TD8

Intégrales généralisées

Intégration sur un segment

Exercice 8.1 (★)

Déterminer les limites suivantes : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} (e^{k+n})^{\frac{1}{n}}$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{n}$.

Exercice 8.2 (★★)

Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}.$$

On étudiera la parité, les variations, et l'on montrera que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 8.3 (★★★ - QSP ESCP 2018)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}.$$

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 8.4 (★★★★ - Oral ESCP 2013)

Soit f la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t+\sin(t)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}_f$.
3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
4. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en $x = 0$.
   On note $\tilde{f}$ la fonction ainsi prolongée.
5. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $\tilde{f}'(0)$.
6. La fonction $\tilde{f}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Nature d'une intégrale généralisée

Exercice 8.5 (★★)

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

$$\int_1^{+\infty} e^{-\pi t}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+2t)\sqrt{t}} \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+(t\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1+\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^t}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \ ; \ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{t}}{\sin(2t)-\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8.6 (★)

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes, et en cas de convergence, calculer leur valeur.

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t \;\; ; \;\; \int_0^{1/2} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \;\; ; \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \;\; ; \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\ln(t^2)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t \;\; ; \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 8.7 (★)

Montrer que les intégrales généralisées suivantes convergent et déterminer leur valeur à l'aide d'une intégration par parties.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \;\; ; \;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3}e^{-1/t}\,\mathrm{d}t \;\; ; \;\; \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

Exercice 8.8 (★★ - Exemple d'intégrale généralisée semi-convergente)

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t$.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t = 2$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t = +\infty$.

   (d) En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ diverge.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge mais ne converge pas absolument. Elle est dite *semi-convergente*.

Exercice 8.9 (★)

Déterminer la nature des intégrales suivantes et préciser leur valeur en cas de convergence en utilisant les changements de variable indiqués entre parenthèses.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x \;\; (\text{poser } t = \ln x) \;\; ; \;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1}\,\mathrm{d}t \;\; (\text{poser } u = e^t)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{u(1-\ln u)^2}\,\mathrm{d}u \;\; (\text{poser } u = e^x) \;\; ; \;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\mathrm{d}x \;\; (\text{poser } u = \sqrt{x})$$

Exercice 8.10 (★)

Étudier la nature des intégrales suivantes (on utilisera si nécessaire un changement de variable affine).

$$\int_{-\infty}^0 x^2 e^x\,\mathrm{d}x \;\; ; \;\; \int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+2x+3}} \;\; ; \;\; \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{(1-t)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}t \;\; ; \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+12x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 8.11 (★★)

1. (a) À l'aide du changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$, montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ convergent et sont de valeurs opposées.

   (b) Que peut-on en déduire sur l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$?

2. Soit $a > 0$. À l'aide d'un changement de variable, prouver la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2 + x^2} \mathrm{d}x$.

Exercice 8.12 (★★★★ - QSP ESCP 2016)
Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge également.

Exercice 8.13 (★★★★)

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ converge. On note I sa valeur.
2. À l'aide du changement de variables $u = -\ln(t)$, montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-2u}}{u}\,\mathrm{d}u$.
3. Montrer que $I = \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.
4. En déduire que $I = \ln(2)$.

Suites et fonctions définies par des intégrales généralisées

Exercice 8.14 (★★)
Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + t^{x+2}}} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $]0, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$. En déduire que f admet une limite finie en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 8.15 (★★)
Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $f(x)$ converge absolument. *Ainsi, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.*
2. Montrer que f est paire et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \Gamma(1/2)$.
3. (a) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $|\cos(a) - \cos(b)| \leq |a - b|$.
   (b) En déduire que pour tout $(x, x_0) \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq \dfrac{\Gamma(1/2)}{2}|x - x_0|$.
   (c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8.16 (★★ - Étude d'un reste)
Soit f la fonction définie pour tout $x \in]0, +\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est bien définie, préciser ses variations et ses limites en $+\infty$ et en 0.

2. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire que pour tout $x > 0$,
$$\frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}.$$
   (c) Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie.
   (b) Montrer que g admet une limite finie lorsque x tend vers 0.
   (c) En déduire que $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$.
4. Soit φ la fonction définie pour tout $x \in]1,+\infty[$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\ln x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.
   Montrer que φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 8.17 (★★)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}$.

1. Justifier la convergence des intégrales généralisées I_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle converge.
3. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n - I_{n+1} = \dfrac{1}{2n+2}I_n$.
4. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Comparaison série intégrale

Exercice 8.18 (★★ - Théorème de comparaison série/intégrale - ✍)
On considère une fonction f continue, décroissante et strictement positive sur $[p,+\infty[$ où $p \in \mathbb{N}$. On pose pour tout entier $n \geq p$:
$$u_n = \int_p^n f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=p}^n f(k).$$

1. On montre dans cette partie que (u_n) et (v_n) sont de même nature (*Théorème de comparaison série-intégrale*).
   (a) Soit $n \geq p+1$. Justifier que pour tout $p \leq k \leq n-1$,
$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq f(k).$$
   (b) En déduire que pour tout $n \geq p+1$, $v_n - f(p) \leq u_n \leq v_{n-1}$.
   (c) Conclure que les suites (u_n) et (v_n) sont de même nature.
2. **Application. Étude de la série de Bertrand $S = \displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$.**
   (a) Montrer que si $\beta \leq 0$, alors la série S diverge.

(b) On suppose $\beta > 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\beta}$ est convergente si et seulement si $\beta > 1$.
On effectuera le changement de variable $u = \ln(t)$.

(c) Conclure que S converge si et seulement si $\beta > 1$.

Fonction Gamma

Exercice 8.19 (★★ - Valeur de Γ aux demi-entiers)

1. Justifier la convergence et déterminer la valeur de intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\frac{5}{2}}e^{-t}\mathrm{d}t$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

Exercice 8.20 (★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer I_0 et I_1.
3. À l'aide du changement de variable $y = x^2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.
5. Exprimer I_{2n+1} et I_{2n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur en fonction des cœfficients de P.

Exercice 8.21 (★★★★ - Étude de la fonction Gamma)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) \geq \dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \Gamma(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > 1$, $\Gamma(x) \geq 2^{x-1}\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x)$.
3. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction $f_t : x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.
   (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   Montrer que la fonction f_t est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f_t' et f_t''.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leq \min(x/2, 1)$.
   Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:
   $$\left|\frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x)\right| \leq \frac{|h|}{2} M_2(t,x)$$
   où
   $$M_2(t,x) = \begin{cases} (\ln t)^2 e^{-t} t^{x/2-1} & \text{si } t < 1 \\ (\ln t)^2 e^{-t} t^x & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

(c) Justifier la convergence des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t \quad , \quad \int_0^{1} (\ln t)^2e^{-t}t^{x/2-1}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} (\ln t)^2e^{-t}t^{x}\,\mathrm{d}t.$$

(d) En déduire que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t.$$

(e) À l'aide du théorème de Rolle, montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.
On ne cherchera pas à déterminer α.

4. (a) Soit $t > 0$, montrer que la fonction f_t est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) En déduire que la fonction Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Dresser le tableau de variation de la fonction Γ et tracer sa courbe représentative.
