TD5

Variables aléatoires discrètes

Loi d'une variable discrète, espérance et variance

Exercice 5.1 (★)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une variable aléatoire.
2. Montrer que X possède une espérance et que $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
3. X admet-elle une variance ?

Exercice 5.2 (★★ - Propriétés des variables indicatrices - ✍)

1. Montrer que si A, B sont deux évènements, alors

$$\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A,\ \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B,\ \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$

2. Démontrer que $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.

Exercice 5.3 (★★)

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard une poignée de jetons dans cette urne, toutes les poignées (y compris la poignée vide) étant équiprobables, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros des jetons tirés. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « le jeton i est dans la poignée tirée » et $Y_i = \mathbb{1}_{A_i}$.

1. Combien y a-t-il de poignées possibles ? Combien réalisent l'événement A_i ? En déduire la loi de Y_i.
2. Exprimer X en fonction des Y_i, et en déduire $E(X)$.

Exercice 5.4 (★)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour $\alpha \in [-1; 1]$, la variable aléatoire $Y = \alpha^X$ admet une espérance, et majorer $|E(Y)|$.
2. Montrer que si X admet une espérance, il en est de même de $Y = \ln(X)$.

Exercice 5.5 (★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, et soit $\alpha > 0$. On pose $Y = \dfrac{\alpha^X}{2^n}$. Montrer que Y admet une espérance, et la calculer.

Exercice 5.6 (★★)

Un sauteur en hauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées avec les entiers supérieurs à 1. Il ne peut tenter la $n+1$-ième hauteur que s'il a franchi la précédente (et donc s'il a franchi toutes les précédentes). On suppose que la probabilité de succès au n-ième saut (donc sachant qu'il a réussi ses $n-1$ premiers sauts) est $p_n = \frac{1}{n}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement « le sauteur a réussi ses k premiers sauts ».

1. Montrer que le sauteur fini presque sûrement par échouer.
2. On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Montrer que X possède une espérance, et la calculer.

Exercice 5.7 (★★ - ✍)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.

1. Pour tout entier k, donner une relation liant $P(X=k), P(X>k)$ et $P(X>k-1)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $nP(X>n) \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k)$.
4. En déduire que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$[X>k-1] = [X=k] \cup [X>k].$$
Les évènements étant incompatibles, on obtient :
$$P(X>k-1) = P(X=k) + P(X>k).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\left(P(X>k-1) - P(X>k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(kP(X>k-1) - kP(X>k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X>k-1) + \sum_{k=1}^{n} \left((k-1)P(X>k-1) - kP(X>k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n) \quad \text{par télescopage et glissement d'indices}
\end{aligned}$$

3. Pour tout $n \geq 1$:
$$nP(X>n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} nP(X=k) \quad \text{par incompatibilité des évènements } [X=k].$$

. De plus, pour tout $k \geq n+1$, remarquons que :

$$0 \leq nP(X=k) \leq kP(X=k).$$

D'où par sommation (toutes les séries en jeu convergent puisque $E(X)$ existe) :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} nP(X=k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k).$$

Il suit que pour tout $n \geq 1$:

$$nP(X>n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k).$$

4. Puisque X admet une espérance, la série $\sum_{k\geq 0} kP(X=k)$ converge. Notons S_n sa somme partielle d'ordre n et R_n son reste partiel d'ordre n. On a pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq nP(X>n) \leq R_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} R_n = 0.$$

Par théorème des gendarmes, la limite $\lim_{n\to+\infty} nP(X>n)$ existe et vaut 0. D'autre part, on a d'après la question 2. que pour tout $n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n) \qquad (*)$$

Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe et vaut $E(X)$. Et on vient de montrer que $\lim_{n\to+\infty} nP(X>n)$ existe et vaut 0. Par $(*)$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k)$ existe, et en passant à la limite dans $(*)$:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k).$$

Exercice 5.8 (★★ - Loi de Pascal et loi binomiale négative - ✍)

On considère un processus binomial de paramètre $p \in]0,1[$, c'est-à-dire une suite d'épreuves indépendantes telles que chaque épreuve conduit à un succès avec probabilité p ou à un échec avec probabilité $q = 1-p$.

Dans tout l'exercice, on fixe un entier $r > 0$. On admettra que si $x \in]-1,1[$, alors la série $\sum_{n\geq r} \binom{n}{r} x^{n-r}$ converge et sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

1. On note X_r le rang d'apparition du r-ème succès.
   (a) Que dire de X_1 ?
   (b) Quel est l'ensemble V des valeurs que X_r peut prendre ?
   (c) Montrer que pour tout $k \in V$, $P(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$.
   On dit que X_r suit la *loi de Pascal de paramètre* (r,p).
2. (a) Montrer que $E(X_r)$ existe et vaut $\dfrac{r}{p}$.

(b) Montrer que $E(X_r(X_r+1))$ existe et la calculer. En déduire que X_r admet une variance qui vaut $\dfrac{rq}{p^2}$.

3. On note Y_r la variable aléatoire donnant le nombre d'échecs précédant le r-ème succès.

(a) Quelle relation a-t-on entre X_r et Y_r ?

(b) En déduire la loi de Y_r, son espérance et sa variance.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on définit le coefficient binomial généralisé :

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}.$$

Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \binom{k+r-1}{k} = (-1)^k \binom{-r}{k}.$$

En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y_r = k) = \binom{-r}{k} p^r (-q)^k.$$

On dit que Y_r suit la *loi binomiale négative de paramètre* (r,p).

1. (a) X_1 est le rang du premier succès dans une répétitions d'épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques, avec probabilité p de succès pour chaque épreuve. Donc X_1 suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.

