ECG2

Bilan de compétences

Ce document a pour but de vous guider dans vos révisions, en ciblant les points de cours non maitrisés qu'il vous reste à reprendre. Pour cela, vous devez vous auto-évaluer sur votre niveau d'acquisition des différentes compétences :

- Est-ce vraiment au programme d'ECG ?
- Je peux énoncer le point de cours, mais pas sûr de savoir faire un exercice là-dessus.
- Aucun problème, je gère et je sais faire n'importe quel exercice du TD sur le sujet rapidement.

À vous de compléter ce document, au crayon afin de pouvoir modifier votre niveau d'acquisition de chaque compétence durant vos révisions. Les niveaux de compétences qu'il faut atteindre en priorité sont indiqués par une flèche ↑.

Analyse

Fonctions d'une variable réelle

☐ ↑	☐	☐	Étudier la continuité d'une fonction en un point, prolonger une fonction par continuité en un point.
☐ ↑	☐	☐	Déterminer la limite d'une fonction par comparaisons et équivalents usuels.
☐ ↑	☐	☐	Savoir appliquer le théorème de la bijection pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation.
☐ ↑	☐	☐	Connaitre les dérivées usuelles, les opérations sur les fonctions dérivables.
☐	☐	☐	Maitriser les théorèmes de Rolle, d'accroissements finis et de passage à la limite sur la dérivée.
☐ ↑	☐	☐	Étudier les variations d'une fonction de la variable réelle (domaine de définition, calcul de la dérivée, tableau de variations, limites aux bornes du domaine, asymptotes éventuelles).
☐	☐	☐	Connaitre et appliquer les formules de Taylor.
☐	☐	☐	Savoir calculer le développement limité d'une fonction par somme ou produit des DL usuels, et en déduire une limite ou un équivalent.
☐	☐	☐	Montrer qu'une fonction est convexe/concave en étudiant le signe de sa dérivée seconde, et en déduire des inégalités de convexité (positions relatives courbe/tangente et courbe/corde).

Suites

☐ ☐ ☐ Savoir identifier et déterminer l'expression explicite d'une suite géométrique, arithmétique, arithmético-géométrique et d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients réels.

☐ ☐ ☐ Savoir justifier la convergence ou la divergence d'une suite par monotonie ou théorèmes de comparaison.

☐ ☐ ☐ Savoir montrer que deux suites sont adjacentes, donc convergentes vers la même limite.

☐ ☐ ☐ Déterminer la limite d'une suite par comparaison, manipulation d'équivalents.

Séries

☐ ☐ ☐ Calculer une somme finie à l'aide des sommes finies de référence.

☐ ☐ ☐ Calculer une somme double finie indexée par un rectangle ou un triangle.

☐ ☐ ☐ Étudier la convergence d'une série à termes positifs par comparaison aux séries de référence.

☐ ☐ ☐ Étudier la convergence absolue d'une série.

☐ ☐ ☐ Calculer la somme d'une série à l'aide des séries de référence.

☐ ☐ ☐ Étudier la convergence d'une série double à l'aide du Théorème de Fubini ou d'une sommation suivant les diagonales.

Intégration

☐ ☐ ☐ Étudier la convergence d'une intégrale (intégrales faussement impropres, comparaison à des intégrales de référence pour les fonctions positives, absolue convergence).

☐ ☐ ☐ Connaitre les primitives usuelles, calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.

☐ ☐ ☐ Calculer une intégrale par intégration par parties (en se ramenant à un segment).

☐ ☐ ☐ Déterminer la nature et calculer une intégrale par changement de variable en justifiant pourquoi il est licite.

☐ ☐ ☐ Reconnaitre et utiliser la fonction Γ.

