TD7

Couples de variables aléatoires discrètes

Loi d'un couple, lois marginales et conditionnelles

Exercice 7.1 (★)

On considère un couple (X,Y) de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour lequel il existe un réel a tel que la loi de (X,Y) soit définie par : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P([X=i] \cap [Y=j]) = \dfrac{1}{j!}\dfrac{a}{2^{i+j}}$.

1. Déterminer a.
2. Déterminer les lois marginales.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.2 (★★)

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère n urnes numérotées de 1 à n. On suppose que pour tout entier k compris entre 1 et n, l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une urne parmi les n et dans cette urne on tire au hasard une boule.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et N la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule obtenue.

1. Reconnaitre la loi de X, ainsi que la loi de N sachant $[X=i]$ pour tout $i \in X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi du couple (X,N).
3. En déduire la loi de N sous forme de somme.
4. Calculer l'espérance et la variance de N.

Exercice 7.3 (★★★ - QSP HEC 2014)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{a}{(i+j+1)!}.$$

Déterminer le réel a. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Fonctions de deux variables discrètes

Exercice 7.4 (★)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Justifier que $\dfrac{X}{1+Y}$ possède une espérance et la calculer.

Exercice 7.5 (★★)

Soient X et Y deux variables indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, $p \in]0,1[$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit une matrice $A(\omega)$ par :

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega)-1 \\ Y(\omega)-1 & X(\omega) \end{pmatrix}.$$

Déterminer la probabilité que $A(\omega)$ soit inversible.

Exercice 7.6 (★★)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, telles que X suit la loi $\mathscr{P}(\lambda)$ et Y suit la loi $\mathscr{P}(\mu)$. Déterminer la loi de X sachant $[X+Y=n]$.

Exercice 7.7 (★★)
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et suivant la même loi $\mathscr{G}(p)$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X+Y$. Admet-elle une espérance ?
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = \sup(X,Y)$. Admet-elle une espérance ?
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $I = \inf(X,Y)$. Admet-elle une espérance ?
4. Montrer que la variable aléatoire SI admet une espérance et la calculer.

Exercice 7.8 (★★★ - Minimum, maximum de lois uniformes)
On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on effectue des tirages avec remise dans cette urne. On note X le numéro de la première boule extraite, et Y le numéro de la seconde. On note également I le plus petit des numéros tirés, et S le plus grand.

1. Donner la loi de I et de S.
2. Montrer que $E(S) = \dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n}$, $E(I) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$, puis que $V(S) = V(I) = \dfrac{(n+1)(n-1)(2n^2+1)}{36n^2}$.
3. Déterminer une relation liant X, Y, S et I. En déduire $V(S+I)$, puis $\rho_{S,I} = \dfrac{n^2-1}{2n^2+1}$.

Exercice 7.9 (★★★ - Somme de lois uniformes)
Soit $n \geq 1$, et X, Y des variables indépendantes suivant la loi $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$.
Déterminer la loi de $Z = X+Y$, son espérance et sa variance.
Pour le calcul $P(X+Y=k)$, on pourra distinguer les cas $k \leq n+1$ et $k > n+1$.

Exercice 7.10 (★★★ - QSP HEC 2012)
Les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que : $Y(\Omega) = \{1,2\}$, $P(Y=1) = P(Y=2) = \dfrac{1}{2}$. On pose : $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Quelle est la probabilité que Z prenne des valeurs paires ?

Covariance, corrélation linéaire

Exercice 7.11 (★)
Soit un couple (X,Y) de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$X \backslash Y$	b_1	b_2	b_3
a_1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
a_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	α

,

avec $a_i \neq a_j$ et $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$.

1. Que vaut α ? Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Montrer que $\text{Cov}(X,Y) = \dfrac{(a_2-a_1)(2b_1-b_2-b_3)}{25}$.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.12 (★ - ✍)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de Bernoulli.

1. Montrer que $\text{Cov}(X,Y) = P([X=1]\cap[Y=1]) - P([X=1])P([Y=1])$.
2. Montrer que deux variables aléatoires de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.

Exercice 7.13 (★★)

Une urne contient r boules rouges, v boules vertes et b boules bleues. On tire n boules dans l'urne successivement et avec remise. On note R (resp. V, B) la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges (resp. vertes, bleues) tirées.