(b) Pour obtenir r succès, il faut effectuer au moins r épreuves indépendantes, le r-ème succès pouvant survenir à n'importe quel rang $k \geq r$. Ainsi, on a $V = \{r, r+1, \dots\} = [\![r, +\infty[\![$.

(c) L'évènement $[X_r = k]$ est donc celui d'obtenir le r-ème succès exactement au rang k. On a donc nécessairement obtenu :

- un succès au rang k, ce qui survient avec probabilité p ;
- $r-1$ succès parmi les $k-1$ premiers lancers. Cela correspond à $r-1$ succès lors de $k-1$ épreuves de Bernoulli indépendantes, ce qui relève d'une loi binomiale, et donc qui survient avec probabilité $\binom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{(k-1)-(r-1)}$.

Ainsi on obtient que pour tout $k \geq r$:

$$P(X_r = k) = p\binom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{(k-1)-(r-1)} = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}.$$

2. (a) $E(X_r)$ existe si, et seulement si, la série $\sum\limits_{k \geq r} kP(X_r = k)$ converge absolument, donc converge car cette série est à termes positif. Or, pour tout $k \geq r$:

$$kP(X_r = k) = k\binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} = r\binom{k}{r} p^r q^{k-r}$$

et la série $\sum\limits_{k \geq r} \binom{k}{r} q^{k-r}$ converge d'après l'énoncé car $|q| < 1$. On peut donc conclure que $E(X_r)$ existe et vaut :

$$E(X_r) = rp^r \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} q^{k-r} = \frac{rp^r}{(1-q)^{r+1}} = \frac{r}{p}.$$

(b) Par le théorème de transfert, $E(X_r(X_r+1))$ existe si, et seulement si, la série $\sum_{k\geq r} k(k+1)P(X_r=k)$ converge absolument, donc converge car cette série est à termes positif. Or pour tout $k`geqr$:

$$kP(X_r=k)=k(k+1)\binom{k-1}{r-1}p^rq^{k-r}=r(r+1)\binom{k+1}{r+1}p^rq^{k-r}$$

et la série $\sum_{k\geq r}\binom{k+1}{r+1}q^{(k+1)-(r+1)}$ converge d'après l'énoncé car $|q|<1$. On peut donc conclure que $E(X_r(X_r+1))$ existe et vaut :

$$E(X_r(X_r+1))=r(r+1)p^r\sum_{k=r}^{+\infty}\binom{k+1}{r+1}q^{(k+1)-(r+1)}=\frac{r(r+1)p^r}{(1-q)^{r+2}}=\frac{r(r+1)}{p^2}.$$

Par linéarité de l'espérance, $X_r^2=X_r(X_r+1)-X_r$ admet une espérance qui vaut :

$$E(X_r^2)=E(X_r(X_r+1))-E(X_r)=\frac{r(r+1)}{p^2}-\frac{r}{p}.$$

Par le formule de Huygens, on peut donc conclure que $V(X_r)$ existe et vaut :

$$V(X_r)=E(X_r^2)-E(X_r)^2=\frac{r(r+1)}{p^2}-\frac{r}{p}-\frac{r^2}{p^2}=\frac{r^2+r-rp-r^2}{p^2}=\frac{rq}{p^2}.$$

3. (a) X_r correspond au rang du r-ème succès. Il y a donc eu pendant ces X_r lancers, r succès et X_r-r échecs. D'où $Y_r=X_r-r$.

(b) Puisque $X_r(\Omega)=[\![r,+\infty[\![$, on a $Y_r(\Omega)=\mathbb{N}$. De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$P(Y_r=k)=P(X_r=k+r)=\binom{(k+r)-1}{r-1}p^rq^{(k+r)-r}=\binom{(k+r)-1}{r-1}p^rq^k.$$

Par linéarité de l'espérance, $E(Y_r)$ existe et vaut :

$$E(Y_r)=E(X_r-r)=E(X_r)-r=\frac{r}{p}-r.$$

Par propriété de la variance, $V(Y_r)$ existe et vaut :

$$V(Y_r)=V(X_r-r)=V(X_r)=\frac{rq}{p^2}.$$

(c) Pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\binom{k+r-1}{k}=\frac{(k+r-1)(k+r-2)\dots(k+r-1-k+1)}{k!}=\frac{(k+r-1)(k+r-2)\dots(r}{k!}$$

et

$$\binom{-r}{k}=\frac{(-r)(-r-1)\dots(-r-k+1)}{k!}=(-1)^k\frac{r(r+1)\dots(r+k-1)}{k!}.$$

D'où l'égalité demandée.

On en déduit que :

$$P(Y_r=k)=\binom{(k+r)-1}{r-1}p^rq^k=(-1)^k\binom{-r}{k}p^rq^k=\binom{-r}{k}p^r(-q)^k.$$

Exercice 5.9 (★★★ - QSP HEC 2013)

1. Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, qui prend les valeurs 0, 1 et 2 avec les probabilités p_0, p_1 et p_2 respectivement. On suppose que $E(Y) = 1$ et $E(Y^2) = \frac{5}{3}$.
   Calculer p_0, p_1 et p_2.

2. Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $x_0, x_1, \dots, x_n$.
   On suppose que $E(X), E(X^2), \dots, E(X^n)$ sont connus. Peut-on déterminer la loi de X ?

