ECG2

Exercices de colle de la semaine 10

Exercice 1

On considère, pour tout polynôme P, Q à cœfficients réels :

$$\Phi(P,\, Q) = (PQ)(0) + \int_{-1}^{1} P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   On note désormais $\langle P, Q\rangle = \Phi(P, Q)$.
2. Déterminer $\langle X^p, X^q\rangle$ pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
3. Montrer que la famille $(1, X, X^2, X^3 - X)$ est une famille orthogonale.
4. En déduire une famille orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est également une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2

On considère la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 2te^{-t^2} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire à densité T qui admet f pour densité.
2. Déterminer la fonction de répartition de T.
3. Déterminer le réel μ, appelé médiane de T, tel que $P(T \leq \mu) = \dfrac{1}{2}$.
4. Montrer que T admet une espérance et une variance et les déterminer.
5. On pose $Z = T^2$. Montrer que Z suit une loi usuelle que l'on déterminera.
