TD5

Variables aléatoires discrètes

Loi d'une variable discrète, espérance et variance

Exercice 5.1 (★)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une variable aléatoire.
2. Montrer que X possède une espérance et que $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
3. X admet-elle une variance ?

Exercice 5.2 (★★ - Propriétés des variables indicatrices - ✍)

1. Montrer que si A, B sont deux évènements, alors

$$\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A,\ \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B,\ \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$

2. Démontrer que $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.

Exercice 5.3 (★★)

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard une poignée de jetons dans cette urne, toutes les poignées (y compris la poignée vide) étant équiprobables, et on note X la variable aléatoire égale à la somme des numéros des jetons tirés. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement « le jeton i est dans la poignée tirée » et $Y_i = \mathbb{1}_{A_i}$.

1. Combien y a-t-il de poignées possibles ? Combien réalisent l'événement A_i ? En déduire la loi de Y_i.
2. Exprimer X en fonction des Y_i, et en déduire $E(X)$.

Exercice 5.4 (★)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour $\alpha \in [-1; 1]$, la variable aléatoire $Y = \alpha^X$ admet une espérance, et majorer $|E(Y)|$.
2. Montrer que si X admet une espérance, il en est de même de $Y = \ln(X)$.

Exercice 5.5 (★)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, et soit $\alpha > 0$. On pose $Y = \dfrac{\alpha^X}{2^n}$. Montrer que Y admet une espérance, et la calculer.

Exercice 5.6 (★★)

Un sauteur en hauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées avec les entiers supérieurs à 1. Il ne peut tenter la $n+1$-ième hauteur que s'il a franchi la précédente (et donc s'il a franchi toutes les précédentes). On suppose que la probabilité de succès au n-ième saut (donc sachant qu'il a réussi ses $n-1$ premiers sauts) est $p_n = \frac{1}{n}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement « le sauteur a réussi ses k premiers sauts ».

1. Montrer que le sauteur fini presque sûrement par échouer.
2. On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Montrer que X possède une espérance, et la calculer.

Exercice 5.7 (★★ - ✍)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.

1. Pour tout entier k, donner une relation liant $P(X=k), P(X>k)$ et $P(X>k-1)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle nP(X>n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X=k)$.
4. En déduire que $\displaystyle E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$.

Exercice 5.8 (★★ - Loi de Pascal et loi binomiale négative - ✍)

On considère un processus binomial de paramètre $p \in]0,1[$, c'est-à-dire une suite d'épreuves indépendantes telles que chaque épreuve conduit à un succès avec probabilité p ou à un échec avec probabilité $q = 1-p$.

Dans tout l'exercice, on fixe un entier $r > 0$. On admettra que si $x \in]-1,1[$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq r} \binom{n}{r} x^{n-r}$ converge et sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

1. On note X_r le rang d'apparition du r-ème succès.
   (a) Que dire de X_1 ?
   (b) Quel est l'ensemble V des valeurs que X_r peut prendre ?
   (c) Montrer que pour tout $k \in V$, $P(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$.
   On dit que X_r suit la *loi de Pascal de paramètre* (r,p).
2. (a) Montrer que $E(X_r)$ existe et vaut $\dfrac{r}{p}$.
   (b) Montrer que $E(X_r(X_r+1))$ existe et la calculer. En déduire que X_r admet une variance qui vaut $\dfrac{rq}{p^2}$.
3. On note Y_r la variable aléatoire donnant le nombre d'échecs précédant le r-ème succès.
   (a) Quelle relation a-t-on entre X_r et Y_r ?
   (b) En déduire la loi de Y_r, son espérance et sa variance.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on définit le coefficient binomial généralisé :
$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}.$$
Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \binom{k+r-1}{k} = (-1)^k \binom{-r}{k}.$$
En déduire que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y_r = k) = \binom{-r}{k} p^r (-q)^k.$$
On dit que Y_r suit la *loi binomiale négative de paramètre* (r, p).