> 1. Notons tout d'abord que puisque Y est une variable aléatoire finie, $E(Y)$ et $E(Y^2)$ existe, et :
>
> $$E(Y) = 0P(Y=0)+1P(Y=1)+2P(Y=2), \quad E(Y^2) = 0^2P(Y=0)+1^2P(Y=1)+2^2P(Y=2).$$
>
> Notons de plus que $([Y=k])_{k=0,1,2}$ est un SCE, de sorte que :
>
> $$1 = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2).$$
>
> On est donc amené à résoudre le système linéaire :
>
> $$\begin{cases} p_1 + 2p_2 = 1 \\ p_1 + 4p_2 = \frac{5}{3} \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$
>
> Après résolution, on obtient $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{3}$ et Y suit une loi uniforme sur $[\![0, 2]\!]$.
>
> 2. X étant discrète, elle admet des moments de tout ordre. Notons $p_i = P(X = x_i)$ pour tout $i = 0, \dots, n$. Déterminer la loi de X, c'est déterminer tous les réels p_i. Or, pour tout $1 \leq k \leq n$, on obtient par théorème de transfert :
>
> $$E(X^k) = x_0^k p_0 + x_1^k p_1 + \cdots + x_n^k p_n.$$
>
> Et cette relation est encore valable pour $k = 0$ puisqu'alors $E(X^0) = E(1) = 1$ et $p_0 + \cdots + p_n = 1$ car $([X = x_i])_{i=0,\dots,n}$ est un système complet d'évènements. On obtient ainsi le système linéaire suivant satisfait par $p_0, p_1, \dots, p_n$:
>
> $$\begin{cases} p_0 + p_1 + \cdots + p_n & = 1 \\ x_0p_0 + x_1p_1 + \cdots + x_np_n & = E(X) \\ \quad \dots & \\ x_0^np_0 + x_1^np_1 + \cdots + x_n^np_n & = E(X^n) \end{cases}.$$
>
> On reconnait ici un système linéaire de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues (les p_i), qui a une forme caractéristique de Vandermonde. Or on a vu à l'Exercice 4.8 que la (transposée de la) matrice associée à ce système est inversible si, et seulement si, les x_i sont deux à deux distincts, ce qui est bien le cas ici. Ainsi le système admet une unique solution, et on peut donc bien déterminer la loi de X en le résolvant (c'est ce qu'on a fait sur un exemple dans la première question).

Exercice 5.10 (★★★★ - QSP HEC 2016)

Soit X une variable aléatoire discrète admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et telle que $\begin{cases} E(X) = \alpha \\ E(X^2) = E(X^4) = 1 \end{cases}$

1. Montrer que $\alpha \in [-1, 1]$.
2. Déterminer la loi de X.

> 1. Nous savons que $V(X) \geq 0$, d'où par la formule de Huygens :
>
> $$E(X^2) - E(X)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \alpha^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \in [-1, 1].$$
>
> 2. Toujours par la formule de Huygens, on a :
>
> $$V(X^2) = E(X^4) - E(X^2)^2 = 1 - 1 = 0.$$
>
> Donc X^2 est une variable certaine, constante presque sûrement égale à son espérance $E(X^2) = 1$. On en déduit que X ne peut prendre que les valeurs 1 et -1. On obtient alors en calculant l'espérance de X :
>
> $$\alpha = E(X) = P(X = 1) - P(X = -1) = P(X = 1) - (1 - P(X = 1)) = 2P(X = 1) - 1.$$
>
> Ainsi, on a $P(X = 1) = \dfrac{\alpha + 1}{2}$, et donc $P(X = -1) = \dfrac{1 - \alpha}{2}$.

Lois usuelles

Exercice 5.11 (★)

Soit $n > 2$. On dispose dans une urne de n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On effectue une suite de k tirages avec remise de boules de cette urne. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i le nombre de fois où on a obtenu une boule portant un numéro inférieur ou égal à i lors des k premiers tirages.
Déterminer la loi de X_i, son espérance et sa variance. En particulier, que valent $E(X_n)$ et $V(X_n)$? Pourquoi était-ce prévisible ?

Exercice 5.12 (★★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Y = \lfloor \frac{X+1}{2} \rfloor$. Montrer que Y suit une loi géométrique de paramètre $q = p(2 - p)$. En déduire son espérance et sa variance.

> Commençons par l'ensemble image $Y(\Omega)$. Puisque $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, on a :
>
> $$X \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{X + 1}{2} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad Y = \lfloor \frac{X + 1}{2} \rfloor \geq 1.$$
>
> Comme de plus Y est un entier en tant que partie entière d'un réel, on a $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
>
> Soit à présent $n \geq 1$, on a :
>
> $$P(Y = n) = P\left(\lfloor \frac{X + 1}{2} \rfloor = n\right) \overset{(*)}{=} P\left(n \leq \frac{X + 1}{2} < n + 1\right)$$
>
> En effet, rappelons pour l'égalité $(*)$ que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par définition de la partie entière :
>
> $$\lfloor x \rfloor = n \quad \Leftrightarrow \quad n \leq x < n + 1.$$

Poursuivons :

$$\begin{aligned}P(Y=n) &= P\left(n \leq \frac{X+1}{2} < n+1\right)\\ &= P(2n-1 \leq X < 2(n+1)-1) = P(2n-1 \leq X < 2n+1)\\ &= P([X=2n-1]\cup[X=2n]) \quad \text{car} \quad X \in \mathbb{N}^*\\ &= P(X=2n-1)+P(X=2n) \quad \text{par incompatibilité}\\ &= (1-p)^{(2n-1)-1}p+(1-p)^{2n-1}p\\ &= (1-p)^{2n-2}(p+(1-p)p) = ((1-p)^2)^{p-1}(2p-p^2).\end{aligned}$$

Notons $q = 2p-p^2$. On a :

$$1-q = 1-(2p-p^2) = 1-2p+p^2 = (1-p)^2.$$

Ainsi, on a :

$$P(Y=n) = (1-q)^{n-1}q$$

et Y suit une loi géométrique $\mathscr{G}(q)$.

