TP 5

Simulation de variables aléatoires à densité

Compétences attendues.

- ✓ Savoir simuler une loi continue usuelle à l'aide des fonctions de la librairie `numpy.random`, ou uniquement à partir de la fonction `rd.random()`.
- ✓ Vérifier graphiquement la pertinence d'une simulation d'une loi.

Liste des commandes `Python` exigibles aux concours.

- Dans la librairie `numpy.random` : `rd.random`, `rd.exmponential`, `rd.normal`, `rd.gamma`.
- Dans la librairie `matplotlib.pyplot` : `plt.hist`, `plt.show`.
- Dans la librairie `scipy.special` : `sp.ndtr`.

Mathieu Mansuy
Professeur en ECG deuxième année spécialité mathématiques approfondies au Lycée Louis Pergaud (Besançon)
Page personnelle : `mathieu-mansuy.fr/`
E-mail : `mansuy.mathieu@hotmail.fr`

1 Simulation des lois usuelles

1.1 Fonctions Python

Rappelons que le sous-module `numpy.random` est dédié aux simulations de variables aléatoires.

Définition.

On importe la bibliothèque `numpy.random` en écrivant l'une ou l'autre des instructions suivantes (on privilégiera la deuxième) :

`from numpy.random import *` ou `import numpy.random as rd`

Définition.

- `rd.random()` simule une réalisation de la loi uniforme sur $[0,1]$.
- `rd.exponential(1/a)` simule une réalisation de la exponentielle $\mathscr{E}(a)$ de paramètre $a>0$.
- `rd.gamma(v)` simule une réalisation de la loi gamma $\gamma(v)$ de paramètre $v>0$.
- `rd.normal(m,sigma)` simule une réalisation de la loi normale $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$ de paramètres $m\in\mathbb{R}$ et $\sigma>0$.

Remarques.

- On peut obtenir r simulations d'une loi usuelle sous la forme d'un vecteur de taille r, ou $r\times s$ simulations sous la forme d'une matrice de $\mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{R})$. Par exemple :
  - `rd.exponential(1/a,r)` renvoie un vecteur contenant r simulations de la loi exponentielle $\mathscr{E}(a)$;
  - `rd.normal(m,sigma,[r,s])` renvoie $r\times s$ simulations de la loi normale de paramètres m et σ^2.
- Attention à certains paramètres :
  - le paramètre de la loi exponentielle choisi par `Python` est l'inverse de celui du cours.
  - le second paramètre de la loi normale est σ et non σ^2.
  - par défaut, `rd.normal()` simule la loi normale centrée réduite.
- La simulation d'une variable de loi uniforme sur $[a,b]$, où $a<b$, s'obtient à l'aide de la commande hors programme `rd.uniform(a,b)`, ou bien, en restant dans le cadre du programme, par la commande `(b-a)*rd.random()+a`.

Dans la suite de ce TP, on explique comment simuler les lois usuelles en utilisant uniquement la fonction `rd.random`.

1.2 Loi normale

Propriété 1

- On suppose que $U_1, \dots, U_{12}$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi $\mathscr{U}([0,1])$. On pose $X = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6$.

  D'après le *Théorème de la limite centrée*, on peut considérer que X suit approximativement la loi normale centrée réduite.
- Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in]0, +\infty[$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,1)$, alors $\sigma X + m \hookrightarrow \mathscr{N}(m, \sigma^2)$.

Exercice 1

1. Écrire une fonction `norcentreereduite()` simulant la loi $\mathscr{N}(0,1)$ à l'aide de la fonction `rd.random`.
2. Écrire une fonction `normale(m,s)` simulant la loi $\mathscr{N}(m, s^2)$ à partir de la fonction `norcentreereduite()`.
3. Écrire une fonction `Normale(m,s,N)` donnant un vecteur contenant N réalisations de la loi $\mathscr{N}(m, s^2)$.

2 Méthode d'inversion

2.1 Principe

Théorème 2

On suppose que X est une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F est strictement croissante de $]a, b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ sur $]0,1[$. Alors :

- F réalise une bijection de $]a, b[$ sur $]0,1[$;
- si $U \hookrightarrow \mathscr{U}(]0,1[)$, alors $F^{-1}(U)$ suit la même loi que X.

Exercice 2

1. Rappeler l'expression de la fonction de répartition de $U \hookrightarrow \mathscr{U}(]0,1[)$.
2. Démontrer le théorème précédent.

Méthode. Simulation à l'aide de la méthode d'inversion.