Exercice 5.9 (★★★★ - QSP HEC 2016)
Soit X une variable aléatoire discrète admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et telle que $\begin{cases} E(X) = \alpha \\ E(X^2) = E(X^4) = 1 \end{cases}$

1. Montrer que $\alpha \in [-1, 1]$.
2. Déterminer la loi de X.

Lois usuelles

Exercice 5.10 (★)
Soit $n > 2$. On dispose dans une urne de n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On effectue une suite de k tirages avec remise de boules de cette urne. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i le nombre de fois où on a obtenu une boule portant un numéro inférieur ou égal à i lors des k premiers tirages.
Déterminer la loi de X_i, son espérance et sa variance. En particulier, que valent $E(X_n)$ et $V(X_n)$? Pourquoi était-ce prévisible ?

Exercice 5.11 (★★)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Y = \lfloor \frac{X+1}{2} \rfloor$. Montrer que Y suit une loi géométrique de paramètre $q = p(2 - p)$. En déduire son espérance et sa variance.

Exercice 5.12 (★★ - Une caractérisation de la loi géométrique - ✍)
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. On suppose que X suit une loi géométrique.

   Montrer que :
$$\forall n, h \in \mathbb{N}^*, \quad P_{[X>n]}(X > n + h) = P(X > h). \qquad (*)$$
   On dit que la loi géométrique est *sans mémoire*.

2. Réciproquement, on suppose que la condition $(*)$ est vérifiée.

   (a) Montrer que la suite $(P(X > n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = P(X > 1)$.

(b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

Exercice 5.13 (★★★ - QSP HEC)

Soit $n > 3$. n personnes jettent simultanément une pièce équilibrée. Une personne gagne si elle obtient le contraire de toutes les autres. On note X le nombre de parties nécessaire à l'obtention d'un vainqueur. Déterminer la loi de X, et en déduire que X admet une variance et une espérance, que l'on déterminera.

Espérance totale

Exercice 5.14 (★)

Un joueur dispose d'un dé cubique non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et d'une pièce de monnaie dont la probabilité d'apparition de pile à chaque lancer est p (où $p \in]0,1[$). Le joueur lance le dé puis lance la pièce autant de fois que le nombre apparu sur le dé. Soit X le nombre de pile obtenus.

1. Calculer l'espérance de X sachant que le dé a donné le nombre k (où $k \in [\![1,6]\!]$).
2. Calculer $E(X)$ si elle existe.
3. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simul(p)` prenant en entrée un réel $p \in]0,1[$ et renvoyant une réalisation de la variable X.

Exercice 5.15 (★)

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir « pile », et on note N le nombre de lancers qui ont été nécessaires. On effectue alors une série de N lancers et on note X le nombre de « faces » obtenus lors de ces N lancers.

1. Quelle est la loi de N ?
2. Déterminer la loi de X conditionnellement à l'événement $[N = n], n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $E(X|[N = n])$ existe et la calculer.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. Simuation `Python`.
   (a) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simul()` renvoyant une réalisation de la variable X.
   (b) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def Simul(n)` renvoyant un vecteur de taille n contenant n réalisations indépendantes de la variable X.
   (c) À l'aide de la fonction `Simul`, déterminer une estimation de $E(X)$ et vérifier ainsi le résultat de la question 3.

Exercice 5.16 (★★)

Une urne contient initialement n boules numérotées de 1 à n.
On effectue des tirages dans cette urne suivant le protocole suivant : si la boule numéro i vient d'être tirée, on la remet dans l'urne et on enlève toutes les boules portant un numéro strictement supérieur à i.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue lors du k-ème tirage.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer $E(X_{k+1}|X_k = i)$.

2. Exprimer $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$, et en déduire la valeur de $E(X_k)$.

3. Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simul(n,k)` prenant en entrée des entiers n et k supérieurs à 1, et renvoyant une réalisation de la variable X_k.

Exercice 5.17 (★★)

Un concierge possède 10 clés sur son trousseau. Lorsqu'il souhaite ouvrir une porte, il choisit une clé au hasard dans son trousseau jusqu'à obtenir la bonne. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de clés à essayer par le concierge pour ouvrir une porte.