Exercice 5.13 (★★ - Une caractérisation de la loi géométrique - ✍)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. On suppose que X suit une loi géométrique.

   Montrer que :

   $$\forall n,h \in \mathbb{N}^*, \quad P_{[X>n]}(X>n+h) = P(X>h). \tag{$*$}$$

   On dit que la loi géométrique est *sans mémoire*.

2. Réciproquement, on suppose que la condition $(*)$ est vérifiée.

   (a) Montrer que la suite $(P(X>n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = P(X>1)$.

   (b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1-q$.

1. Pour tout $n,h \in \mathbb{N}^*$, on a :

   $$P_{[X>n]}(X>n+h) = \frac{P([X>n+h]\cap[X>n])}{P(X>n)} = \frac{P(X>n+h)}{P(X>n)} = \frac{P(X>n+h)}{P(X>n)}$$

   Pour tout $k \geq 1$, on a par incompatibilité des évènements $[X=i]$:

   $$P(X>k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X>k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty}(1-p)^{i-1}p = p\underbrace{(1-p)^k}_{1^{er}\text{ terme}}\frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k$$

   On obtient ainsi en substituant :

   $$P_{[X>n]}(X>n+h) = \frac{(1-p)^{n+h}}{(1-p)^n} = (1-p)^h = P(X>h).$$

   Remarque. Une autre manière d'obtenir $P(X>k)$ est de noter que $[X>k]$ se réalise si et seulement si on obtient k échecs (k faces) lors des k premières épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (k lancers de pièces), ce qui donne par indépendance :

$$P(X > k) = \underbrace{(1-p) \times \cdots \times (1-p)}_{k \text{ fois}} = (1-p)^k.$$

2. (a) On a pour tout $n \geq 1$:

$$P(X > 1) \overset{(*)}{=} P_{[X>n]}(X > n+1) = \frac{P([X > n+1] \cap [X > n])}{P(X > n)} = \frac{P(X > n+1)}{P(X > n)},$$

soit encore :

$$P(X > n+1) = P(X > n)P(X > 1).$$

Ainsi $(P(X > n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = P(X > 1)$.

(b) On en déduit que pour tout $n \geq 1$:

$$P(X > n) = q^{n-1}P(X > 1) = q^n.$$

Notons que cette relation est également valable pour $n = 0$ puisque :

$$P(X > 0) \underbrace{=}_{X \in \mathbb{N}^*} 1 = q^0.$$

D'autre part, on a pour tout $n \geq 1$:

$$[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n].$$

Par incompatibilité de ces évènements, on en déduit que :

$$P(X > n-1) = P(X = n) + P(X > n).$$

On obtient donc dans notre cas :

$$P(X = n) = P(X > n-1) - P(X > n) = q^{n-1} - q^n = q^{n-1}(1-q)$$

Ainsi X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1-q = 1-P(X > 1) = P(X = 1)$.

Exercice 5.14 (★★★ - QSP HEC)

Soit $n > 3$. n personnes jettent simultanément une pièce équilibrée. Une personne gagne si elle obtient le contraire de toutes les autres. On note X le nombre de parties nécessaire à l'obtention d'un vainqueur. Déterminer la loi de X, et en déduire que X admet une variance et une espérance, que l'on déterminera.

X correspond au rang du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli (avec succès si l'une des personne obtient le contraire de toutes les autres, échec sinon) identiques et indépendantes. Donc X suit une loi géométrique de paramètre $P(A)$ où A est l'évènement « une des personne obtient le contraire de toutes les autres ».

Reste donc à calculer $P(A)$. On introduit pour cela les évènements P_i : « la i-ème personne obtient pile ». A est réalisée si et seulement si l'une des personnes obtient pile et toutes les autres faces, ou l'inverse, et cela pour n'importe quelle des personnes. Ce qui se traduit en langage ensembliste :

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\left(P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap \overline{P_i} \cap P_{i+1} \cap \dots P_n\right) \bigcup \left(\overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_{i-1}} \cap P_i \cap \overline{P_{i+1}} \cap \dots \overline{P_n}\right)\right]}_{\text{évènement « la } i\text{-ème personne gagne »}}.$$

Par incompatibilités de tous ces évènements, on en déduit que :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P\left(P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap \overline{P_i} \cap P_{i+1} \cap \dots P_n\right) + P\left(\overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_{i-1}} \cap P_i \cap \overline{P_{i+1}} \cap \dots \overline{P_n}\right).$$

Par indépendance à présent des évènements P_j (qui sont tous de probabilité $\frac{1}{2}$), on obtient :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Ainsi, X suit une loi $\mathscr{G}(\frac{n}{2^{n-1}})$.

Espérance totale

Exercice 5.15 (★)

Un joueur dispose d'un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et d'une pièce de monnaie dont la probabilité d'apparition de pile à chaque lancer est p (où $p \in]0,1[$). Le joueur lance le dé puis lance la pièce autant de fois que le nombre apparu sur le dé. Soit X le nombre de pile obtenus.

1. Calculer l'espérance de X sachant que le dé a donné le nombre k (où $k \in [\![1,6]\!]$).
2. Calculer $E(X)$ si elle existe.
3. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simul(p)` prenant en entrée un réel $p \in]0,1[$ et renvoyant une réalisation de la variable X.