1. Reconnaître les lois de R, V, B. Déterminer une relation liant R, V et B.
2. Calculer $V(R+V)$, puis montrer que $\rho_{R,V} = -\sqrt{\dfrac{rv}{(b+r)(b+v)}}$. Que peut-on en déduire ?
3. Que peut-on dire si $b=0$? Était ce prévisible ?

Exercice 7.14 (★★)

Soit $p\in]0,1[$, et soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (n,k)\in\mathbb{N}^2,\quad P([X=n]\cap[Y=k]) = \begin{cases} \lambda(1-p)^k & \text{si } k\geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y). Quelle est la loi de $X+1$? En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
3. Montrer que X et $Y-X$ suivent la même loi.
4. Montrer que X et $Y-X$ sont indépendantes. En déduire $\text{Cov}(X,Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.15 (★★)

Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules successivement et sans remise dans cette urne. Soit X la variable aléatoire égale au premier numéro obtenu et Y la variable aléatoire égale au deuxième numéro obtenu.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y) ainsi que ses lois marginales.
2. Montrer que $E(XY) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}$.
3. En déduire la covariance et le cœfficient de corrélation linéaire de X et Y.
4. Exprimer sous forme factorisée la variance $V(X+Y)$.

Exercice 7.16 (★★)

Soit $p\in]0;1[$ et $n>2$. On considère n joueurs de basket-ball qui tirent chacun deux lancers francs. On considère qu'à chaque lancer, un joueur à une probabilité p de marquer, et que les deux lancers sont indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué leur premier lancer franc, et Z la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué au moins un lancer franc.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que Z suit une loi binomiale, donner son espérance et sa variance.

3. On pose $Y = Z - X$. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer sa loi.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 7.17 (★★)
On lance n dés équilibrés à 6 faces. On note X le nombre de numéros distincts qui sont sortis lors des n lancers, et pour tout $i \in \{1, \cdots, 6\}$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si le numéro i est apparu.

1. Déterminer la loi des variables X_i.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Pour tout $(i, j) \in [\![1, 6]\!]^2$, déterminer la loi de $X_i X_j$. En déduire $\text{Cov}(X_i, X_j)$. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer $V(X)$.

Exercice 7.18 (★★)
On suppose que le nombre de personnes qui se présentent à l'entrée d'un cinéma en une heure est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le cinéma comporte $N \geq 3$ caisses, et on suppose que chaque personne choisit au hasard sa caisse parmi les N. Pour $i \in [\![1, N]\!]$, on note X_i le nombre de personnes ayant choisi la caisse numéro i.

1. Déterminer la loi de X_i conditionnellement à l'événement $[X = n]$, puis la loi de X_i.
2. Déterminer, sans nouveaux calculs la loi de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.
4. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X_1 et X.
5. (★) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 7.19 (★★★★ - Oral HEC 2014)
On lance indéfiniment un dé équilibré et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le numéro sorti au n-ième tirage.
Les variables aléatoires X_n, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, sont donc supposées indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.
Pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$, on note T_i le temps d'attente de la sortie du numéro i.

1. (a) Donner la loi de T_1 ainsi que son espérance et sa variance.
   (b) Trouver l'espérance des variables aléatoires $\text{Inf}(T_1, T_2)$ et $\text{Sup}(T_1, T_2)$.
2. Justifier l'existence de la covariance de T_1 et de T_2, que l'on notera $\text{Cov}(T_1, T_2)$.
3. (a) Établir, pour tout $i \in [\![2, 6]\!]$, la relation : $E(T_1 \mid [X_1 = i]) = 7$.
   (b) Montrer que pour tout $i \in [\![3, 6]\!]$, on a : $E(T_1 T_2 \mid [X_1 = i]) = E((1 + T_1)(1 + T_2))$.
   (c) Calculer $E(T_1 T_2)$.
   (d) En déduire $\text{Cov}(T_1, T_2)$ ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de T_1 et T_2.
4. (a) Trouver un réel α tel que les variables T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ soient non corrélées.
   (b) Calculer l'espérance conditionnelle $E(T_2 + \alpha T_1 \mid [T_1 = 1])$.
   (c) Les variables aléatoires T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ sont-elles indépendantes ?