Soit X une variable aléatoire à densité, F sa fonction de répartition. Supposons qu'on dispose d'une expression explicite de F^{-1}. Pour simuler la variable X, on procèdera comme suit :

(i) on choisit un paramètre t de manière aléatoire dans $]0,1[$ à l'aide de la fonction `rd.random()` *;*

(ii) on retourne $F^{-1}(t)$.

2.2 Simulation de la loi exponentielle

Exercice 3

1. Rappeler l'expression de la fonction de répartition d'une loi exponentielle, et montrer qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0,1[$.

   Déterminer sa bijection réciproque.

2. (a) Écrire une fonction `exponentielle(lambda)` simulant une loi $\mathscr{E}(\lambda)$ à partir de la fonction `rd.random()`.

   (b) Écrire une fonction `Exponentielle(lambda,N)` donnant un échantillon de taille N de la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.

3. (a) Créer un vecteur de taille 10000 contenant 10000 simulations d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{E}(1/2)$.

   (b) En utilisant les commandes `np.mean` et `np.std` de la librairie `numpy`, vérifier que la moyenne et l'écart-type empiriques (c'est-à-dire de ce vecteur) sont bien conformes à ce qu'on attend.

4. (a) Écrire une fonction `gamma(n)` simulant la loi $\gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Écrire une fonction `Gamma(n,N)` renvoyant un vecteur contenant N réalisations de la loi $\gamma(n)$.

2.3 Simulation de la loi de Cauchy

Exercice 4

On rappelle qu'une variable X suit une loi de Cauchy si elle admet pour fonction de répartition la fonction :

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right).$$

Une densité de X est alors la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+t^2}$.

1. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$, et déterminer F^{-1}.

2. (a) Écrire une fonction `cauchy()` simulant une loi de Cauchy à partir de la fonction `rd.random`.

   (b) Écrire une fonction `Cauchy(N)` donnant un échantillon de taille N de la loi de Cauchy.

3. (a) Créer un vecteur de taille 10000 contenant 10000 simulations d'une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy.

   (b) Utiliser la commande `np.mean` avec ce vecteur pour évaluer l'espérance d'une loi de Cauchy. Recommencer avec plusieurs échantillons. Que constatez-vous ? Une variable suivant la loi de Cauchy admet-elle une espérance ?

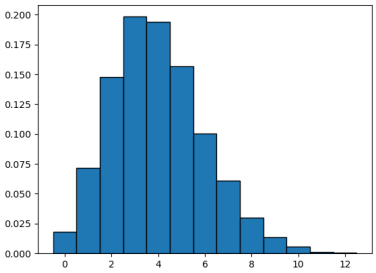
3 Représentations graphiques

Soit X une variable aléatoire à densité. Supposons qu'on dispose d'une fonction `Loi` permettant de simuler la loi de X. Pour juger de la qualité de cette simulation, on va utiliser des représentations graphiques. Pour cela, on procèdera comme suit :

- on crée un échantillon de taille N, c'est-à-dire un vecteur ligne `x` contenant N réalisations de la fonction `Loi` ;
- on compare graphiquement les fréquences empiriques obtenues grâce à l'échantillon avec les probabilités théoriques pour vérifier la pertinence de la simulation.

Remarque. Pour une variable discrète, afin de comparer nos résultats à la théorie, nous avions regroupé les simulations par modalités, et tracé le diagramme en bâtons des fréquences. Par exemple, si `x` est un vecteur contenant 10000 simulations d'une loi de Poisson de paramètre 4, on peut procéder ainsi :

```
x = rd.poisson(4,10000)
c = np.arange(-0.5,13)
plt.hist(x,c,density = 'True',
edgecolor = 'k')
plt.show()
```



Nous n'allons pas pouvoir procéder de cette manière dans le cas d'une variable à densité X. En effet, on a $P(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et chaque modalité de notre échantillon risque donc d'avoir un effectif égal à 1. Le tri par modalités n'est donc pas adapté ici, et la représentation à l'aide d'un diagramme en bâtons non plus.

Nous proposons ici deux façons d'évaluer la qualité de nos simulations dans le cas de variables aléatoires continues :

- en comparant l'*histogramme des fréquences d'un échantillon* à la densité théorique ;
- en comparant la *fonction de répartition empirique d'un échantillon* à la fonction de répartition théorique de la loi.

3.1 Comparaison histogramme des fréquences / densité

Principe

Le nombre de modalités de notre échantillon `x` étant a priori très grand, chacune avec un effectif de 1, nous allons les regrouper par classe. Afin de définir ces classes, on fixe une suite de réels strictement croissante :

$$c = (c_0 < c_1 < \cdots < c_p).$$

On va alors comparer :

- l'*histogramme des fréquences de l'échantillon*, défini par les rectangles de base les classes $[c_i, c_{i+1}]$ et d'aires les fréquences d'appartenance à ces classes pour notre échantillon `x` ;
- la courbe représentative d'une densité f de la loi de X.