Exercice 5.16 (★)

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir « pile », et on note N le nombre de lancers qui ont été nécessaires. On effectue alors une série de N lancers et on note X le nombre de « faces » obtenus lors de ces N lancers.

1. Quelle est la loi de N ?
2. Déterminer la loi de X conditionnellement à l'événement $[N = n], n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $E(X|[N = n])$ existe et la calculer.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. Simulation `Python`.
   (a) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simul()` renvoyant une réalisation de la variable X.
   (b) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def Simul(n)` renvoyant un vecteur de taille n contenant n réalisations indépendantes de la variable X.
   (c) À l'aide de la fonction `Simul`, déterminer une estimation de $E(X)$ et vérifier ainsi le résultat de la question 3.

1. On répète des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, et N correspond au rang du premier succès, à savoir « obtenir pile ». Donc N suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.

2. Si l'évènement $[N = n]$ est réalisé X compte le nombre de « faces » obtenus lors de n lancers. Cela correspond au nombre de succès (« obtenir face » cette fois) lors d'une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. La loi de X conditionnellement à l'évènement $[N = n]$ est donc une loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$. Ainsi $E(X|[N = n])$ existe et vaut $\dfrac{n}{2}$.

3. Les évènements $[N = n]$ forment un SCE. De plus on a :
   - $E(X|[N = n])$ existe et vaut $\dfrac{n}{2}$;
   - étudions la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} P(N = n)E(|X||[N = n]) = \sum_{n\geq 0} \frac{n}{2}(1 - 1/2)^{n-1}\frac{1}{2} = \sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{2^{n+1}}$. On a pour tout $n \geq 0$:
   $$\frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}\frac{n}{2^{n-1}}.$$
   On reconnait ici le terme général d'une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$. Elle converge donc, et la série $\sum_{n\geq 0} P(N = n)E(|X||[N = n])$ aussi.

   Par la formule de l'espérance totale, $E(X)$ existe et vaut :
   $$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n)E(X|[N = n]) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{4}\frac{1}{(1 - 1/2)^2} = 1. \end{aligned}$$

4. Simulation `Python`.
   (a) On propose la fonction suivante :
   ```python
   def simul():
       N = rd.geometric(1/2)
       X = rd.binomial(N,1-1/2)
       return X
   ```
   (b) On peut proposer la fonction suivante :
   ```python
   def Simul(n):
       V = np.zeros(n)
       for k in range(n):
           V[k] = simul()
       return V
   ```
   (c) Une estimation de $E(X)$ est obtenue en obtenant la moyenne d'un grand nombre de réalisations indépendantes de la variable X. On peut donc procéder ainsi :
   ```
   >>> V = Simul(10000); np.sum(V)/10000
   ```

On peut aussi utiliser la fonction `np.mean` qui permet d'obtenir la moyenne de tous les coefficients d'un vecteur ou d'une matrice :

```
>>> np.mean(V)
```

En exécutant l'une de ces deux commandes, on obtient une valeur proche de 1, ce qui confirme le résultat obtenu à la question 3.

Exercice 5.17 (★★)
Une urne contient initialement n boules numérotées de 1 à n.
On effectue des tirages dans cette urne suivant le protocole suivant : si la boule numéro i vient d'être tirée, on la remet dans l'urne et on enlève toutes les boules portant un numéro strictement supérieur à i.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue lors du k-ème tirage.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer $E(X_{k+1}|X_k = i)$.
2. Exprimer $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$, et en déduire la valeur de $E(X_k)$.
3. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simul(n,k)` prenant en entrée des entiers n et k supérieurs à 1, et renvoyant une réalisation de la variable X_k.

Exercice 5.18 (★★)
Un concierge possède 10 clés sur son trousseau. Lorsqu'il souhaite ouvrir une porte, il choisit une clé au hasard dans son trousseau jusqu'à obtenir la bonne. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de clés à essayer par le concierge pour ouvrir une porte.

1. Déterminer la loi de X si le concierge essaie les clés sans remise, puis la loi de X s'il les essaie avec remise.
2. Le concierge essaie les clés sans remise s'il est sobre et avec remise s'il est ivre. De plus, on sait qu'il est ivre un jour sur 3.
   (a) Montrer que X admet une espérance, et la déterminer.
   (b) Aujourd'hui, le concierge a eu besoin de 6 essais pour ouvrir sa porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?
   (c) Même question avec 11 essais.

Exercice 5.19 (★★★ - D'après oral ESCP 1999)
Au casino, un croupier mélange trois cartes : as de coeur, roi de coeur et valet de pique. Il les présente face cachée, et un joueur choisit l'une des cartes au hasard. Si c'est un coeur, il gagne deux euros pour le roi ou un euro pour l'as, et le jeu recommence. Si c'est le valet de pique, le jeu s'arrête. On note N le nombre de cartes tirées par le joueur, et X la somme qu'il a gagnée à la fin de la partie.

1. Déterminer la loi de N.
2. Déterminer la loi de X sachant que $[N = n]$.
3. Quel prix minimum le casino doit-il faire payer les parties pour que ce jeu soit rentable ?

1. Pour déterminer la loi de N, remarquons qu'on répète une même expérience (tirer l'une des trois cartes avec remise) de manière identique et indépendante jusqu'à obtenir un « succès », à savoir « obtenir un valet de pique », ce qui se produit avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. Et N est le rang de ce premier succès. Ainsi N suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{3}$.