1. Déterminer la loi de X si le concierge essaie les clés sans remise, puis la loi de X s'il les essaie avec remise.

2. Le concierge essaie les clés sans remise s'il est sobre et avec remise s'il est ivre. De plus, on sait qu'il est ivre un jour sur 3.

   (a) Montrer que X admet une espérance, et la déterminer.

   (b) Aujourd'hui, le concierge a eu besoin de 6 essais pour ouvrir sa porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

   (c) Même question avec 11 essais.

Exercice 5.18 (★★★ - D'après oral ESCP 1999)

Au casino, un croupier mélange trois cartes : as de coeur, roi de coeur et valet de pique. Il les présente face cachée, et un joueur choisit l'une des cartes au hasard. Si c'est un coeur, il gagne deux euros pour le roi ou un euro pour l'as, et le jeu recommence. Si c'est le valet de pique, le jeu s'arrête. On note N le nombre de cartes tirées par le joueur, et X la somme qu'il a gagnée à la fin de la partie.

1. Déterminer la loi de N.

2. Déterminer la loi de X sachant que $[N = n]$.

3. Quel prix minimum le casino doit-il faire payer les parties pour que ce jeu soit rentable ?

Exercice 5.19 (★★★★ - D'après oral ESCP 2003)

On dispose d'une urne contenant n boules portant des numéros deux à deux distincts. Un premier joueur effectue une suite de tirages sans remise dans cette urne jusqu'à obtenir la boule portant le plus grand numéro. On note alors X_1 le nombre de tirages qu'il a effectué pour obtenir cette boule. S'il reste des boules dans l'urne, un second joueur effectue la même expérience, c'est-à-dire qu'il tire des boules de l'urne, sans remise, jusqu'à obtenir la boule portant le plus grand numéro parmi celles qui n'ont pas été tirées par le premier joueur. On note alors X_2 le nombre de tirages effectués par ce second joueur. Si le premier joueur a déjà tiré toutes les boules, alors X_2 prend la valeur 0.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_1.

2. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de X_2 conditionnellement à l'événement $[X_1 = i]$.

3. En déduire l'espérance de X_2.

4. Déterminer la loi de X_2 et retrouver le résultat de la question précédente.

Fonction génératrice

Exercice 5.20 (Fonction génératrice - ✍)

Partie I. Cas d'une variable aléatoire discrète finie. (★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
On appelle *fonction génératrice de* X la fonction polynômiale G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)\, t^k.$$

1. Déterminer la fonction génératrice de X lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ ($p \in]0, 1[$) puis $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0, n]\!])$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G(t) = E(t^X)$.
3. Montrer que $E(X) = G'(1)$ et $V(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$.
4. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{G^{(k)}(0)}{k!}$.
   En déduire que la donnée de la fonction génératrice G de X caractérise la loi de X.

Partie II. Cas d'une variable aléatoire discrète infinie. (★★★★)

Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Soit $t \in [-1, 1]$. Montrer que la série $\sum\limits_{k \geq 0} P(X = k)t^k$ est absolument convergente.

   On appelle alors *fonction génératrice de* X la fonction G définie sur $[-1, 1]$ par :

$$\forall t \in [-1, 1],\ G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k)t^k.$$

2. Déterminer la fonction génératrice de X lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ ($\lambda \in]0, +\infty[$) puis $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ ($p \in]0, 1[$).
3. Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$, $G(t) = E(t^X)$.
4. On suppose dans cette question que X **admet une espérance**.
   (a) Vérifier que :
   $$\forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{G(t) - G(1)}{t - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(P(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \right).$$
   (b) En déduire que $t \mapsto \dfrac{G(t) - G(1)}{t - 1}$ est croissante et majorée par $E(X)$ sur $[0, 1[$. Que peut-on en conclure ?
   (c) En remarquant que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, 1[, \quad \sum_{k=1}^{n} \left(P(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i \right) \leq \frac{G(t) - G(1)}{t - 1},$$
   montrer que $G'(1) = E(X)$.
5. On suppose dans cette question que G **est dérivable en** 1 (nécessairement à gauche vu son ensemble de définition).
   En utilisant la majoration du 4.(c), montrer que X admet une espérance, égale à $G'(1)$.