Si notre simulation suit bien la loi attendue, on doit constater que :

Théorème 3 (*Théorème d'or de Bernoulli*)

Pour N « suffisamment grand », la fréquence observée pour la classe $[c_i, c_{i+1}]$ est proche de la probabilité théorique $P(c_i \leq X \leq c_{i+1}) = \displaystyle\int_{c_i}^{c_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Graphiquement, on devrait donc observer que l'aire du rectangle de base $[c_i, c_{i+1}]$, qui est égale à la fréquence d'appartenance à cette classe, est proche de l'aire sous la courbe représentative de f entre c_i et c_{i+1}.

Commandes utiles

On va avoir besoin des commandes suivantes.

Définition.

Soit `x` un vecteur.

- L'instruction `plt.hist(x,n)` trace l'histogramme associé à la série `x` en `n` classes équiréparties entre la plus petite valeur de `x` et la plus grande (par défaut, `n` vaut 10).
- L'instruction `plt.hist(x,c)` trace l'histogramme associé à la série `x` dont les classes sont définies par le vecteur aux composantes strictement croissantes `c`.
- On dispose pour la commande `plt.hist` des options de tracé suivantes (non exigibles) :
  - normalisation des rectangles (la surface totale vaut 1) : `density='True'`
    Cette option permet d'obtenir l'histogramme des fréquences de l'échantillon.
  - contours des rectangles en noir : `edgecolor='k'`

Exemples

Exercice 5

1. Simuler avec la fonction `Exponentielle` $N = 10000$ valeurs de la loi $\mathscr{E}(0.5)$.
2. Tracer la courbe représentative de la densité f de la loi $\mathscr{E}(0.5)$.
3. Tracer l'histogramme des fréquences de l'échantillon obtenu (on prendra pour cela une subdivision c de l'intervalle $[0, 10]$ en $p = 100$ intervalles de même longueur).

   Comparer l'histogramme des fréquences de l'échantillon à la courbe représentative de f. Qu'en pensez vous ?
4. Procéder de même pour la loi $\gamma(3)$.

3.2 Comparaison fonction de répartition empirique / théorique

Principe

On propose dans cette section une deuxième méthode pour juger de la qualité de la simulation d'une loi de probabilité à densité. On va comparer :

- la *fonction de répartition empirique* : il s'agit de la fonction qui à un réel x associe la fréquence d'apparition des nombres inférieurs ou égaux à x dans l'échantillon `x` ;
- la fonction de répartition théorique.

On doit observer que :

Théorème 4 (*Théorème d'or de Bernoulli*)

Pour N « suffisamment grand », la fréquence observée des modalités plus petites que x est proche de la probabilité $P(X \leq x)$.

Graphiquement, la courbe de la fonction de répartition empirique doit donc être proche de la courbe de la fonction de répartition théorique si notre simulation correspond à la loi attendue.

Commandes utiles

Pour tracer la fonction de répartition empirique, nous aurons besoin des commandes suivantes.

Définition.

- Si `u` et `v` sont deux vecteurs de même format, l'instruction `u==v` renvoie un vecteur de même format que `u` dont les éléments sont `True` ou `False` selon que les coefficients correspondants de `u` et `v` à cette même place sont égaux ou non.
- Si tous les éléments de `v` sont égaux à un même réel `x`, on peut écrire simplement `u==x`.
- On définit de même les vecteurs booléens `u>v`, `u>=v`, `u<v`, `u<=v` et `u!=v`.

Définition.

Si `u` est un vecteur dont les composantes sont des booléens, alors la commande `np.mean(u)` renvoie la proportion de booléens qui ont pris la valeur `True`.

Méthode. Tracé de la fonction de répartition empirique.

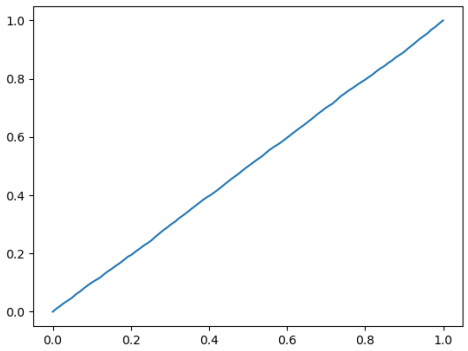
Pour tracer la fonction de répartition empirique d'un échantillon `x`*, on procède ainsi :*

```
n = 100
u = np.linspace(np.min(x),np.max(x),n)
v = np.zeros(n)
for k in range(n) :
      v[k] = np.mean(x <= u[k])
plt.plot(u,v)
plt.show()
```