2. Afin de déterminer la loi de X, on va introduire la variable aléatoire R égale au nombre de roi tirés. Exprimons alors X en fonction de R et N : puisque N est le nombre de cartes tirées par le joueur, $N-1$ cartes obtenues ont donné un roi ou un as (la dernière carte étant nécessairement un valet de pique). Et si on a obtenu R rois, c'est qu'on a obtenu $N-1-R$ as. Ainsi, le gain du joueur est :

$$X = 2 \times R + 1 \times (N - 1 - R) = R + N - 1.$$

Supposons l'évènement $[N = n]$ réalisé. Alors la loi de R sachant $[N = n]$ correspond au nombre de succès (A : « obtenir un roi ») lors d'une répétitions de $n-1$ épreuves de Bernoulli répétées de manière identique et indépendante (il y a remise à chaque fois), la probabilité de succès étant $P_{[N=n]}(A) = \frac{1}{2}$. En effet, si $[N = n]$ est réalisé, c'est que les $n-1$ premiers tirages ont donné des rois ou des as, mais pas des valets, et donc la probabilité d'obtenir un roi à chacun de ces tirages est bien $\frac{1}{2}$. Ainsi, la loi de R sachant $[N = n]$ est une loi binomiale $\mathscr{B}(n-1, \frac{1}{2})$.

Dès lors, il est facile d'obtenir la loi de X :

- Puisque $R([N = n]) = [\![0, n-1]\!]$, il suit que $X([N = n]) = R([N = n]) + n - 1 = [\![n-1, 2n-2]\!]$.
- Pour tout $k \in [\![n-1, 2n-2]\!]$,

$$\begin{aligned} P_{[N=n]}(X = k) &= P_{[N=n]}(R + n - 1 = k) = P_{[N=n]}(R = k - n + 1) \\ &= \binom{n-1}{k-n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \binom{n-1}{k-n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Remarque. Ce qu'on aura besoin dans la suite, ce n'est pas la loi de X sachant $[N = n]$, mais son espérance sachant $[N = n]$. Et pour la déterminer, on a plus simplement que :

$$\begin{aligned} E(X \mid [N = n]) &= E(R + N - 1 \mid [N = n]) = E(R + n - 1 \mid [N = n]) = E(R \mid [N = n]) + E(n - 1 \mid [N = \\ &= (n-1)\frac{1}{2} + n - 1 = \frac{3}{2}(n-1) \end{aligned}$$

puisque la loi de R sachant $[N = n]$ est une loi binomiale $\mathscr{B}(n-1, \frac{1}{2})$.

3. Pour que ce jeu soit rentable, il faut et il suffit que le prix d'une partie soit supérieur à l'espérance de gain d'un joueur. On est donc amené à calculer, si elle existe, $E(X)$.

On va utiliser le théorème de l'espérance totale. Utilisons pour cela le SCE $([N = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$. On vérifie les deux points suivants :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X \mid [N = n])$ existe bien et vaut $\frac{3}{2}(n-1)$;

- étudions la convergence de la série :

$$\sum_{n\geq 1} P(N=n)E(|X|\,|\,[N=n]) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}(n-1).$$

Pour tout $n\geq 1$, remarquons que :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}(n-1) = \frac{1}{3}\times(n-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

On reconnait (à un glissement d'indice près) une série géométrique dérivée de raison $\frac{2}{3}\in]-1,1[$, qui converge donc.

Ainsi, $E(X)$ existe et vaut :

$$E(X) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} = 3.$$

Le casino doit donc faire payer la partie au minimum 3 euros pour que ce jeu soit rentable.

Exercice 5.20 (★★★★ - D'après oral ESCP 2003)

On dispose d'une urne contenant n boules portant des numéros deux à deux distincts. Un premier joueur effectue une suite de tirages sans remise dans cette urne jusqu'à obtenir la boule portant le plus grand numéro. On note alors X_1 le nombre de tirages qu'il a effectué pour obtenir cette boule. S'il reste des boules dans l'urne, un second joueur effectue la même expérience, c'est-à-dire qu'il tire des boules de l'urne, sans remise, jusqu'à obtenir la boule portant le plus grand numéro parmi celles qui n'ont pas été tirées par le premier joueur. On note alors X_2 le nombre de tirages effectués par ce second joueur. Si le premier joueur a déjà tiré toutes les boules, alors X_2 prend la valeur 0.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_1.
2. Pour $i\in[\![1,n]\!]$, déterminer la loi de X_2 conditionnellement à l'événement $[X_1=i]$.
3. En déduire l'espérance de X_2.
4. Déterminer la loi de X_2 et retrouver le résultat de la question précédente.

1. Puisque les tirages sont effectués sans remise, on a $X_1(\Omega)=[\![1,n]\!]$.

   Posons A_i l'évènement « le joueur 1 tire la boule portant le plus grand numéro au tirage numéro i ». Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$[X_1=k] = \overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}\cap A_k.$$

   On obtient par la formule des probabilités composées (les évènements A_i n'étant pas indépendants puisque les tirages sont sans remise) :

$$P([X_1=k]) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\dots P_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\dots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k) = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\dots\frac{n-k}{n-k+1}\frac{1}{n-k} = \frac{1}{n}.$$

   Donc la variable X_1 suit une loi uniforme $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$.

   On a donc $E(X_1)=\dfrac{n+1}{2}$ et $V(X_1)=\dfrac{n^2-1}{12}$.