Fonctions de plusieurs variables

- ☐ ☐ ☐ Reconnaitre la nature topologique d'un ensemble (ouvert, fermé, borné).
- ☐ ☐ ☐ Montrer qu'une fonction est continue, de classe $\mathscr{C}^1$ ou de classe $\mathscr{C}^2$.
- ☐ ☐ ☐ Calculer le gradient et la hessienne d'une fonction.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer les points critiques d'une fonction.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer la nature d'un point critique à l'aide de la hessienne.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer les extrema locaux d'une fonction sur un ouvert.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer les extrema globaux d'une fonction sur un ouvert convexe.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer les extrema globaux d'une fonction sur un fermé borné.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer les points critiques d'une fonction sous une contrainte d'égalités linéaires.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer les extrema locaux et globaux d'une fonction sous une contrainte d'égalités linéaires.

Algèbre

Polynômes

- ☐ ☐ ☐ Connaitre les règles de calcul du degré d'une expression.
- ☐ ☐ ☐ Savoir le théorème de division euclidienne, et obtenir le quotient et le reste en pratique.
- ☐ ☐ ☐ Savoir les différentes caractérisations de la multiplicité d'une racine, et savoir déterminer l'ordre de multiplicité d'une racine.
- ☐ ☐ ☐ Factoriser un polynôme (recherche de racines évidentes et de leurs multiplicités, puis division euclidienne pour mettre en facteur).

Algèbre linéaire de base

- ☐ ☐ ☐ Résoudre un système linéaire par méthode du pivot de Gauss.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer le rang (du système linéaire associé à) une matrice.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer un polynôme annulateur d'une matrice.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer si une matrice A est inversible, et si c'est le cas calculer A^{-1} à l'aide de la méthode du pivot de Gauss, d'inverse à gauche/droite, d'un polynôme annulateur, pour les matrices 2×2, ...
- ☐ ☐ ☐ Calculer les puissances d'une matrice A en utilisant la formule du binôme, un polynôme annulateur, ou que A est semblable à une matrice diagonale.
- ☐ ☐ ☐ Montrer que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E.
- ☐ ☐ ☐ Montrer qu'une famille de vecteurs est libre.
- ☐ ☐ ☐ Montrer qu'une famille de vecteurs est une base d'un espace vectoriel.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel F de E.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer le rang d'une matrice, d'une famille de vecteurs.
- ☐ ☐ ☐ Montrer que deux sous-espaces vectoriels $F, G \subset E$ sont en somme directe.
- ☐ ☐ ☐ Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E.
- ☐ ☐ ☐ Montrer que p sous-espaces vectoriels sont en somme direct.
- ☐ ☐ ☐ Montrer qu'une application est linéaire, calculer son noyau, son image et son rang.
- ☐ ☐ ☐ Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme.
- ☐ ☐ ☐ Montrer qu'une application linéaire p est un projecteur, et savoir l'identifier en calculant $\mathrm{Ker}(p), \mathrm{Im}(p)$.
- ☐ ☐ ☐ Écrire la matrice d'une application linéaire f dans une base $\mathscr{B}$.
- ☐ ☐ ☐ Écrire une matrice de passage, et l'utiliser dans les formules de changement de bases.
- ☐ ☐ ☐ Montrer qu'un polynôme est annulateur d'une application linéaire.
- ☐ ☐ ☐ Montrer qu'un sous-espace est stable par une application linéaire.

Diagonalisation

- ☐ ☐ ☐ Déterminer les valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme (cas des matrices 2×2, triangulaires, à l'aide d'un polynôme annulateur, ou dans le cas général).
- ☐ ☐ ☐ Déterminer le sous-espace propre associé à une valeur propre λ.
- ☐ ☐ ☐ Utiliser l'inégalité $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq \dim(E)$.
- ☐ ☐ ☐ Étudier la diagonalisabilité d'un endomorphisme f ou d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- ☐ ☐ ☐ Calculer les puissances d'une matrice diagonalisable.
- ☐ ☐ ☐ Montrer que deux matrices sont semblables ou non.