Exemples

Exemple. Prenons le cas où $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0,1])$, avec un échantillon `x` de taille $N = 10000$ de la loi de X obtenu à l'aide de la fonction `rd.random`, et traçons la fonction de répartition empirique associée.

```
N = 10000 ; n = 100
x = rd.random(N)
u = np.linspace(np.min(x),np.max(x), n)
v = np.zeros(n)
for k in range(n) :
    v[k] = np.mean(x <= u[k])
plt.plot(u,v)
plt.show()
```



Cette courbe étant proche de celle de la fonction de répartition théorique de la loi $\mathscr{U}([0,1])$, on peut donc conclure que les simulations obtenues à l'aide de la fonction `rd.random` suivent bien la loi $\mathscr{U}([0,1])$.

Exercice 6

1. Expliquer les lignes de commandes proposées pour tracer la fonction de répartition empirique.
2. Simuler avec la fonction `Exponentielle` $N = 10000$ réalisations de la loi $\mathscr{E}(1)$.
3. Tracer la fonction de répartition empirique de l'échantillon obtenu et la fonction de répartition théorique de cette loi. Comparer.

On va maintenant tester notre simulation de la loi $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$. Il nous faut pour cela tracer la fonction de répartition théorique de cette loi. Cela nécessite d'importer la librairie `scipy.special` à l'aide de la commande suivante :

```
import scipy.special as sp
```

On dispose alors de la commande suivante :

Définition.

- Pour tout réel x, la commande `sp.ndtr(x)` renvoie la valeur de $\Phi(x)$.
- Pour tout réel x, la commande `sp.ndtr((x-m)/s)` renvoie la valeur de $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{s}\right)$, où F est la fonction de répartition de la loi $\mathscr{N}(m,s^2)$.

Exercice 7

1. Calculer $\Phi(0), \Phi(1), \Phi(1.96)$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{N}(3,2^2)$. Calculer $P(X>10)$, $P(0 \leq X < 3)$.
3. Tester les simulations obtenues des lois $\mathscr{N}(0,1)$ et $\mathscr{N}(2,3^2)$ en traçant les fonctions de répartition théoriques et empiriques.
4. Comparer ces résultats avec ceux obtenus par la fonction `rd.normal`.

4 Exercices

Exercice 8 (★★)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées suivant une loi uniforme sur $[0, a]$. On pose :

$$U = \min(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad V = \max(X_1, \dots, X_n).$$

1. Déterminer les lois de U et V.
2. On considère la fonction suivante :

```
def simulation(a,n):
    nb_sim = 10000
    R = a*rd.random([nb_sim,n])
    couple = np.array([np.min(R,0), np.max(R,0)])
    return couple
```

   Expliquer la fonction `simulation`.

3. Prenons $n = 2$ et $a = 1$. Comparer graphiquement la qualité de cette simulation (fonction de répartition empirique/théorique).

Exercice 9 (★★★ - Différentes simulations de la loi de Pareto)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$.

1. Déterminer la valeur de r pour laquelle $f_\lambda : x \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \lambda \\ \dfrac{r}{x^{k+1}} & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

   Si X admet pour densité f_λ, on dit que X suit la loi de Pareto de paramètre λ et k.

2. Déterminer la fonction de répartition d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètres λ et k.
3. En utilisant la méthode d'inversion, simuler une variable aléatoire suivant une loi de Pareto de paramètres λ et k.
4. Soient $X_1, \cdots, X_k$ k variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $]0, 1]$. On pose alors $Y = \dfrac{\lambda}{\max(X_1, \cdots, X_k)}$.
   (a) Montrer que Y suit une loi de Pareto de paramètres λ et k.
   (b) En déduire une autre méthode pour simuler la loi de Pareto.
5. Comparons à présent les deux méthodes obtenues de simulation d'une loi de Pareto.
   (a) En simulant $N = 100000$ réalisations d'une loi de Pareto à l'aide de chacune de ces méthodes, déterminer laquelle des deux est la plus rapide.
   On pourra à cet effet utiliser la commande `time.clock()` *de la librairie* `time`*. Pour cela, on exécute la commande* `tps1 = time.clock()` *juste avant le début de la simulation, puis la commande* `tps2 = time.clock()` *juste après. La différence entre ces différents temps donnera le temps d'exécution de la portion de code encadrée (en secondes).*
   (b) Prenons $\lambda = 1$. Comparer graphiquement la qualité de chacune des deux simulations d'une loi de Pareto (histogramme des fréquences/densité théorique).