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a deux cas possibles :
   - $i = n$: dans ce cas la loi de X_2 sachant $[X_1 = n]$ est la loi certaine égale à 0, et on a alors $E(X_2|[X_1 = n]) = 0$.
   - $1 \leq i \leq n-1$: si $[X_1 = i]$ est réalisé, on se retrouve dans le cas de la question précédente avec une urne de $n-i$ boules, dans laquelle on fait des tirages sans remise jusqu'à obtenir la plus grande boule. On a donc :

     $$X_2 \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n-i]\!].$$

     Donc $E(X_2|[X_1 = i])$ existe et vaut $\dfrac{1+n-i}{2}$.
3. Le support de X_2 étant fini (égal à $[\![0, n-1]\!]$), l'espérance de X_2 existe bien. De plus par la formule de l'espérance totale avec le système complet d'évènements $([X_1 = i])_{i=1,\dots,n}$, on a :

$$\begin{aligned}
E(X_2) &= P(X_1 = n)E(X_2|[X_1 = n]) + \sum_{i=1}^{n-1} P(X_1 = i)E(X_2|[X_1 = i]) \\
&= 0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1+n-i}{2} \\
&= \frac{(n-1)(n+1)}{2n} - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= \frac{(n-1)(n+1)}{2n} - \frac{n(n-1)}{4n} = \frac{(n-1)}{4n}(2n+2-n) = \frac{(n-1)(n+2)}{4n}
\end{aligned}$$

4. On a déjà donné le support $X_2(\omega) = [\![0, n-1]\!]$. De plus pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :
   - si $k = 0$, $P(X_2 = 0) = P(X_1 = n) = \dfrac{1}{n}$.
   - si $1 \leq k \leq n-1$, alors on a par la formule des probabilités totales (en notant que $X_1 + X_2 \leq n$, et donc que $P_{[X_1=i]}(X_2 = k) = 0$ si $i + k > n$) :

$$P([X_2 = k]) = \sum_{i=1}^{n-k} P(X_1 = i)P_{[X_1=i]}(X_2 = k) = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{n}\frac{1}{n-i} = \frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{i}$$

   On sait que $E(X_2)$ existe car X_2 est finie, et on a :

$$\begin{aligned}
E(X_2) &= \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_2 = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k}^{n-1} \frac{k}{i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{i} \frac{k}{i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2i} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n-1}(i+1) = \frac{(n-1)(2+n)}{4n}
\end{aligned}$$

Fonction génératrice

Exercice 5.21 (Fonction génératrice - ✍)

Partie I. Cas d'une variable aléatoire discrète finie. (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
On appelle *fonction génératrice de* X la fonction polynômiale G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)\, t^k.$$

1. Déterminer la fonction génératrice de X lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ ($p \in]0,1[$) puis $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0,n \rrbracket)$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G(t) = E(t^X)$.
3. Montrer que $E(X) = G'(1)$ et $V(X) = G''(1) + G'(1) - \big(G'(1)\big)^2$.
4. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0,n \rrbracket$, $P(X=k) = \dfrac{G^{(k)}(0)}{k!}$.
   En déduire que la donnée de la fonction génératrice G de X caractérise la loi de X.

Partie II. Cas d'une variable aléatoire discrète infinie. (★★★★)

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Soit $t \in [-1,1]$. Montrer que la série $\sum\limits_{k \geq 0} P(X=k)t^k$ est absolument convergente.

   On appelle alors *fonction génératrice de* X la fonction G définie sur $[-1,1]$ par :
   $$\forall t \in [-1,1],\ G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k.$$
2. Déterminer la fonction génératrice de X lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ ($\lambda \in]0,+\infty[$) puis $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ ($p \in]0,1[$).
3. Montrer que pour tout $t \in [-1,1]$, $G(t) = E(t^X)$.
4. On suppose dans cette question que X **admet une espérance**.
   (a) Vérifier que :
   $$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{G(t)-G(1)}{t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right).$$
   (b) En déduire que $t \mapsto \dfrac{G(t)-G(1)}{t-1}$ est croissante et majorée par $E(X)$ sur $[0,1[$. Que peut-on en conclure ?
   (c) En remarquant que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,1[, \quad \sum_{k=1}^{n}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leq \frac{G(t)-G(1)}{t-1},$$
   montrer que $G'(1) = E(X)$.
5. On suppose dans cette question que G **est dérivable en** 1 (nécessairement à gauche vu son ensemble de définition).
   En utilisant la majoration du 4.(c), montrer que X admet une espérance, égale à $G'(1)$.

Partie I. Cas d'une variable aléatoire discrète finie.

1. On suppose que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, c'est à dire :
   $$X(\Omega) = \llbracket 0,n \rrbracket \qquad \text{et} \qquad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall k \in \llbracket 0,n \rrbracket.$$
   On a alors :
   $$G(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (tp)^k (1-p)^{n-k} = (tp + (1-p))^n.$$

Supposons maintenant que X suit une loi uniforme $\mathscr{U}([\![0,n]\!])$, c'est à dire :

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \qquad \text{et} \qquad P(X=k) = \frac{1}{n+1} \quad \forall k \in [\![0,n]\!].$$

On a alors :

$$G(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} t^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} t^k = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t} & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}.$$

2. Fixons $t \in \mathbb{R}$, et posons $Y = g(X)$ où $g : X(\Omega) = [\![0,n]\!] \to \mathbb{R}$ est définie par $g(k) = t^k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Y est une variable aléatoire finie, donc elle admet une espérance, et on a par le théorème de transfert :

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{k=0}^{n} g(k)P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} t^k P(X=k) = G(t).$$

3. G est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale, et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G'(t) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k)t^{k-1},$$

$$G''(t) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k)t^{k-2}.$$

Dès lors, on a :

$$G'(1) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = E(X)$$

et

$$\begin{aligned} G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k) + \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) - E(X)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X=k) + \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) - E(X)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(k(k-1)+k\right) P(X=k) - E(X)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) - E(X)^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 = V(X). \end{aligned}$$

4. On dérive k fois[a] la fonction G ($k \in [\![0,n]\!]$) : on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G^{(k)}(t) = \sum_{i=k}^{n} i(i-1)\dots(i-k+1)P(X=k)t^{i-k}.$$

En prenant $t=0$ dans cette expression, seul le terme constant reste (en $i=k$) :

$$G^{(k)}(0) = k(k-1)\dots(k-k+1)P(X=k) = k!P(X=k).$$

Ainsi on a bien $P(X=k) = \dfrac{G^{(k)}(0)}{k!}$.