Algèbre bilinéaire

- ☐ ☐ ☐ Montrer qu'une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.
- ☐ ☐ ☐ Savoir reconnaitre et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
- ☐ ☐ ☐ Montrer que deux sous-espaces sont orthogonaux.
- ☐ ☐ ☐ Montrer qu'une famille de vecteurs est orthogonale ou orthonormale.
- ☐ ☐ ☐ Construire une base orthonormée à l'aide de l'algorithme de Gram-Schmidt.
- ☐ ☐ ☐ Calculer les coordonnées d'un vecteur et sa norme dans une base orthonormale.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel.
- ☐ ☐ ☐ Utiliser une projection orthogonale pour minimiser une quantité.
- ☐ ☐ ☐ Montrer qu'un endomorphisme est symétrique.
- ☐ ☐ ☐ Diagonaliser une matrice symétrique en base orthonormée.
- ☐ ☐ ☐ Étudier le signe d'une forme quadratique associée à une matrice symétrique.

Probabilité

Calcul de probabilités

- ☐ ☐ ☐ Savoir modéliser une expérience probabiliste en la traduisant en langage mathématique.
- ☐ ☐ ☐ Maitriser les principes de calculs des probabilités (probabilité d'une union, d'une intersection).
- ☐ ☐ ☐ Utiliser un système complet d'évènements pour des expériences en deux étapes, en vue d'appliquer la formule des probabilités totales ou la formule de Bayes.

Variables aléatoires discrètes

- ☐ ☐ ☐ Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire discrète.
- ☐ ☐ ☐ Utiliser la formule de l'espérance totale.
- ☐ ☐ ☐ Reconnaitre et utiliser une loi usuelle.
- ☐ ☐ ☐ Obtenir la loi d'un couple (X, Y), ses lois marginales.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer la loi de $X + Y$ à l'aide du produit de convolution discret.
- ☐ ☐ ☐ Calculer une covariance.
- ☐ ☐ ☐ Étudier l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer la loi d'une somme par stabilité des lois usuelles.
- ☐ ☐ ☐ Déterminer la loi d'un maximum/minimum de variables aléatoires.

Variables aléatoires continues

☐ ☐ ☐ Prouver qu'une variable aléatoire X est à densité.

☐ ☐ ☐ Montrer qu'une fonction f est une densité de probabilité.

☐ ☐ ☐ Déterminer une densité d'une variable aléatoire X à partir de sa fonction de répartition, ou l'inverse.

☐ ☐ ☐ Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire $Y = g(X)$.

☐ ☐ ☐ Prouver l'existence et calculer une espérance ou une variance d'une variable à densité.

☐ ☐ ☐ Utiliser le théorème de transfert pour calculer une espérance.

☐ ☐ ☐ Connaitre une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance des lois usuelles.

☐ ☐ ☐ Savoir utiliser la table de valeurs de la loi normale centrée réduite.

☐ ☐ ☐ Montrer qu'une somme de deux variables indépendantes est à densité, et déterminer une densité par produit de convolution.

☐ ☐ ☐ Déterminer la loi d'une somme par stabilité des lois usuelles, en particulier la somme de lois exponentielles indépendantes.

☐ ☐ ☐ Déterminer la loi d'un maximum/minimum de variables aléatoires.

Convergence de variables aléatoires, estimation

☐ ☐ ☐ Prouver une convergence en probabilité via la loi faible des grands nombres, l'inégalité de Markov ou de Bienaymé-Tchebychev, ou par un calcul direct.

☐ ☐ ☐ Étudier la convergence en loi d'une suite (X_n) de variables aléatoires.

☐ ☐ ☐ Connaitre et utiliser le Théorème Limite Central.

☐ ☐ ☐ Approximer une loi par une autre, en effectuant si nécessaire une correction de continuité.

☐ ☐ ☐ Calculer le biais d'un estimateur.

☐ ☐ ☐ Montrer qu'un estimateur est sans biais ou asymptotiquement sans biais.

☐ ☐ ☐ Montrer qu'un estimateur est convergent.

☐ ☐ ☐ Comparer deux estimateurs.

☐ ☐ ☐ Déterminer un intervalle de confiance par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

☐ ☐ ☐ Déterminer un intervalle de confiance asymptotique par le Théorème Limite Central.