ECG2

Exercices de colle de la semaine 1

Exercice 1.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}.$$

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Exemples.
   (a) Déterminer $\mathscr{C}(I_n)$. Quelle est sa dimension ?
   (b) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels deux à deux distincts, et soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Déterminer $\mathscr{C}(D)$. Quelle est sa dimension.
3. Déterminer $\max\limits_{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.
4. On suppose que $n = 2$ dans cette question. On cherche à déterminer $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A))$.
   (a) Montrer que $\min\limits_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathscr{C}(A)) \leq 2$.
   (b) Supposons qu'il existe $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq 1$.
      i. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_2$.
      ii. Aboutir à une contradiction et conclure.

Exercice 1.2

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. On dit que le produit $\prod u_n$ converge si la suite (v_n) définie par $v_n = \prod\limits_{k=1}^{n} u_k$ admet une limite non nulle ℓ, et l'on note alors :

$$\ell = \prod_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

1. (a) Montrer que si $\prod u_n$ converge, alors $\lim u_n = 1$.
   (b) Montrer que le produit infini $\prod\limits_{n\geq 2} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ est divergent. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?
   (c) Étudier la convergence du produit $\prod\limits_{n\geq 2} \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$
2. Dans cette question, on suppose que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :
   (1) le produit $\prod(1 + u_n)$ converge ;
   (2) la série $\sum \ln(1 + u_n)$ converge ;
   (3) la série $\sum u_n$ converge.
3. Étudier la convergence du produit $\prod\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