Partie II. Cas d'une variable aléatoire discrète infinie.

1. Soit $t \in [-1, 1]$. On a :

$$|P(X=k)t^k| = P(X=k)|t|^k \leq P(X=k)$$

Or $\sum_{k\geq 0} P(X=k)$ est une série convergente, de somme égale à 1 (propriété du système complet d'évènements $[X=k]$). Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $|P(X=k)t^k|$ est convergente, et donc que $\sum_{k\geq 0} P(X=k)t^k$ est absolument convergente.

Ainsi pour tout $t \in [-1, 1]$, la série la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} P(X=k)t^k$ est absolument convergente.

2. La convergence des séries à considérer a été établie à la question précédente. Reste à calculer leur somme.

- On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, c'est à dire :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On a alors :

$$G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{t\lambda-\lambda}.$$

- On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, c'est à dire :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad P(X=k) = (1-p)^{k-1}p \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

On a alors :

$$G(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}pt^k = \sum_{k=1}^{+\infty}(t-tp)^{k-1}(pt) \underset{t(1-p)\in]-1,1[}{=} \frac{tp}{1-(t-tp)} = \frac{tp}{1-t(1-p)}.$$

3. Fixons $t \in \mathbb{R}$, et posons $Y = g(X)$ où $g : X(\Omega) = \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est définie par $g(k) = t^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Y est une variable aléatoire infinie. Par le théorème de transfert, elle admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq 0} g(k)P(X=k) = \sum_{k\geq 0} t^k P(X=k)$ converge absolument. Or on a montré que c'était bien le cas au début de la partie II. Ainsi $E(Y)$ existe bien, et on a :

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(X=k) = G(t).$$

4. On suppose dans cette question que X **admet une espérance**.

(a) Soit $t \in]-1, 1[$. On a :

$$\frac{G(t)-G(1)}{t-1} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k - \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)}{t-1} \underset{\text{les séries convergent}}{=} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)(t^k-1)}{t-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)\frac{t^k-1}{t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right)$$

car $\dfrac{t^k-1}{t-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} t^i$ lorsque $t \neq 1$.

(b) • *Croissance.* Pour tout $0 \leq t \leq t' < 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leq P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} t'^i\right).$$

Ainsi en sommant pour $k = 1, \dots, N$, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leq \sum_{k=1}^{N} P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} t'^i\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} t'^i\right).$$

On a donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t'^i\right)$.
En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on a donc :

$$\frac{G(t)-G(1)}{t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t'^i\right) = \frac{G(t')-G(1)}{t'-1}.$$

Ainsi $t \mapsto \dfrac{G(t)-G(1)}{t-1}$ est croissante.

• *Majoration.* On reprend la majoration précédente pour $t \in [0,1[$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) &\leq \sum_{k=1}^{N} P(X=k)\left(\sum_{i=0}^{k-1} 1^i\right) = \sum_{k=1}^{N} kP(X=k)\\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = E(X).\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on a donc :

$$\frac{G(t)-G(1)}{t-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) \leq E(X).$$

Ainsi $t \mapsto \dfrac{G(t)-G(1)}{t-1}$ est majorée par $E(X)$.

Comme $t \mapsto \dfrac{G(t)-G(1)}{t-1}$ est croissante et majorée sur $[0,1[$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} \frac{G(t)-G(1)}{t-1}$ existe et est finie. Ainsi G est dérivable en 1, et $G'(1) \leq E(X)$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [0,1[$, on a :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right)}_{\geq 0} \leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} t^i\right) = \frac{G(t)-G(1)}{t-1}$$

On passe alors à la limite quand $t \to 1^-$ dans l'inégalité précédente (on a montré à la question précédente que tout converge) :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(P(X=k)\sum_{i=0}^{k-1} 1\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(P(X=k)k\right) \leq G'(1)$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut passer à la limite quand $n \to +\infty$ (la série converge car $E(X)$ existe !) :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k) \leq G'(1).$$

Comme de plus on avait établi que $G'(1) \leq E(X)$ à la question précédente, on en déduit finalement que $G'(1) = E(X)$.

5. On suppose dans cette question que G **est dérivable en** 1. Il suffit ici de prouver que $E(X)$ existe, car alors par la question précédente $E(X) = G'(1)$.

   Reprenons l'inégalité précédente valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1[$:

$$\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(P(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \right)}_{\geq 0} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left(P(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \right) = \frac{G(t) - G(1)}{t - 1}$$

   On passe alors à la limite quand $t \to 1^-$ dans l'inégalité précédente (toutes les limites existent et sont finies) :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(P(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} 1 \right) = \sum_{k=1}^{n} (P(X = k)k) \leq G'(1)$$

   Ainsi la suite des sommes partielles $\sum_{k\geq 1} kP(X = k)$ est majorée (par $G'(1)$). Elle est de plus croissante car son terme général est positif. Elle converge donc (absolument). Ainsi l'espérance de X existe bien (et vaut $G'(1)$ par la question précédente).

[a] Montrer le par récurrence si vous ne le voyez pas !