 = (1,0,-1)$, $x_5 = (2,1,-1)$;
2. $x_1 = (1,1,0,1)$, $x_2 = (1,-1,1,0)$, $x_3 = (2,0,1,1)$, $x_4 = (0,-2,1,-1)$;
3. $P_1 : x \mapsto x^2 + x - 3$, $P_2 : x \mapsto x^2 - x - 3$, $P_3 : x \mapsto 2x^2 - x - 6$.

Exercice 4.11 (★)
Dans $\mathbb{R}^3$, soient $u=(1,0,2)$, $v=(1,1,2)$, $w=(1,2,2)$, $t=(2,2,2)$.
Montrer que (u,v,w,t) est générateur de $\mathbb{R}^3$, et en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.12 (★★)
Montrer que la matrice carrée d'ordre n, $A=(\sin(i+j))$ est de rang au plus 2.

Exercice 4.13 (★★ - Matrices de rang 1 - ✍)
Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. On souhaite montrer qu'il existe une matrice colonne non nulle $C\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et une matrice ligne non nulle $L\in\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M=CL$.
   (a) *Exemple.* Prenons $M=\begin{pmatrix}1&0&-2\\3&0&-6\\-2&0&4\end{pmatrix}$. Déterminer $C\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $L\in\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ tels que $M=CL$.
   (b) *Cas général.* Notons $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de M.
   Montrer qu'il existe $i\in[\![1,n]\!]$ tel que pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, il existe $\ell_j\in\mathbb{R}$ tel que $C_j=\ell_i C_i$. Conclure.
2. Montrer que $LC=\mathrm{Tr}(M)$, puis en déduire que $M^2=\mathrm{Tr}(M)M$.

Somme de sous-espaces

Exercice 4.14 (★)
Soient $F=\{P\in\mathbb{R}_2[x],\ P(x)-(x+1)P'(x)=0\}$ et $G=\{P\in\mathbb{R}_2[x],\ P'(0)=0\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[x]$, et en donner une base et la dimension.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 4.15 (★★)
Montrer, dans chacun des cas suivants, que F et G sont deux-sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E :

1. $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\ :\ x-y+2z+t=0\}$ et $G=\mathrm{Vect}((1,-1,1,-1))$;
2. $u_1=(1,0,0,0)$, $u_2=(1,1,0,0)$, $u_3=(1,1,1,0)$, $u_4=(1,1,1,1)$, et $F=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$, $G=\mathrm{Vect}(u_3,u_4)$;
3. $E=\mathbb{R}[x]$, $F=\{P\in\mathbb{R}[x]\ ;\ P(1)=P(2)=0\}$ et $G=\mathbb{R}_1[x]$;
4. $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F=\{f\in E,\ f \text{ paire}\}$, $G=\{g\in E,\ g \text{ impaire}\}$.

Exercice 4.16 (★★ - ✍)
Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie, et soit $u\notin H$. Montrer que :

$$E=H\oplus\mathrm{Vect}(u).$$

Exercice 4.17 (★★ - Matrices symétriques et antisymétriques de taille 3 - ✍)
Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est dite symétrique lorsque ${}^tM=M$ et antisymétrique lorsque ${}^tM=-M$.
On note $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ sont en somme directe (c'est-à-dire $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})\cap\mathscr{A}_3(\mathbb{R})=\{0_E\}$).

3. Déterminer une base et la dimension de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$.
4. Conclure que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 4.18 (★★★ - Matrices symétriques et antisymétriques de taille n - ✍)

Montrer que $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. En déduire que :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 4.19 (★★)

Soit $n \geq 1$ fixé. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on pose $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[x] \,:\, \forall j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}$.

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[x]$, et que pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on a $P \in F_i$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x-j)$.
2. Montrer que la somme $F_0 + F_1 + \cdots + F_n$ est directe.
3. En déduire que $\mathbb{R}_n[x] = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{n} F_i$.

Exercice 4.20 (★★★ - QSP HEC 2013)

Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égaux à 3. On pose :

$$F = \{P \in E,\ P(0) = P(1) = P(2) = 0\},\ G = \{P \in E,\ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$$

$$\text{et } H = \{P \in E,\ P(x) = P(-x)\}.$$

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$.

Exercice 4.21 (★★★★ - Formule de Grassmann - ✍)

Montrer que si F et G sont de dimension finie, alors $F+G$ est aussi de dimension finie, et qu'on a :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$
